Grothendieck 多項式の特殊値と集合値半標準盤の個数について

神戸大学大学院 理学研究科 数学専攻

島崎達史 (Tatsushi SHIMAZAKI) *

概要

集合値半標準盤は，半標準盤の 1 つの一般化であり Grothendieck 多項式を組み合せ論的に表示するため Buch によって導入された．本講演では，Grothendieck 多項式のある特殊値を導出し，その応用として集合値半標準盤の個数が奇数であることを示す．また，集合値半標準盤の個数の明示公式を与える．さらに，歪 Grothendieck 多項式に対しても同様の特殊値と，歪集合値半標準盤の個数の奇数性が得られたので，時間が許す範囲でそれも合わせて述べる．本講演の内容は，神戸大学大学院理学研究科の信川喬彦氏と藤井大計氏との共同研究に基づくものである．

1 導入

ここでは，まず本研究の背景と動機を述べる．次に，本講演で扱う対象の定義を書く．

1.1 背景と動機

Grothendieck 多項式は，旗多様体の K 理論の研究における Schubert 多項式の 1 つの一般化であり Lascoux と Schützenberger により導入された [8, 9]．その中で，stable Grothendieck 多項式は Grassmann 多様体の K 理論において Schubert 類を表現するものであり Schur 多項式の一般化に相当する．ここでは stable Grothendieck 多項式について考え，以後単に Grothendieck 多項式と述べる．集合値半標準盤は，半標準盤の 1 つの一般化であり Grothendieck 多項式を組み合せ論的に表示するため Buch によって導入された [1]．半標準盤とは，整数の分割 λ を図形で表現したもの (Young 図形) へ正の整数を割り当てて得られる図のことである．半標準盤により，Schur 多項式を組み合せ論に表示でき，またそれを定義とすることもできる．Schur 多項式は，表現論において n 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ または一般線型群 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ の指標になっている．また，Schur 多項式は整数係数対称多項式環 $\mathbb{Z}[x_1, x_2, \ldots, x_n]^{\mathfrak{S}_n}$ $(x_i \in \mathbb{C})$ の 1 組の基底を成す．前述した通り，集合値半標準盤により Grothendieck 多項式が組み合せ論に定義でき，Schur 多項式に類似した結果が多く知られている (小節 1.3, 1.4参照)．本講演では，Schur 多項式と Grothendieck 多項式の組み合せ論的定義を採用し議論を進める．

* E-mail:tsimazak@math.kobe-u.ac.jp

これまで，与えられた整数の分割 λ と変数の個数 n のみから集合値半標準盤の個数を計算する明示的な公式は知られていなかった．他方，半標準盤の場合には以下のような簡明な公式が広く知られている．整数の分割 λ に対する n 変数の半標準盤全体の集合を $\mathrm{SST}(\lambda, n)$ と書く．このとき，

$$|\mathrm{SST}(\lambda, n)| = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\lambda_i - \lambda_j + j - i}{j - i} \tag{1.1}$$

$$= \prod_{(i,j) \in \lambda} \frac{n + j - i}{h_{i,j}}. \tag{1.2}$$

ここで，$h_{i,j}$ は hook length と呼ばれ，整数の分割 λ から簡単に計算できる組み合せ論的な値である．本研究の動機は，集合値半標準盤の個数に対しても (1.2) に類似した明示公式を与えることであった．しかし，いくつかの簡単な整数の分割と小さな変数の個数に対し集合値半標準盤の個数が大きな素数となることからそのような公式は望めないことが分かった．他方，実験により集合値半標準盤の個数は常に奇数個であることを予想し証明を与えた (系 2.1)．このことは，一般に半標準盤の場合には起こらないことである．また，(1.1) に類似した集合値半標準盤の個数の明示公式を得た (系 2.2)．これらの実験と小節 2.1に述べる主結果の証明には，Weyl の恒等式 (1.6) を用いた．

1.2 分割と Young 図形

l を正の整数とする．整数 l の分割とは，広義単調減少の非負整数列 λ_i が以下を満たすものであり，$\lambda \vdash l$ と表記する．

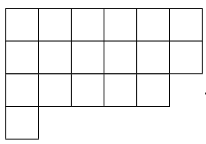
$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r), \quad \sum_{i=1}^{r} \lambda_i = l.$$

