交差モジュールを用いた境界付き多様体の不変量

東北大学　大学院理学研究科　数学専攻
周 星陽 (Seiyo SHU) *

概要

Crossed module と呼ばれる 2 つの異なる群 H, G を用いて定義されるものを用いて閉 3 次元多様体の位相不変量を与えられることが知られている。この構成方法は、与えられた多様体に対して、その単体分割を考え、その 1-単体と 2-単体それぞれに Crossed module 内の異なる 2 つの群を色付けし、その数を数えることで構成する。今回は、この位相不変量が閉 3 次元多様体だけではなく、コンパクトな境界付き 3 次元多様体の位相不変量になっていることを証明した。そして、それを用いて、いくつかの基本的なコンパクトな境界付き 3 次元多様体についてと 4_1 結び目、トーラス $(5, 2)$ 型結び目、そして、5_2 結び目についての結び目の補空間に対して、適用した結果を紹介する。

1　導入

まず最初に、今回不変量を構成するときに使う Crossed module の概念を説明する。その前に、まず左作用の定義をする。左作用は次のようなものである。

定義 1. (左作用)

G と H を群とする。このとき、G の H への左作用 (left action) とは、写像 $\triangleright\colon G \times H \to H$ で、以下を満たすものである。

1. 任意の G の元 g と H の単位元 1_H に対して、$1_H \triangleright g = g$ を満たす。
2. 任意の G の元 g_1,g_2 と H の任意の元 h に対して、
$$(g_2 \triangleright (g_1 \triangleright h)) = (g_2 \cdot g_1) \triangleright h$$
を満たす。
3. 任意の G の元 g と H の任意の元 h_1, h_2 に対して、
$$g \triangleright (h_1 \cdot h_2) = (g \triangleright h_1) \cdot (g \triangleright h_2)$$
を満たす。

Crossed module は、2 つの群 H, G とその間の準同型写像 $\partial : H \to G$ と G の H への左作用と G の G への左作用により構成されるものである。定義は次のとおりである。

* E-mail:seiyo.shu.r7@dc.tohoku.ac.jp

定義 2. (Crossed module)

G と H を群とし、∂ を準同型写像 $\partial : H \to G$ とする。このとき 2 つの左作用をどちらも $\triangleright$ と書くとき、$(H \xrightarrow{\partial} G, \triangleright)$ が Crossed module であるとは、以下の性質を満たすときを言う。

1. $\forall g_1, g_2 \in G$ に対して、
$$g_1 \triangleright g_2 = g_1 g_2 g_1^{-1}$$
を満たす。
2. $\forall g \in G, \forall h \in H$ に対して、
$$\partial(g \triangleright h) = g\partial(h)g^{-1}$$
3. 写像 $f_g : H \to H$ を $h \in H$ に対して、$f_g(h) := g \triangleright h$ と定めたとき、$\forall g \in G$ に対して、写像 f_g は群同型写像である。

実際の Crossed module の例を一つ上げておく。

例 3. H を有限群とし、$G = \mathrm{Aut}(H) := \{f : H \to H | f$ は群同型写像 $\}$ とする。このとき左作用と $\partial : H \to G$ は次のように定める。まず、$\forall g_1, g_2 \in G$ に対して、$g_1 \triangleright g_2 := g_1 g_2 g_1^{-1}$ とする。そして、$\forall g \in G, \forall h \in H$ に対して、$g \triangleright h := g(h)$ と定め、写像 ∂ を $\forall h, h' \in H$ に対して、$\partial(h')(h) := h'hh'^{-1}$ と定めればよい。このように定めたとき、定義 2 の性質 (1) と (3) を満たすことは、明らかである。性質 (2) を満たすことは以下の計算よりわかる。$g, x \in G, h \in H$ として、

$$\partial(g \triangleright h)(x) = g(h)xg(h)^{-1} \tag{1}$$

そして、もう一方のほうは、

$$\begin{aligned} g\partial(h)g^{-1}(x) &= g\left(hg^{-1}(x)h^{-1}\right) \\ &= g(h)xg(h)^{-1} \end{aligned} \tag{2}$$

