球面の二重調和部分多様体について

東京理科大学大学院　創域理工学研究科　数理科学専攻
清水豪 (Takeru SHIMIZU) *

概要

部分多様体論における極小部分多様体の一つの一般化として, 1980 年代から二重調和部分多様体の研究が広がった. その最初の例の一つとして, G. Y. Jiang によって構成された単位球面 $S^n(1)$ 内の Clifford torus が知られている. 本稿では, 先行研究によって構成された Clifford torus に派生した単位球面 $S^n(1)$ 内の二重調和部分多様体の具体例と, それらの幾何学的性質に関して得られた研究結果を紹介する.

1　導入

二つの Riemann 多様体の間の写像の重要な研究対象の一つとして, 調和写像という概念がある. 1983 年, J. Eells-L. Lemaire [2] はこの調和写像の一般化として, 二重調和写像の概念を導入した. その後, 1986 年に G. Y. Jiang [1] によって二重調和写像に関する第一変分, 第二変分公式が研究されたことで, 二重調和写像の具体的な例の構成や分類などの研究が広く行われるようになった. しかしながら二重調和写像はその定義から, 具体例を構成することが容易ではなく, 先行研究で構成された例のほとんどの場合は等長はめ込み, かつ後に紹介する「平行な平均曲率ベクトル場をもつ」という性質を仮定した上で構成されている. まず本節では, 二重調和部分多様体の定義とその具体例の構成に重要な諸定理を紹介する. 本稿では, C^∞ 級多様体 M に対して $\mathfrak{X}(M)$ を M 上の C^∞ 級ベクトル場全体, $S^k(r)$ を Euclid 空間 $\mathbb{R}^{k+1}$ 内の原点を中心とした半径 r の超球面とする.

以下本節では, 次の設定を用いる.

- $(M, g), (N, h)$ を Riemann 多様体, $m = \dim M,\ n = \dim N,\ m \leq n$ とする.
- $f : M \to N$ を等長埋め込みとする.
- $\mathfrak{N}(M)$ を M に沿う N 内の C^∞ 級法ベクトル場全体とする.

定義 1. $\{e_k\}_{k=1}^m$ を M の局所正規直交標構場, $B(f)$ を f の第二基本形式, ∇ を (M, g) の Levi-Civita 接続, $\overline{\nabla}$ を f による M 上の誘導接続, R^N を N の Levi-Civita 接続に関する曲率テンソル場

* E-mail:6122525@ed.tus.ac.jp

とする．

$$\tau(f) \coloneqq \sum_{k=1}^{m} B(f)(e_k, e_k),$$
$$\tau_2(f) \coloneqq -\sum_{k=1}^{m}\left(\overline{\nabla}_{e_k}\overline{\nabla}_{e_k}\tau(f) - \overline{\nabla}_{\nabla_{e_k}e_k}\tau(f)\right) + \sum_{k=1}^{m} R^N(df(e_k), \tau(f))df(e_k) \tag{1}$$

によって定義される M に沿う N 上のベクトル場 $\tau(f), \tau_2(f)$ をそれぞれ, テンション場, 二重テンション場という．また, $\tau(f), \tau_2(f)$ がそれぞれ恒等的に 0 になるとき, M を N の極小部分多様体（または調和部分多様体）, 二重調和部分多様体という．

注意 2. 式 (1) から明らかに, M が極小部分多様体ならば, 二重調和部分多様体である．しかし, この逆は一般には成り立たないことが知られている．そのような, 極小でない二重調和部分多様体のことを proper な二重調和部分多様体という．

定義 3. $\overline{\nabla}^{\perp}$ を M の法接続, H を M の平均曲率ベクトル場, すなわち,

$$H \coloneqq \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} B(f)(e_k, e_k) = \frac{1}{m}\tau(f)$$

とする．任意の $X \in \mathfrak{X}(M)$ に対して,

$$\overline{\nabla}^{\perp}_X H = 0$$

を満たすとき, M は平行な平均曲率ベクトル場をもつという．

定理 4. [6, Theorem 3.2.] M が平行な平均曲率ベクトル場をもつとき, M が N の二重調和部分多様体となるための必要十分条件は,

$$\sum_{k=1}^{m} R^N(\tau(f), df(e_k))df(e_k) = \sum_{i,j=1}^{m} h(\tau(f), B(f)(e_i, e_j))B(f)(e_i, e_j)$$