整数の分割 $\lambda \vdash l$ に対し，$(\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ と $(\lambda_1, \ldots, \lambda_r, 0)$ を同じものと見なす．整数の分割 λ の長さを，$\lambda_r > 0$ かつ $\lambda_{r+1} = 0$ となる最小の r の値と定め，$r = \ell(\lambda)$ と書く．

整数の分割 $\lambda \vdash l$ に対して集合

$$\{(i, j) \in (\mathbb{Z}_{>0})^2 \mid 1 \leq i \leq \ell(\lambda),\ 1 \leq j \leq \lambda_i\}$$

を Young 図形という．行列の場合と同様に，第一成分 i を行，第二成分 j を列と呼ぶ．整数の分割と Young 図との間には一対一の対応があるため，以下これらを同一視する．整数の分割 $\lambda \vdash l$ を Young 図形の形 (かたち) という．ここでは，Young 図形を λ_i $(1 \leq i \leq \ell(\lambda))$ 個の正方形を横一列にそれぞれ並べ，それらを左上に寄せて得られる図にて表す．例えば，整数の分割 $\lambda = (6, 6, 5, 1) \vdash 18$ に対する Young 図形は以下である:

$\lambda =$  .

Young 図形の正方形をここでは箱と呼び，$(i, j) \in (\mathbb{Z}_{>0})^2$ を i 行 j 列の箱と述べる．また，Young 図形 λ の箱の総数を $|\lambda|$ と書く．

1.3　半標準盤と Schur 多項式

集合 $\{1, 2, \ldots, n\}$ を $[n]$ と記す．形が λ である半標準盤とは，Young 図形の各箱 (i, j) に $[n]$ の元を，以下の条件を満たし割り当てて得られる図のことである．

- 箱 $(i, j+1)$ の中の数は，箱 (i, j) の中の数よりも等号付きで増加する．
- 箱 $(i+1, j)$ の中の数は，箱 (i, j) の中の数よりも真に増加する．

形が λ であり，変数の個数が n である半標準盤全体の集合を $\mathrm{SST}(\lambda, n)$ と書き，半標準盤のことをここではタブローと呼ぶ．例えば，Young 図形 $\lambda = (6, 6, 5, 1)$ に対するタブロー $T \in \mathrm{SST}(\lambda, 6)$ として以下がある:

$$T = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ \hline 2 & 2 & 3 & 4 & 4 & 5 \\ \hline 3 & 4 & 4 & 5 & 5 \\ \cline{1-5} 4 \\ \cline{1-1} \end{array}.$$

タブロー $T \in \mathrm{SST}(\lambda, n)$ に現れる数 i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ の個数を $\omega_i(T)$ とし，

$$\omega(T) := (\omega_1(T), \omega_2(T), \ldots, \omega_n(T)) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^n \tag{1.3}$$

と定め，$\omega(T)$ を T のウェイトとよぶ．変数 $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ に対して，単項式 $x^{\omega(T)}$ を次で定める．

$$x^{\omega(T)} := x_1^{\omega_1(T)} x_2^{\omega_2(T)} \cdots x_n^{\omega_n(T)}. \tag{1.4}$$

上のタブロー $T \in \mathrm{SST}(\lambda, 6)$ に対し，ウェイト $\omega(T)$ と単項式 $x^{\omega(T)}$ は各々以下のようになる:

$$\omega(T) = (3, 4, 3, 5, 3, 0), \quad x^{\omega(T)} = x_1^3 x_2^4 x_3^3 x_4^5 x_5^3 x_6^0 = x_1^3 x_2^4 x_3^3 x_4^5 x_5^3.$$

Schur 多項式は，以下で定義される多項式である:

$$s_\lambda = s_\lambda(x) := \sum_{T \in \mathrm{SST}(\lambda)} x^{\omega(T)}.$$

例 1.1. $\lambda = (2, 1)$ に対するタブロー $T \in \mathrm{SST}(\lambda, 3)$ は次の 8 個で尽くされる:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1} \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1} \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1} \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1} \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1} \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1} \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 2 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1} \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1} \end{array}.$$

