

擬 Riemann 対称 R 空間の対蹠集合について

東京理科大学大学院 創域理工学研究科 数理科学専攻
杉本恭司 (Kyoji SUGIMOTO) *

概要

対称空間の部分集合が対蹠集合であるとは、その部分集合の任意の二点が互いの点対称に関して対蹠的であることをいう。Riemann 対称空間において、対蹠集合は位相的な性質を反映することが知られている。本講演では、非 Riemann 対称空間の中でも双曲随伴軌道として実現される対称空間、及びより広いクラスの対称空間である擬 Riemann 対称 R 空間の対蹠集合について得られた結果を紹介する。

1 はじめに

M を対称空間とし、 $p \in M$ に対して、 s_p で $p \in M$ における点対称を表す。部分集合 $S \subset M$ が対蹠集合であるとは、任意の $p, q \in S$ に対して、 $s_p(q) = q$ が成り立つことをいう。対蹠集合の概念は [1] において導入され、Riemann 対称空間論において、多くの興味深い研究がなされてきた (例えば, [1, 8, 9, 10] 等)。一方で、非 Riemann 対称空間においては、対蹠集合の研究はほとんどなされてこなかったように思える。本稿では、非 Riemann 対称空間の中でも、双曲軌道型効果的半単純 para-Hermite 対称空間、及び非退化 Jordan 三項系に付随した擬 Riemann 対称 R 空間の対蹠集合について得られた結果を紹介する。

ここで、para-Hermite 対称空間は [2] によって導入された概念であり、それは、不変 para 複素構造と不変 para-Hermite 計量を兼ね備えた対称空間である。Para-Hermite 対称空間は Riemann でない対称空間であり、特に、para-Hermite 計量はニュートラル計量である。また、擬 Riemann 対称 R 空間は [3] により導入された概念で、それは、対称 R 空間とよばれるあるコンパクト Riemann 対称空間の擬 Riemann の場合への一般化である。擬 Riemann 対称 R 空間は直交 Jordan 三項系とよばれるある種の不変内積を兼ね備えた Jordan 三項系で、ある特別な条件を満たすものと一対一に対応している。非退化 Jordan 三項系は直交 Jordan 三項系であることに注意しておく。なお、本稿では、擬 Riemann 対称 R 空間の中でも、非退化 Jordan 三項系に付随したもののみを考える。

本節の終わりに、本稿で良く用いる記号について述べておく。

- (1) G を Lie 群とし、 $\phi \in \text{Aut}(G)$ とする。このとき、 ϕ の単位元における微分をまた ϕ で表す。
- (2) \mathfrak{g} を Lie 代数、 \mathfrak{h} を \mathfrak{g} の部分 Lie 代数、 \mathfrak{m} を部分空間とする。 $\text{ad } \mathfrak{h}(\mathfrak{m}) \subset \mathfrak{m}$ であるとき、 $\text{ad } \mathfrak{h}|_{\mathfrak{m}}$ を $\text{ad}_{\mathfrak{m}} \mathfrak{h}$ と表す。

* E-mail: a30825@rs.tus.ac.jp

- (3) Lie 群 G に対して, G_0 で G の単位連結成分を表す.
(4) 集合 M と写像 $f : M \rightarrow M$ に対して, $M^f := \{x \in M \mid f(x) = x\}$ とする.

2 定義等

本節では para-Hermite 対称空間, 及び非退化 Jordan 三項系に付随した擬 Riemann 対称 R 空間の基本的なことについて復習する.

2.1 Para-Hermite 対称空間

はじめに, 対称空間の定義を述べる.

定義 2.1 (cf. [4]). (1) G を連結リー群, L を G の閉部分群, $\sigma (\neq \text{id}_G)$ を G の対合的自己同型とする. $(G/L, \sigma)$ が対称空間であるとは,

$$(G^\sigma)_0 \subset L \subset G^\sigma$$

を満たすことをいう.