を満たすことである．

系 5. 定理 4 の仮定のもとでさらに $N = S^n(1)$ のとき, M が N の二重調和部分多様体となるための必要十分条件は,

$$m\tau(f) = \sum_{i,j=1}^{m} h(\tau(f), B(f)(e_i, e_j))B(f)(e_i, e_j)$$

を満たすことである．

定義 6. ∇, A をそれぞれ (M, g) の Levi-Civita 接続, 形作用素とする．任意の $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ に対して,

$$(\nabla A_\xi)(X, Y) \coloneqq \nabla_X A_\xi(Y) - A_\xi(\nabla_X Y) - A_{\overline{\nabla}^{\perp}_X \xi}(Y)$$

によって, $\xi \in \mathfrak{N}(M)$ 方向の形作用素 A_ξ の共変微分を定義する．$\nabla A_\xi = 0$ のとき, 形作用素 A_ξ は平行であるという．

2　球面の二重調和部分多様体の例

本節では, 過去の研究で構成された, 球面内の平行な平均曲率ベクトル場をもつ二重調和部分多様体の例を紹介する.

例 1. [1, Example 4.1.]

$$S^{n_1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\times S^{n_2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\quad (n_1+n_2=n-1\ ,n_1\neq n_2)$$

は, $S^n(1)$ の proper な二重調和部分多様体である．これは Clifford torus と呼ばれる.

球面内の平行な平均曲率ベクトル場をもつ proper な二重調和部分多様体で, 特に余次元が 1 のものはこの Clifford torus と, n_1 または n_2 のどちらか一方が 0 の場合に得られる半径 $1/\sqrt{2}$ の超球面 $S^{n-1}\left(1/\sqrt{2}\right)$ の 2 通りの例しか見つかっていない．ここからは先行研究によって見つけられた余次元が 2 以上のものを紹介する.

定理 7. [3, Theorem 18.]

$$\mathfrak{T}\coloneqq S^{n_1}(c_1)\times\cdots\times S^{n_r}(c_r)\subset S^{n+r-1}(1)\quad \left(2\geq r,\sum_{k=1}^{r}n_k=n,\sum_{k=1}^{r}{c_k}^2=1\right)$$

とする.

1. $\mathfrak{T}$ が $S^{n+r-1}(1)$ の極小部分多様体となるための必要十分条件は, 全ての $1\leq k\leq r$ に対して,

$$\frac{{c_k}^2}{n_k}=\frac{1}{m} \tag{2}$$

を満たすことである.

2. $\mathfrak{T}$ が $S^{n+r-1}(1)$ の proper な二重調和部分多様体となるための必要十分条件は, ある $1\leq p\leq r-1$ が存在して, 以下の 2 条件を満たすことである.

$$\frac{{c_1}^2}{n_1}=\cdots=\frac{{c_p}^2}{n_p}=\frac{1}{2(n_1+\cdots+n_p)}\neq\frac{1}{m}\ , \tag{3}$$

$$\frac{{c_{p+1}}^2}{n_{p+1}}=\cdots=\frac{{c_r}^2}{n_r}=\frac{1}{2(n_{p+1}+\cdots+n_r)}\neq\frac{1}{m}. \tag{4}$$

注意 8. [3, Remark 19.] 式 (2), (3), (4) から, $\mathfrak{T}$ が $S^{n+r-1}(1)$ の proper な二重調和部分多様体であるとき, $S^{n_1}(c_1)\times\cdots\times S^{n_p}(c_p)$ は $S^{(n_1+\cdots+n_p+p-1)}\left(1/\sqrt{2}\right)$ の極小部分多様体, $S^{n_{p+1}}(c_{p+1})\times\cdots\times S^{n_r}(c_r)$ は $S^{(n_{p+1}+\cdots+n_r+r-p-1)}\left(1/\sqrt{2}\right)$ の極小部分多様体であることがわかる．すなわち,

$$\mathfrak{T}\subset S^{(n_1+\cdots+n_p+p-1)}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\times S^{(n_{p+1}+\cdots+n_r+r-p-1)}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\subset S^{n+r-1}(1)$$

となる.