となることから、性質 (2) も満たされることがわかった。

次に単体分割の定義と、Pachner move を説明する。Pachner move とは、Pachner により導入されたもので、同相な多様体の 2 つの異なる単体分割について、有限回の Pachner move を施すことで、一致させることができる。

定義 4. (単体分割)

X を位相空間とする。このとき、X の単体分割とは、単体複体 K と同相写像 $h : |K| \to X$ との組 (K, h) のことを言う。

本当は、同相写像もセットで定義するが今回では、同相写像については、明らかな場合が多いため、省略して書くことにする。

定義 5. (Pachner move)

3 次元の Pachner move は、次の図 1,2 の変換についてで、それぞれ (1-4)move と (2-3)move と呼ばれている。

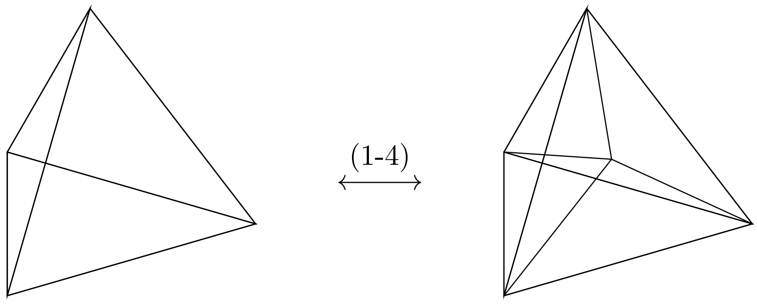


図 1　(1-4)move

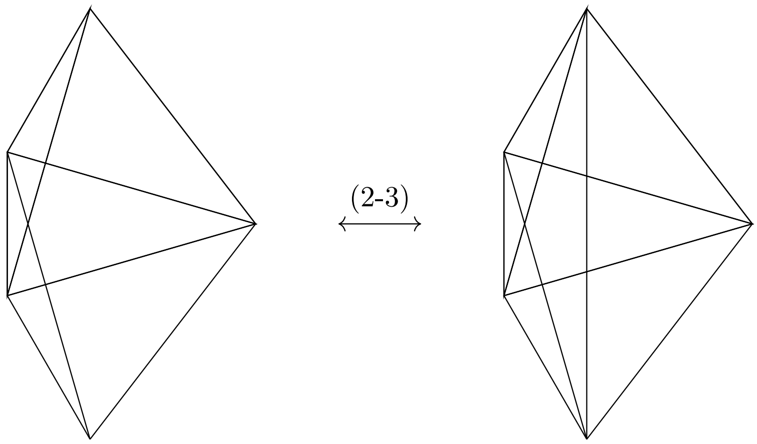


図 2　(2-3)move

2　主定理

今回は、Crossed module を使った位相不変量が、コンパクトな境界付き多様体についても、成り立つことを新たに発見した。閉 3 次元多様体についての証明であれば、[4] などがある。

定理 6. (主定理) M をコンパクトな境界付き 3 次元多様体、そして、K を $M \cong |K|$ となるような単体的複体とする。$(H \overset{\partial}{\to} G, \triangleright)$ を Crossed module で、ただし、H と G はどちらも有限群とする。このとき、K の 0-単体に任意に、全順序を定めると、式 (6) は M について、不変量になる。

$$\begin{aligned} Z(M) =& |G|^{-|K_0|+|K_1|-|K_2|}|H|^{|K_0|-|K_1|+|K_2|-|K_3|} \\ & \times \left(\prod_{(jk)\in K_1} \frac{1}{|G|} \sum_{g_{jk}\in G} \right) \left(\prod_{(jkl)\in K_2} \frac{1}{|H|} \sum_{h_{jkl}\in H} \right) \\ & \times \left(\prod_{(jkl)\in K_2} \delta_G(g_{jkl}) \right) \left(\prod_{(jklm)\in K_3} \delta_H(h_{jklm}) \right) \end{aligned} \tag{3}$$