(2) $(G/L, \sigma)$ を対称空間とする. 原点 $o := eL \in G/L$ に対して, $s_o : G/L \rightarrow G/L$ を $s_o(xL) := \sigma(x)L$ により定義し, $p := xL \in G/L$ に対して,

$$s_p := \tau_x \circ s_o \circ \tau_{x^{-1}}$$

とする. 但し, $x \in G$ に対して, τ_x は $\tau_x(yL) := xyL$ により定義される G/L の微分同型である. s_p は well-defined であることに注意しておく. s_p を p における点対称という.

- (3) $(G/L, \sigma)$ を対称空間とする. G が半単純であるとき, G/L は半単純であるという.
(4) $(G/L, \sigma)$ を対称空間とする. G が G/L に概効果的 (resp. 効果的) に作用しているとき, G/L は概効果的 (resp. 効果的) であるという.

定義 2.2 (cf. [2]). (1) M を $2n$ 次元多様体とする. M 上の $(1, 1)$ 型テンソル場 I が以下を満たすとき, I を M 上の **para 複素構造** という:

- (i) $I^2 = \text{id}_{\mathfrak{X}(M)}$.
(ii) 任意の $p \in M$ に対して, $\dim T_p^+ M = \dim T_p^- M$. 但し, $T_p^\pm M$ は I_p の ± 1 固有空間を表す.
(iii) 任意の $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ に対して, $[IX, IY] - I[IX, Y] - I[X, IY] + [X, Y] = 0$.
このとき, (M, I) を **para 複素多様体** という.

(2) (M, I) を para 複素多様体とする. M 上の擬 Riemann 計量 g が

$$g(IX, Y) + g(X, IY) = 0 \quad (X, Y \in \mathfrak{X}(M))$$

を満たすとき, g を M 上の **para-Hermite 計量** という.

(3) 対称空間 $(G/L, \sigma)$ が G 不変 para 複素構造 I と I に関する G 不変 para-Hermite 計量 g を兼ね備えているとき, **para-Hermite 対称空間** という.

(4) $(M, I), (M', I')$ を para 複素多様体とし, $\Phi : M \rightarrow M'$ を可微分写像とする. 任意の $p \in M$ に対して,

$$(d\Phi)_p \circ I_p = I_{\Phi(p)} \circ (d\Phi)_p \quad (\text{resp. } (d\Phi)_p \circ I_p = -I_{\Phi(p)} \circ (d\Phi)_p)$$

が成り立つとき, Φ は **para 正則** (resp. **反 para 正則**) であるという.

注意 2.1. (1) 定義より, para-Hermite 計量はニュートラル計量であり, para-Hermite 対称空間は Riemann でない擬 Riemann 対称空間である.

(2) para-Hermite 対称空間 $(G/L, \sigma, I, g)$ は para-Kähler 等質空間である. 即ち, $\omega(X, Y) := g(X, IY)$ ($X, Y \in \mathfrak{X}(G/L)$) とすると, ω は G/L 上のシンプレクティック形式である. (cf. [2]).

次の補題は半単純 para-Hermite 対称空間論において基本的である.

補題 2.1 (cf. [2]). $(G/L, \sigma, I, g)$ を概効果的半単純 para-Hermite 対称空間, \mathfrak{g} を G の Lie 代数, $\mathfrak{g} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{u}$ を σ に関する \mathfrak{g} の (± 1) 固有空間分解とする.

(1) このとき, 以下を満たす $Z \in \mathfrak{l}$ が唯一存在する.

$$(i) \mathfrak{l} = \mathfrak{c}_{\mathfrak{g}}(Z) = \{X \in \mathfrak{g} \mid [Z, X] = 0\}, \quad (ii) I_o = \text{ad}_u Z.$$

但し, o は G/L の原点を表す.

(2) (1) の Z に対して, 以下が成り立つ:

(iii) $C_G(Z)_0 \subset L \subset C_G(Z)$. 但し, $C_G(Z) := \{x \in G \mid \text{Ad } x(Z) = Z\}$.