これらより，

$$s_\lambda = x_1^2 x_2 + x_1^2 x_3 + x_1 x_2^2 + 2x_1 x_2 x_3 + x_1 x_3^2 + x_2^2 x_3 + x_2 x_3^2.$$

Schur 多項式 s_λ ついて，例えば次のようなことが知られている．詳細は Macdonald [11] や Sagan [14] などの文献を参照のこと．

- 対称多項式である．
- 対称多項式環 $\mathbb{Z}[x_1, x_2, \ldots, x_n]^{\mathfrak{S}_n}$ の 1 組の $\mathbb{Z}$ 基底である．

- Weyl の恒等式:

$$s_\lambda = \frac{\left| x_i^{\lambda_j+n-j} \right|_{1\le i,j\le n}}{\prod_{1\le i<j\le n}(x_i - x_j)}.$$

- Jacobi-Trudi の恒等式:

$$s_\lambda = \left| h_{\lambda_i+j-i} \right|_{1\le i,j\le n} \quad (h_{\lambda_i+j-i}\text{は } n \text{ 次完全斉次式}).$$

- Littlewood-Richardson 規則:

$$s_\lambda s_\mu = \sum_\nu c^\nu_{\lambda\mu} s_\nu \quad (\lambda \vdash l,\ \mu \vdash m).$$

ここで, $c^\nu_{\lambda\mu} \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$ である.

1.4 集合値半標準盤と Grothendieck 多項式

形が λ である集合値半標準盤とは, Young 図形の各箱 (i,j) に $[n]$ の空でない部分集合 $T_{i,j}$ を以下の条件を満たし割り当てて得られる図のことである.

- $\max T_{i,j} \le \min T_{i,j+1}$.
- $\max T_{i,j} < \min T_{i+1,j}$.

形が λ であり, 変数の個数が n である集合値半標準盤全体の集合を $\mathrm{SVT}(\lambda, n)$ と書き, 集合値半標準盤のことをここではセットタブローと呼ぶ. 次の図は, $\lambda = (6,6,5,1)$ に対するセットタブロー $T \in \mathrm{SVT}(\lambda, 6)$ の 1 つである:

$$T = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 1,2,3 & 3 & 3,5 \\ \hline 2 & 2,3 & 3 & 4 & 4 & 6 \\ \hline 3 & 4,5 & 5 & 5,6 & 6 \\ \cline{1-5} 4,5,6 \\ \cline{1-1} \end{array}.$$

$\boxed{2,3}$ は, 2 と 3 を箱へ割り当てていることを意味し, 以後 $\boxed{23}$ と全ての箱も同様に略記する. セットタブロー T に対して, ウェイト $\omega(T)$ と単項式 $x^{\omega(T)}$ を (1.3) と (1.4) にて定める. 上のセットタブロー T に対しては,

$$\omega(T) = (4,3,6,4,5,4), \quad x^{\omega(T)} = x_1^4 x_2^3 x_3^6 x_4^4 x_5^5 x_6^4$$

となる.

Grothendieck 多項式は, 以下で定義される多項式である:

$$G_\lambda = G_\lambda(x \mid \beta) := \sum_{T \in \mathrm{SVT}(\lambda)} \beta^{|T|-|\lambda|} x^{\omega(T)}. \tag{1.5}$$

ここで, β はパラメータであり, $|T|$ はセットタブローに割り当てられている正の整数の個数である. 定義より, パラメータ $\beta = 0$ とすると Grothendieck 多項式 G_λ は Schur 多項式に s_λ に一致する.

例 1.2. Young 図形 $\lambda=(2,1)$ に対するセットタブロー $T \in \mathrm{SVT}(\lambda,3)$ の個数は，例 1.1の 8 つのタブローの他に次の 19 個があり，合計 27 個ある:

$$
\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 12 \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{2} \\ \cline{1-1}\end{array},\
\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 13 \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{2} \\ \cline{1-1}\end{array},\
\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 23 \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{2} \\ \cline{1-1}\end{array},\
\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 12 \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{3} \\ \cline{1-1}\end{array},\
\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 13 \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{3} \\ \cline{1-1}\end{array},\
\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 23 \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{3} \\ \cline{1-1}\end{array},
$$