だたし、K_i は i-単体すべてを集めた集合を表し、そして 2-単体 $(jk) \in K_2$ と 3-単体 $(jkl) \in K_3$

について、0-単体の順序について $j<k<l$ となっているものとする。そして、この式の中にある g_{jkl}, h_{jklm} はそれぞれ次を表す。

$$g_{jkl} \coloneqq \partial(h_{jkl}) g_{kl} g_{jk} g_{jl}^{-1} \tag{4}$$

$$h_{jklm} \coloneqq h_{jlm}(g_{lm} \rhd h_{jkl}) h_{klm}^{-1} h_{jkm}^{-1} \tag{5}$$

そして、δ_X は次のような関数である。ここで、X は有限群で e_X を X の単位元としている。

$$\delta_X(x) = \begin{cases} |X| & \text{if } x = e_X, \\ 0 & \text{others.} \end{cases} \tag{6}$$

まずこの定理について、g_{jkl}, h_{jklm} についての幾何学的な意味を説明した後に、証明の概要を説明する。まず g_{jkl} については、図 3 の 2-単体のようになる。わかりやすために、頂点をそれぞれ 1,2,3 とラベルした。2-単体について、0-単体から誘導される向きについて、1-単体が巡回になっていない。

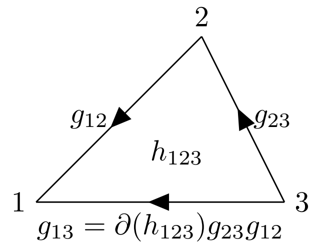


図 3　g_{123} の意味

そのため、他と違う 1-単体についてのラベルが他の 2 つの 1-単体と 2-単体のラベルから誘導される。

3-単体についてのカラーは次のような意味がある。図 4 について、g_{14} を g_{12}, g_{23}, g_{34} を用いて表すことを考える。このとき、図を見てわかるように作り方には 2 通りの方法がある。まず、一つ目は

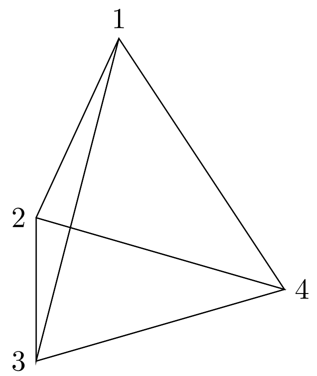
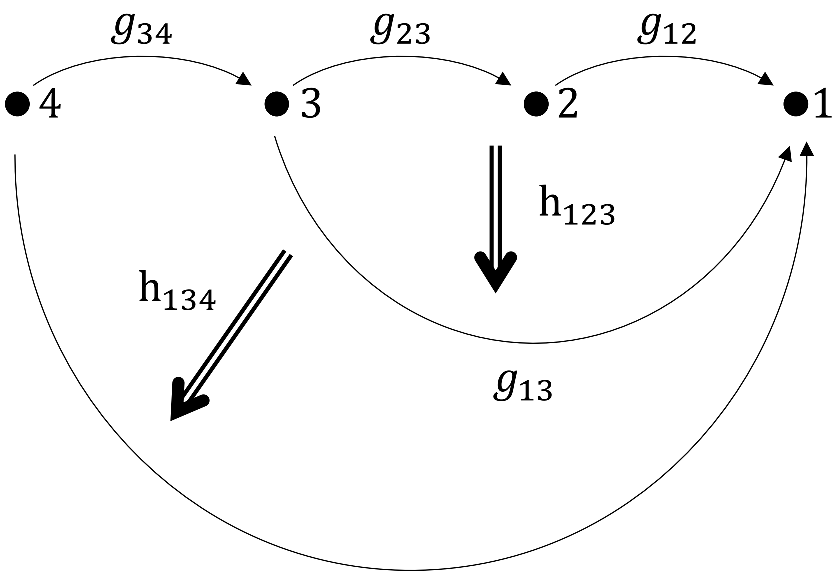