(iv) $\sigma = \exp \sqrt{-1}\pi \text{ad } Z \in \text{Inv}(\mathfrak{g})$.

(v) $\mathfrak{l} = \mathfrak{g}_0, \mathfrak{u} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_1$. 但し, $\lambda = 0, \pm 1$ に対して, \mathfrak{g}_λ は $\text{ad } Z$ の λ 固有空間を表す.

(vi) \tilde{L} を $C_G(Z)$ の開部分群とすると, $(G/\tilde{L}, \sigma, \tilde{I}, \tilde{g})$ は概効果的半単純 para-Hermite 対称空間になる. 但し, $B_{\mathfrak{g}}$ を \mathfrak{g} の Killing 形式としたとき, \tilde{I} (resp. \tilde{g}) は $\text{ad } Z|_{\mathfrak{u}}$ (resp. $B_{\mathfrak{g}}|_{\mathfrak{u} \times \mathfrak{u}}$) の G/\tilde{L} 上への G 不変拡張である. このとき Z は G/\tilde{L} に対して, (1) の条件を満たす.

注意 2.2. (1) 補題 2.1 の Z は \mathfrak{g} の半単純元であり, $\text{ad } Z$ の \mathfrak{g} 上の固有値は $0, \pm 1$ である. この Z を G/L の特性元という. このとき, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ は Z を特性元とする半単純第一種階別 Lie 代数になる. 従って \mathfrak{g} の Cartan 対合 θ で $\theta(Z) = -Z$ なるものが存在する. 補題 2.1 より, $\theta \circ \sigma = \sigma \circ \theta$ となる.

(2) $L = C_G(Z)$ となるとき, G/L は双曲軌道型であるという. このとき, G/L は Z を通る G の随伴軌道 $\text{Ad } G(Z)$ として実現される.

2.2 擬 Riemann 対称 R 空間

V を \mathbb{R} 上有限次元ベクトル空間とする. V 上の V 値三重線形写像 $\{ \} : V \times V \times V \rightarrow V$ が定義され,

(1) $\{x, y, z\} = \{z, y, x\}$,

$$(2) [L(x, y), L(u, v)] = L(L(x, y)u, v) - L(u, L(y, x)v)$$

$(x, y, z, u, v \in V)$ を満たすとき, $(V, \{ \})$ を **Jordan 三項系** という. 但し, $L(x, y) : V \rightarrow V$, $L(x, y)(z) := \{x, y, z\}$ で, $[L(x, y), L(u, v)] := L(x, y) \circ L(u, v) - L(u, v) \circ L(x, y)$ である. 以下では Jordan 三項系を JTS と略記することにする. JTS $(V, \{ \})$ に対して,

$$\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{R}, \quad \beta(x, y) := \text{Tr}(L(x, y))$$

により定義される双一次形式 β をトレース形式という. トレース形式が非退化 (resp. 正定値) であるとき, JTS は非退化 (resp. コンパクト) であるという. トレース形式が非退化であれば対称であることがわかる.

$(V, \{ \})$ を非退化 JTS とし, $L := \text{span}_{\mathbb{R}}\{L(x, y) \mid x, y \in V\}$ とする.

$$\mathfrak{g} := V \oplus L \oplus V$$

とし, \mathfrak{g} 上の括弧積を

$$[(x, f, y), (u, g, v)] := (f(u) - g(x), [f, g] - (1/2)L(x, v) + (1/2)L(u, y), {}^t g(y) - {}^t f(v))$$