例 2. [7] $n \geq 4$ とし, 対称対 $(SU(n), SO(n))$ を考える. $\mathfrak{su}(n) = \mathfrak{so}(n) \oplus \mathfrak{p}$ を $\mathfrak{su}(n)$ の $(SU(n), SO(n))$ に付随した標準分解とする. また, $\mathfrak{su}(n)$ 上には, Killing 形式から自然に定まる内積とノルム $||\cdot||$ が定義されているとする. 任意の $i = 1, \ldots, n-1$ に対して,

$$\tilde{H}_i \coloneqq \frac{1}{n}\left\{(n-i)\sum_{k=1}^{i} E_k^k - i\sum_{k=i+1}^{n} E_k^k\right\}, \quad H_i \coloneqq \frac{\tilde{H}_i}{||\tilde{H}_i||}$$

とおく. ただし, E_k^k は第 (k,k) 成分が 1, それ以外が 0 であるような $n \times n$ 行列である. $1 \leq i, j \leq n-1$ かつ, $i \neq j$, $(n-j)$ とするとき, $\mathfrak{p}$ における線形イソトロピー表現の二つの軌道 $\mathrm{Ad}(SO(n))\left(H_i/\sqrt{2}\right)$ と $\mathrm{Ad}(SO(n))\left(H_j/\sqrt{2}\right)$ の直積空間,

$$\left(\mathrm{Ad}(SO(n))\frac{H_i}{\sqrt{2}}\right) \times \left(\mathrm{Ad}(SO(n))\frac{H_j}{\sqrt{2}}\right) \subset S^{n(n+1)-3}(1)$$

は proper な二重調和部分多様体である.

これらの例は全て, 半径 $1/\sqrt{2}$ の超球面の極小部分多様体二つの直積の形で表されていることがわかる.

3 主結果と今後の展望について

本研究の目標は, 球面 $S^n(1)$ 内の平行な平均曲率ベクトル場をもつ proper な二重調和部分多様体の分類を与えることである. A. Balmus, S. Montaldo, C. Oniciuc によって, 球面 $S^n(1)$ 内の平行な平均曲率ベクトル場をもつ proper な二重調和部分多様体の部分的な分類が次のように与えられている.

定理 9. [4, 5] M を $S^n(1)$ の連結かつ平行な平均曲率ベクトル場を持つ proper な二重調和部分多様体とし, H をその平均曲率ベクトル場とする. $m = \dim M \geq 2$, $n - m \geq 2$ とする. このとき, $|H| \in (0, \frac{m-2}{m}] \cup \{1\}$ である. 特に, $m = 2$ のときは, $|H| = 1$, $m \in \{3, 4\}$ のときは, $|H| \in \{\frac{m-2}{m}, 1\}$ である. 加えて, 次が成り立つ.

(Case 1) $m \geq 2, |H| = 1$ の場合: M は $S^{n-1}\left(1/\sqrt{2}\right) \subset S^n(1)$ の極小部分多様体である.

(Case 2) $m \geq 3, |H| = \frac{m-2}{m}$ の場合: $S^{n-2}\left(1/\sqrt{2}\right)$ のある $m-1$ 次元極小部分多様体 $\widetilde{M}$ が存在して, M は $\widetilde{M} \times S^1\left(1/\sqrt{2}\right)$ の開集合である.

(Case 3) $m \geq 5, |H| \in \left(0, \frac{m-2}{m}\right)$ かつ, $\nabla A_H = 0$ の場合: $|H| = |m_1 - m_2|/m$ で, M の各点 x に対して, x の近傍 U と $S^{n_i}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ の m_i 次元極小部分多様体 M_i , $(i = 1, 2)$ が存在して,

$$U = M_1 \times M_2 \subset S^{n_1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \times S^{n_2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \subset S^n(1)$$

が成り立つ. ここで, $m_i \geq 2$, $m_1 \neq m_2$, $m_1 + m_2 = m$, $n_1 + n_2 = n - 1$ である.

この定理 9 において, $|H|$ が $1, (m-2)/m$ または (Case 3) の場合以外については言及されていないことに注意しておく. 特に筆者が調べた範囲では, 定理 9 の場合以外の例が現状見つかっていないようである. そのため, この定理でカバーされていない球面 $S^n(1)$ 内の平行な平均曲率ベクトル場を

もつ proper な二重調和部分多様体の具体例を構成することを考えたい．そこで, 定理 9 の (Case 3) における, $\nabla A_H = 0$ という条件に着目し, 次の主結果を得た．