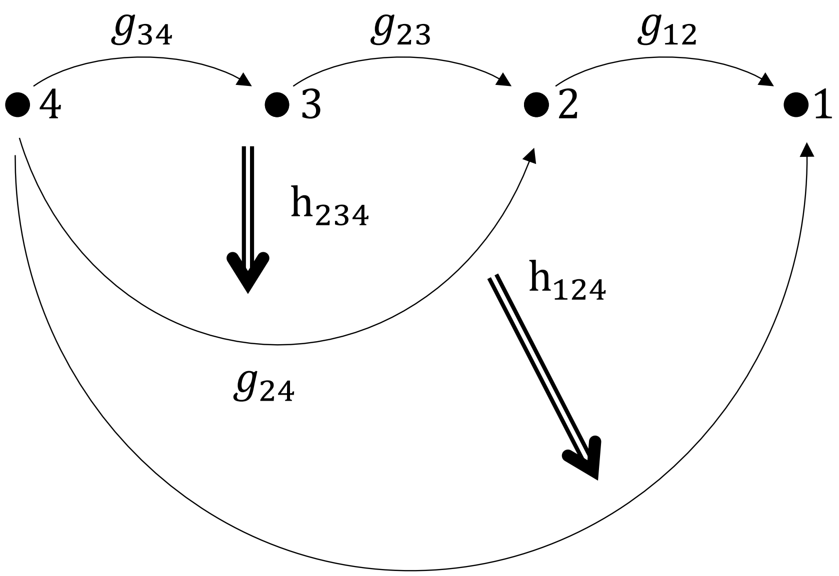
図 4　h_{1234} の意味

2-単体 $|123|$ についてまず最初に考え、g_{13} を出し、その後、2-単体 $|134|$ について考え、g_{14} を出す方法である。２つ目の方法は、2-単体 $|234|$ についてまず考え、それにより、g_{24} を出し、その後、2-単体 $|124|$ について考え、g_{14} を出す方法である。一つ目の方法は図 5 のようになる。そして二つ目



$$g_{14} = \partial(h_{134})\partial(g_{34} \rhd h_{123})g_{34}g_{23}g_{12}$$

図 5　2-単体 |123|,|134| を用いる方法



$$g_{14} = \partial(h_{124})\partial(h_{234})g_{34}g_{23}g_{12}$$

図 6　2-単体 |234|,|124| を用いる方法

の方法は図 6 のようになる。これらを見るとどちらも g_{14} であるためこの二つは等しくならないといけない。このとき、この 2 つが等しいことと以下が同値である。

$$\partial\left(h_{134}(g_{34} \triangleright h_{123})\right) = \partial(h_{124}h_{234}) \tag{7}$$

式 (5) が単位元と等しいとき、この式 (7) が成り立つため、3-単体に対して、すべての 2-単体のカラーがうまく定義されるために要求される性質である。

証明の概要. まず、この定理の証明は、0-単体の全順序関係の取り方によらないことと、コンパクトな境界付き多様体の単体分割によらないことを示せばよい。0-単体の全順序関係の取り方によらないことは、任意の 2 つの 0-単体について、順序をひっくり返しても、式 (3) が一致することを示せばよい。多様体の単体分割によらないことは、閉 3 次元多様体の場合と同様に図 1,2 について、式 (3) が不変であること、そして、閉 3 次元多様体のときと違うのは次の図 7,8 でも、式 (3) が不変であることを示したことにある。この図 7,8 により、内部の分割だけではなく、境界の分割にも依存しないことが示せる。ただし、図 7,8 の変換はどちらも、底面が多様体の境界の場合にのみ行える移動である。