$((x, f, y), (u, g, v) \in \mathfrak{g})$ により定義すると, $(\mathfrak{g}, [\])$ は実半単純 Lie 代数になる. 但し, $f \in L$ に対して ${}^t f$ はトレース形式に関する随伴写像を表す. \mathfrak{g} の対合的自己同型 ρ を

$$\rho(x, f, y) := (y, -{}^t f, x)$$

により定義し, $\mathfrak{h} := \mathfrak{g}^\rho$, $\mathfrak{m} := \mathfrak{g}^{-\rho}$ とする. ここで, V は非退化なので $\text{id}_V \in \mathfrak{m}$ であり, $\nu := (0, -\text{id}_V, 0) \in \mathfrak{m}$ である. H を $\exp \text{ad}_{\mathfrak{m}} \mathfrak{h}$ により生成される $GL(\mathfrak{m})$ の連結部分 Lie 群とする. このとき, H 軌道 $H(\nu) \subset \mathfrak{m}$ を非退化 JTS $(V, \{ \})$ に付随した擬 Riemann 対称 R 空間という. 等質空間として $H(\nu) = H/C_H(\nu)$ であり, 右辺は対称空間である. $(V, \{ \})$ がコンパクトのとき, $H(\nu)$ はコンパクトであり, このとき, $H(\nu)$ を対称 R 空間という.

3 Para 実形

定義 3.1 (cf. [7]). Para-Hermite 対称空間の対合的反 para 正則等長変換の固定点集合の連結成分を **para 実形** という.

注意 3.1. G/L を para-Hermite 対称空間, R を G/L の para 実形とする. このとき, 原点 o を含む G/L の para 実形 R_o と, G/L の para 正則等長変換 Φ が存在して, $\Phi(R) = R_o$ となる.

擬 Riemann 対称 R 空間と para 実形の関係について, 次が成り立つ.

命題 3.1 (cf. [5]). 非退化 JTS に付随した擬 Riemann 対称 R 空間は, ある双曲軌道型効果的半単純 para-Hermite 対称空間の原点を含む para 実形として実現でき, その逆も成り立つ.

$(G/L, \sigma, I, g)$ を双曲軌道型効果的半単純 para-Hermite 対称空間, \mathfrak{g} を G の Lie 代数, $Z \in \mathfrak{g}$ を G/L の特性元とする. $\mathfrak{g} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{u}$ を σ に関する \mathfrak{g} の (± 1) 固有空間分解とする. R を G/L の para 実形で原点 o を含むものとする. R は G/L の閉連結完備全測地的 Lagrange 部分多様体で, その誘導計

量は非退化であることがわかる. このとき G/L の対合的反 para 正則等長変換 Ξ で $\Xi(o) = o$ かつ, R が $(G/L)^\Xi$ の o を含む連結成分と一致するものが唯一つ存在する. このとき, 次をみたま G の対合的自己同型 ξ が一意に存在する:

$$\xi \circ \sigma = \sigma \circ \xi, \quad \xi(L) = L, \quad \Xi \circ \pi = \pi \circ \xi.$$

但し, $\pi: G \rightarrow G/L$ は自然な射影を表す. $H := (G^\xi)_0$ とおくと, R は対称空間 $(H/(H \cap L), \sigma|_H)$ と一致することがわかる. ここで, $H \cap L = C_H(Z)$ であり, R は $\text{Ad } H(Z)$ と同一視できる. Ξ は反 para 正則で, $(d\Xi)_o = \xi|_u$, G/L は効果的半単純なので,

$$\xi(Z) = -Z$$

が成り立つ (cf. 補題 2.1). この \mathfrak{g} の対合的自己同型 ξ を $I(R)$ で表す.

補題 3.1 (cf. [6]). (1) R がコンパクトになる必要十分条件は, $I(R)$ が \mathfrak{g} の Cartan 対合になることである.

(2) R_1, R_2 を G/L の o を含むコンパクト para 実形とすると, G/L のある para 正則等長変換 Φ が存在して, $\Phi(R_1) = R_2$.

Q を G/L のコンパクト para 実形で o を含むもの, Θ を Q を定義する G/L の対合的反 para 正則等長変換, $\theta := I(Q)$ とする. θ は σ と可換なので, s_o と Θ は可換である. また, s_o は対合的反 para 正則等長変換なので, $\Theta^d := \Theta \circ s_o$ は G/L の対合的反 para 正則等長変換で, $\Theta^d(o) = o$ となる. そこで, Q^* を $(G/L)^{\Theta^d}$ の o を含む連結成分とする (i.e., Q^* は Θ^d により定義される o を含む para 実形である).