$$
\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1 \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{23} \\ \cline{1-1}\end{array},\
\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{23} \\ \cline{1-1}\end{array},\
\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{23} \\ \cline{1-1}\end{array},\
\begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 23 \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{3} \\ \cline{1-1}\end{array},\
\begin{array}{|c|c|}\hline 12 & 2 \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{3} \\ \cline{1-1}\end{array},\
\begin{array}{|c|c|}\hline 12 & 3 \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{3} \\ \cline{1-1}\end{array},
$$

$$
\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 12 \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{23} \\ \cline{1-1}\end{array},\
\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 13 \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{23} \\ \cline{1-1}\end{array},\
\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 23 \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{23} \\ \cline{1-1}\end{array},\
\begin{array}{|c|c|}\hline 12 & 23 \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{3} \\ \cline{1-1}\end{array},\
\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 123 \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{2} \\ \cline{1-1}\end{array},\
\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 123 \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{3} \\ \cline{1-1}\end{array},\
\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 123 \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{23} \\ \cline{1-1}\end{array}.
$$

これらより，

$$
\begin{aligned}
G_\lambda =& s_\lambda + \beta(x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + x_2^2x_3^2 + 3x_1^2x_2x_3 + 3x_1x_2^2x_3 + 3x_1x_2x_3^2) \\
&+ \beta^2(2x_1^2x_2^2x_3 + 2x_1^2x_2x_3^2 + 2x_1x_2^2x_3^2) + \beta^3(x_1^2x_2^2x_3^2).
\end{aligned}
$$

上で述べたように，上式で $\beta=0$ とすると Grothendieck 多項式は Schur 多項式と一致する．

Grothendieck 多項式について，Schur 多項式に類似した以下の結果が知られている．

- 対称多項式である．
- 対称多項式環 $\mathbb{Z}[\beta][x_1,x_2,\ldots,x_n]^{\mathfrak{S}_n}$ の 1 組の $\mathbb{Z}[\beta]$ 基底である．
- Weyl の恒等式 (Ikeda-Naruse 2013 [5]):

$$
G_\lambda = \frac{\left| x_i^{\lambda_j+n-j}(1+\beta x_i)^{j-1} \right|_{1\le i,j\le n}}{\prod_{1\le i<j\le n}(x_i-x_j)}. \tag{1.6}
$$

- Jacobi-Trudi の恒等式 (Kirillov 2016 [7]):

$$
G_\lambda = \left| \sum_{m=0}^{\infty} \binom{i-1}{m} \beta^m h_{\lambda_i+j-i+m} \right|_{1\le i,j\le n}.
$$

- Littlewood-Richardson 規則 (Buch 2002 [1]):

$$
G_\lambda G_\mu = \sum_\nu c_{\lambda\mu}^{\nu} G_\nu \quad (\lambda \vdash l,\ \mu \vdash m).
$$

  ここで，$c_{\lambda\mu}^{\nu} \in \mathbb{Z}_{\ge 0}[\beta]$ である．

2　主定理

ここでは，本研究で得られた結果を紹介する．以下の新規の結果は，神戸大学大学院理学研究科の信川喬彦氏と藤井大計氏との共同研究に基づくものである [2]．また，北海道大学の Travis Scrimshaw 氏からのコメントは本研究の進展に大きく寄与した [15]．

2.1 Grothendieck 多項式 G_λ の特殊値とセットタブローの個数の奇数性および明示公式

以下の Grothendieck 多項式の特殊値を得た.

定理 2.1. 任意の Young 図形 λ に対し，次が成り立つ.

$$G_\lambda(\beta, \beta, \ldots, \beta \mid -\beta^{-1}) = \beta^{|\lambda|}.$$

上記の結果には，例えば以下の 3 通りの証明法がある (Travis Scrimshaw 氏からの示唆によるもの).

i. Weyl の恒等式 (1.6) を用いる (特殊函数論).
ii. sign reversing involution を用いる (組合せ論).
iii. 5 頂点模型を用いる (可積分系).