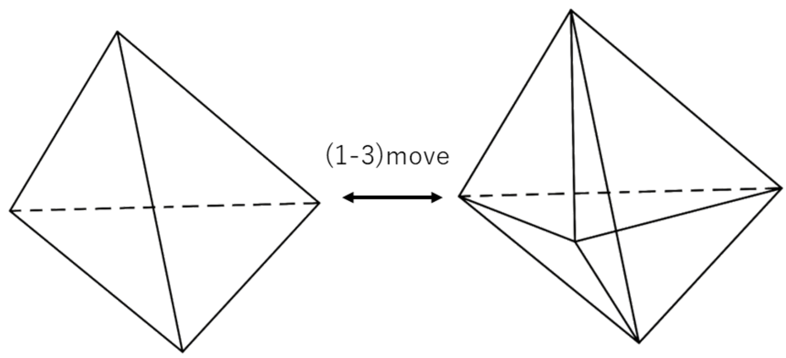


図 7　(1-3)move

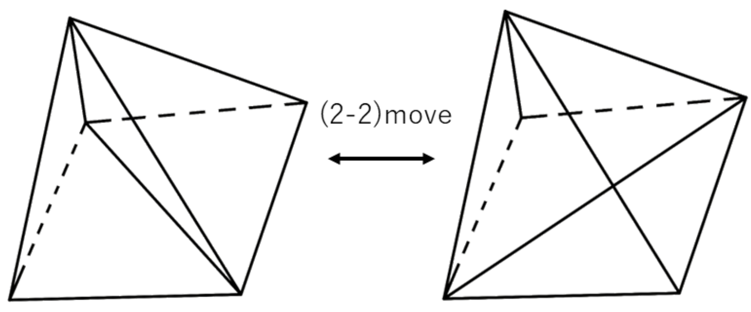


図 8　(2-2)move

必ず、境界の変換を施したい部分が図のように cone になっているとは、限らないが、cone になっていない場合でも、Pachner move を施すことで、cone にすることができることを示せる。そのため、上の 2 つの動きを境界付近で考えることで、どんな境界の分割についても、一致させることができる。証明の残りの部分は、計算により、これを示すことなので、詳細は書かないことにする。

□

式 (3) が境界付き 3 次元多様体について、位相不変量になっていることを示せたため、この結果を用いて、いくつかの具体例を、計算した。そのためその結果を、下に挙げておく。

3　計算結果

計算の際には、一般的な Crossed module の形で行った。下に表 3 に計算結果の一覧を載せておく。

表 1　計算結果の一覧

対象	計算結果
D^3	$\frac{1}{\lvert G\rvert}\lvert H\rvert$
$D^2 \times S^1$	1
$S^2 \times [0,1]$	$\frac{1}{\lvert G\rvert^2}\sum_{h,h'\in H}\delta_G(\partial(hh'^{-1}))$
$S^3 - 4_1$	$\frac{1}{\lvert G\rvert}\frac{1}{\lvert H\rvert}\sum_{h,h'\in H}\delta_G(XY^{-1}X^{-1}YX^{-1}Y^{-1}XYX^{-1}Y\partial(A^{-1}))$
$S^3 - T(5,2)$	$\frac{1}{\lvert G\rvert^2}\frac{1}{\lvert H\rvert}\sum_{X,Y\in G,A\in H}\delta_G(YX^4YX^{-1}\partial(A^{-1}))$
$S^3 - 5_2$	$\frac{1}{\lvert G\rvert}\frac{1}{\lvert H\rvert}\sum_{h,h'\in H}\delta_G(XY^{-1}X^{-1}YXY^{-1}X^{-1}YX^{-1}Y^{-1}XYX^{-1}Y^{-1}\partial(A^{-1}))$

ただし、$D^3, D^2 \times S^1, S^2 \times [0,1]$ のイメージは、図 9 である。$4_1, T(5,2), 5_2$ はそれぞれ結び目の名前で、図 10 の結び目をそれぞれ表している。