補題 3.2 (cf. [6]). (1) Q はあるコンパクト型 Hermite 対称空間の実形として実現できる. 即ち, Q は対称 R 空間である.

(2) Q^* は Q の非コンパクト双対とみなせる.

これより, 対称 R 空間の非コンパクト双対も擬 Riemann 対称 R 空間であることがわかる.

注意 3.2. G/L は Q の余接束と微分同型である (cf. [2]).

4 主結果

4.1 双曲軌道型半単純 para-Hermite 対称空間の対蹠集合

まず, 双曲軌道型効果的半単純 para-Hermite 対称空間の対蹠集合についての結果を述べる.

定理 4.1 (cf. [6]). G/L を双曲軌道型効果的半単純 para-Hermite 対称空間, $S \subset G/L$ を対蹠集合とする. また, G/L の para-Hermite 計量 g は G の Lie 代数 \mathfrak{g} の Killing 形式 $B_{\mathfrak{g}}$ から誘導されているとする. 即ち, $g_o = \lambda B_{\mathfrak{g}}$ ($\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$). このとき, あるコンパクト para 実形 $R \subset G/L$ が存在して, $S \subset R$.

コンパクト para 実形はコンパクト連結 Riemann 対称空間なので, 次が成り立つ.

系 4.1 (cf. [6]). G/L を双曲軌道型効果的半単純 para-Hermite 対称空間, R を G/L のコンパクト para 実形とする. このとき,

$$\#_2 G/L = \#_2 R < \infty.$$

但し, $M := G/L$ or R に対して, $\#_2 M$ は M の対蹠集合たちの濃度の上限を表し, これを M の **2-number** という.

定義 4.1. G/L を双曲軌道型効果的半単純 para-Hermite 対称空間, $S \subset G/L$ を対蹠集合とする. $\#S = \#_2 G/L$ となるとき, S を大対蹠集合という.

定理 4.2 (cf. [6]). G/L を双曲軌道型効果的半単純 para-Hermite 対称空間, \mathfrak{g} を G の Lie 代数, $Z \in G/L$ を G/L の特性元とする. また, G/L を Z を通る $\text{Ad } G$ 軌道 $M := \text{Ad } G(Z)$ と同一視する.

- (1) S を M の大対蹠集合とする. このとき, \mathfrak{g} のある Cartan 対合 θ と $\mathfrak{g}^{-\theta}$ 内の極大可換部分空間 \mathfrak{a} が存在して, $S = M \cap \mathfrak{a}$ となる. 従って S は (G, A) の Weyl 群の軌道である. 但し, $A := \exp \mathfrak{a}$.
- (2) M の対蹠集合はある大対蹠集合に含まれる.
- (3) S_1 と S_2 を M の二つの大対蹠集合とすると, ある para 正則等長変換 $\Phi : M \rightarrow M$ が存在して, $\Phi(S_1) = S_2$.

4.2 擬 Riemann 対称 R 空間の対蹠集合

まず, 双曲軌道型効果的半単純 para-Hermite 対称空間 G/L の para 実形 R について, 次が成り立つ. ここで, $\#_2 R \leq \#_2 G/L$ なので, R に対しても定義 4.1 と同様にして大対蹠集合の概念を定義できる.

定理 4.3 (cf. [6]). G/L を双曲軌道型効果的半単純 para-Hermite 対称空間, \mathfrak{g} を G の Lie 代数, $Z \in G/L$ を G/L の特性元とする. また, R を G/L の原点を含む para 実形とし, $\xi := I(R)$ とする. $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$ を ξ に関する \mathfrak{g} の (± 1) 固有空間分解とする. G/L を Z を通る $\text{Ad } G$ 軌道 $\text{Ad } G(Z)$ と同一視し, R を Z を通る $\text{Ad } H$ 軌道 $\text{Ad } H(Z)$ と同一視する. 但し, H はその Lie 代数が \mathfrak{h} であるような G の連結部分 Lie 群である.