定理 10. $M \subset S^n(1)$ を平行な平均曲率ベクトル場をもつ極小でない m 次元部分多様体 $(n-m \geq 2)$ とし, 各点 $p \in M$ に対し, p の近傍 $U \subset M$ と, $S^{n_i}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ の m_i 次元極小部分多様体 M_i $(i=1,2)$ が存在して,

$$U = M_1 \times M_2 \subset S^{n_1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \times S^{n_2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \subset S^n(1)$$

を満たすと仮定する．ただし, $m_1 + m_2 = m$, $n_1 + n_2 = n-1$ である．このとき部分多様体 M は,

$$\nabla A_H = 0$$

を満たす．ここで H は M の平均曲率ベクトル場である．

定理 10 から定理 9 は次のように書き換えられる．

系 11. M を $S^n(1)$ の連結かつ平行な平均曲率ベクトル場を持つ proper な二重調和部分多様体とし, H をその平均曲率ベクトル場とする． $m = \dim M \geq 2$, $n - m \geq 2$ とする． このとき, $|H| \in (0, \frac{m-2}{m}] \cup \{1\}$ である．特に, $m=2$ のときは, $|H|=1$, $m \in \{3,4\}$ のときは, $|H| \in \{\frac{m-2}{m}, 1\}$ である．加えて, 次が成り立つ．

(Case 1) $m \geq 2, |H| = 1$ の場合: M は $S^{n-1}\left(1/\sqrt{2}\right) \subset S^n(1)$ の極小部分多様体である．
(Case 2) $m \geq 3, |H| = \frac{m-2}{m}$ の場合: $S^{n-2}\left(1/\sqrt{2}\right)$ のある $m-1$ 次元極小部分多様体 $\widetilde{M}$ が存在して, M は $\widetilde{M} \times S^1\left(1/\sqrt{2}\right)$ の開集合である．
(Case 3) $m \geq 5, |H| = |m_1 - m_2|/m$ $(m_i \geq 2$, $m_1 \neq m_2$, $m_1 + m_2 = m)$ の場合: M の各点 x に対して, x の近傍 U と $S^{n_i}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ の m_i 次元極小部分多様体 M_i $(i=1,2)$ が存在して,

$$U = M_1 \times M_2 \subset S^{n_1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \times S^{n_2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \subset S^n(1)$$

が成り立つ．ここで, $n_1 + n_2 = n-1$ である．

定理 10 より, 定理 9（または系 11）の全ての場合について $\nabla A_H = 0$ が成り立つ．これより, 球面 $S^n(1)$ 内の平行な平均曲率ベクトル場をもつ proper な二重調和部分多様体の未知な例を構成する際に $\nabla A_H \neq 0$ という条件は一つの指標になることがわかる．

最後に $\nabla A_H = 0$ の条件の言い換えについても言及しておく．

命題 12. [4, Proposition3.19.] 球面 $S^n(1)$ 内の平行な平均曲率ベクトル場 H をもつ proper な二重調和部分多様体 M について, 次の三つの条件は同値である．

(1) $R^M A_H = 0$ である．
(2) M は各点において, H 方向に最大で 2 つの異なる主曲率を持つ．
(3) M は $\nabla A_H = 0$ を満たす．

ただし, $R^M A_H(X,Y,Z) \coloneqq R^M(X,Y)A_H(Z)$, $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ である．

参考文献

[1] G. Y. Jiang, 2-harmonic maps and their first and second variational formula, Chinese Ann. Math., 7A (1986) 388–402.

[2] J. Eells, L. Lemaire, Selected Topics in Harmonic maps, CBMS, Regional Conference Series in Math., vol. 50, Amer. Math. Soc., 1983.

[3] A. Balmus, S. Montaldo, C. Oniciuc, Classification results and new examples of proper biharmonic submanifolds in spheres, Note Mat., 1 (2008), 49–61.

[4] A. Balmus, C. Oniciuc, Biharmonic submanifolds with parallel mean curvature vector field in spheres, J. Math Anal. Appl., 386 (2012) 619–630.

[5] A. Balmus, S. Montaldo, C. Oniciuc, New results toward the classification of biharmonic submanifolds in $\mathbb{S}^n$, arXiv:1111.6063v2 (2012).

[6] S. Ohno, T. Sakai, H. Urakawa, Biharmonic homogeneous hypersurfaces in compact symmetric spaces, Diff. Geom. App., 43 (2015) 155–179.

[7] S. Ohno, Biharmonic orbits of isotoropy representations of symmetric spaces, Kodai Math J., 42 (2019), 48–63.