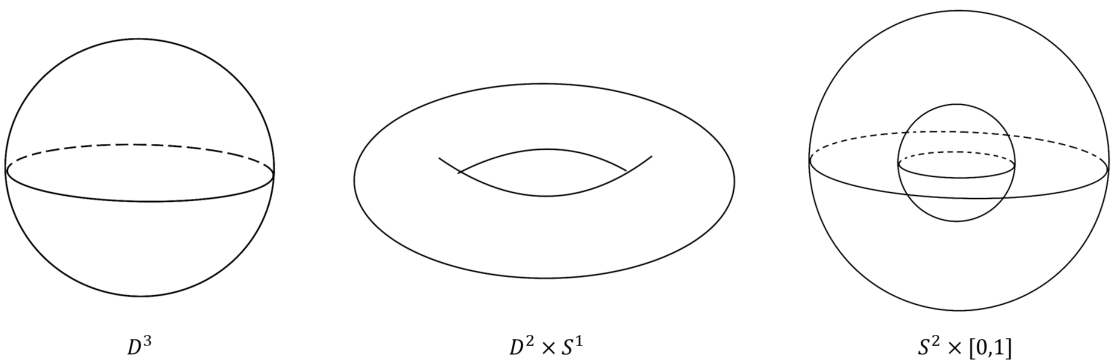


図 9　図のイメージ

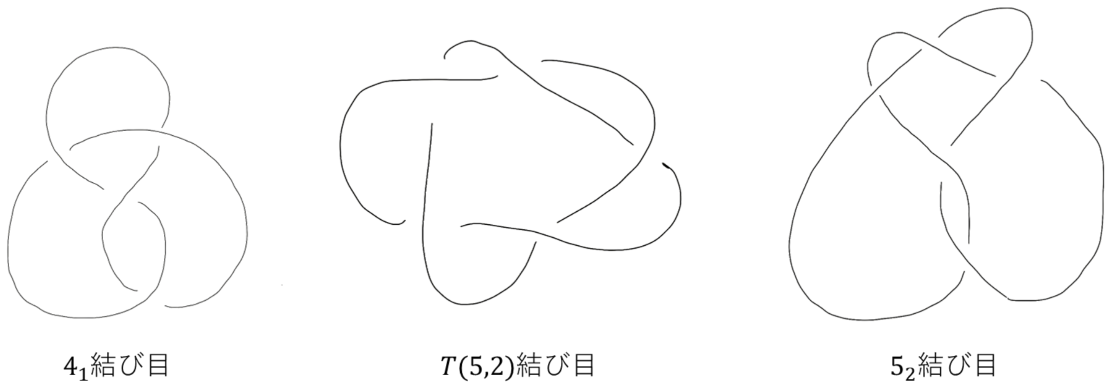


図 10　結び目の名前

参考文献

[1] J.W. Barrett and B.W. Westbury, *Invariants of piecewise-linear 3-manifolds*, Trans. A.M.S. **348** (1996), 3997-4022.

[2] Tijana Radenkovic' and Marko Vojinovic', *Topological invariant of 4-manifolds based on a 3-group*, Journal of High Energy Physics **105 (2022)** (2022), DOI https://doi.org/10.1007/JHEP07(2022)105.

[3] J.H.C.Whitehead, *Combinatorial homotopy.2*, In:Bull.Amer.Math.Soc **55** (1949), 453-496.

[4] F.Girelli, H.Pfeiffer, and E.M.Popescu, *Topological Higher Gauge Theory-from BF to BF CG theory*, J. Math. Phys **49** (2008).

[5] J. R. Munkres, *Elementary Differential Topology*, Annals of Mathematics Studies 54, Princeton University Press, 1967.

[6] M.Wakui, 再考*"On Dijkgraaf-Witten invariants of 3-manifolds"* (20011).

[7] V.G. Turaev and O.Y. Viro, *State sum invariants of 3-manifolds and quantum 6j-symbols*, Topology **31** (1992), 865-902.

[8] U. Pachner, *Bistellare Aquivalenz kombinatorischer Mannigfaltingkeiten*, (German) Arch. Math. **(Basel) 30** (1978), 89-98.

[9] ———, *P.L. homeomorphic manifolds are equivalent by elementary shellings*, Europ. J. Comb. **12** (1991), 129-145.

[10] Behrang Noohi, "*Notes on 2-groupoids, 2-groups and crossed modules*", In: Homology, Homotopy **Appl. 9.1** (2007), 75-106.

[11] T. Porter, "*Topological quantum field theories from homotopy n-types*", J. London Math. Soc. (2) 58 **No.3** (1998), 723-732.

[12] J.W. Alexander, "*The combinatorial theory of complexes*", Ann. of. Math **31** (1930), 292-320.

[13] Edwin E. Moise, "*Geometric Topology in Dimensions 2 and 3*", GTM, vol. 47, Springer New York, 1977.