- (1) S を R の大対蹠集合とする. このとき, \mathfrak{g} のある Cartan 対合 θ で $\xi \circ \theta = \theta \circ \xi$ なるものと, $\mathfrak{g}^{-\theta} \cap \mathfrak{m}$ 内の極大可換部分空間 \mathfrak{a} が存在して, $S = R \cap \mathfrak{a}$ となる. 従って S は $(H^{\mathfrak{a}}, A)$ の Weyl 群の軌道である. 但し, $H^{\mathfrak{a}}$ はその Lie 代数が $(\mathfrak{g}^{\theta} \cap \mathfrak{h}) \oplus (\mathfrak{g}^{-\theta} \cap \mathfrak{m})$ であるような G の連結部分 Lie 群で, $A := \exp \mathfrak{a}$.
- (2) R の対蹠集合はある大対蹠集合に含まれる.
- (3) S_1 と S_2 を R の二つの大対蹠集合とすると, ある等長変換 $\Phi : R \rightarrow R$ が存在して, $\Phi(S_1) = S_2$.

命題 3.1 と定理 4.3 より, 次が成り立つ.

系 4.2 (cf. [6]). N を非退化 JTS に付随した擬 Riemann 対称 R 空間とする.

- (1) $\#_2 N < \infty$.
- (2) N の対蹠集合はある大対蹠集合に含まれる.
- (3) S_1 と S_2 を N の二つの大対蹠集合とすると, ある等長変換 $\Phi : N \rightarrow N$ が存在して, $\Phi(S_1) = S_2$.

また非退化 JTS に付随した擬 Riemann 対称 R 空間の 2-number について次が成り立つ. ここで, 一般に M を対称空間としたとき, 任意の $p \in M$ に対して $\{p\}$ は M の対蹠集合になることに注意しておく.

命題 4.1 (cf. [6]). N を非退化 JTS に付随した擬 Riemann 対称 R 空間とする. $\#_2 N \geq 2$ となるための必要十分条件は N がある対称 R 空間の非コンパクト双対と同型でないことである.

参考文献

- [1] B.-Y. Chen and T. Nagano, A Riemannian geometric invariant and its applications to a problem of Borel and Serre, *Trans. Amer. Math.* **308** (1988), 273–297.
- [2] S. Kaneyuki and M. Kozai, Paracomplex structures and affine symmetric spaces, *Tokyo J. Math.* **8** (1985), 81–98.
- [3] H. Naitoh, Pseudo-Riemannian symmetric R -spaces, *Osaka J. Math.* **21** (1984), 733–764.
- [4] K. Nomizu, Invariant affine connections on homogeneous spaces, *Amer. J. Math.* **76** (1954), 33–65.
- [5] K. Sugimoto, Para-real forms of para-Hermitian symmetric spaces and real forms of pseudo-Hermitian symmetric spaces, *Hiroshima Math. J.* **53** (2023), 143–170.
- [6] K. Sugimoto, Antipodal sets of pseudo-Riemannian symmetric R -spaces, to appear in *Differential Geom. Appl.*
- [7] K. Sugimoto and T. Shimokawa, Classification of para-real forms of absolutely simple para-Hermitian symmetric spaces, *Osaka J. Math.* **59** (2022), 559–590.
- [8] M. Takeuchi, Two-number of symmetric R -spaces, *Nagoya Math. J.* **115** (1989), 43–46.
- [9] M. S. Tanaka and H. Tasaki, The intersection of two real forms in Hermitian symmetric spaces of compact type, *J. Math. Soc. Japan* **64** (2012), 1297–1332.
- [10] M. S. Tanaka and H. Tasaki, Antipodal sets of symmetric R -spaces, *Osaka J. Math.* **50** (2013), 161–169.