上の 3 つについて，各々簡単に説明する．i は，Weyl の恒等式 (1.6) に対し，パラメータ β を $-\beta^{-1}$ と置き，変数 x_i $(1 \leq i \leq n)$ を 1 つずつ順に β と特殊化していくことにより結果を得る.

ii は，$\mathrm{SVT}(\lambda, n)$ から特別なセットタブロー T_0 を取り除いた集合 $\mathrm{SVT}'(\lambda, n) = \mathrm{SVT}(\lambda, n) \backslash \{T_0\}$ に対して対合 g を組み合せ論的に構成し，その応用として

$$\sum_{T \in \mathrm{SVT}'(\lambda, n)} (-\beta^{-1})^{|T|-|\theta|} \beta^{|T|} = 0$$

を示す手法である．ここで用いる対合 g は

$$(-1)^{|g(T)|} = -(-1)^{|T|}$$

を満たすので sign reversing involution と呼ばれる.

iii は，茂木-堺 [12] による可解格子模型の逆散乱解法から Grothendieck 多項式が導出される事実に基づく．また，これと同値のこととして励起 Young 図形を用いた組み合せ論的解釈が池田-成瀬 [4] により与えられており，得られた Grothendieck 多項式に対して i と同様のパラメータの置き換えと，変数の特殊化を行うことにより結果が示される．励起 Young 図形のことについては，成瀬弘氏の講演スライド [13] も参照されたい.

ii と iii はそれぞれ，歪 Grothendieck 多項式 $G_{\lambda/\mu}$ と $G_{\lambda//\mu}$ へ一般化できる．簡単に述べると，$G_{\lambda/\mu}$ は組み合せ論的に拡張したものである．他方，$G_{\lambda//\mu}$ は Hall 内積の直交性を用いて拡張したものである．各々の詳細な定義については，Buch [1] を参照のこと．定理 2.1より，以下を得る.

系 2.1. 任意の Young 図形 λ に対する n 変数のセットタブローの個数は，奇数である.

また，Weyl の恒等式 (1.6) から，以下のセットタブローの個数の明示公式が得られる.

定理 2.2. 任意の Young 図形 λ に対して，以下が成り立つ.

$$|\mathrm{SVT}(\lambda, n)| = \sum_{k_1=0}^{0} \sum_{k_2=0}^{1} \cdots \sum_{k_n=0}^{n-1} \binom{0}{k_1} \binom{1}{k_2} \cdots \binom{n-1}{k_n} \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\lambda_i - \lambda_j + k_i - k_j + j - i}{j - i}.$$

2.2　歪 Grothendieck 多項式 $G_{\lambda/\mu}$ の特殊値と歪セットタブローの個数の奇数性

ここでは，組み合せ論的に定義される歪 Grothendieck 多項式 $G_{\lambda/\mu}$ に対して定理 2.1と系 2.1と同様の結果を紹介する．まず，2 つの Young 図形 λ, μ $(\lambda \supseteq \mu)$ に対し，差集合 $\lambda - \mu$ を歪 Young 図形いい，以後 λ/μ と書く．例えば，歪 Young 図形 $\lambda/\mu = (5,3,3,2)/(3,1,1)$ は以下のようになる:

$$\lambda/\mu = \begin{ytableau} \none & \none & \none & \ & \ \\ \none & \ & \ \\ \none & \ & \ \\ \ & \ \end{ytableau}.$$

歪 Young 図形 λ/μ に対して，セットタブローの定義を適用し集合値歪半標準盤 (以下，歪セットタブローと呼ぶ) を定め，単項式 $x^{\omega(T)}$ も同様に定義する．例えば，以下の歪セットタブロー $T \in \mathrm{SVT}(\lambda/\mu, 3)$ に対し，ウェイト $\omega(T)$ を考えると単項式 $x^{\omega(T)}$ は次である:

$$T = \begin{ytableau} \none & \none & \none & 1 & 123 \\ \none & 1 & 12 \\ \none & 2 & 3 \\ 13 & 3 \end{ytableau}, \quad x^{\omega(T)} = x_1^5 x_2^3 x_3^4.$$

歪 Grothendieck 多項式 $G_{\lambda/\mu}$ は，以下で定義される多項式である:

$$G_{\lambda/\mu} = G_{\lambda/\mu}(x \mid \beta) := \sum_{T \in \mathrm{SVT}(\lambda/\mu, n)} \beta^{|T| - |\lambda/\mu|} x^{\omega(T)}.$$

ここで，$|\lambda/\mu|$ は歪 Young 図形 λ/μ の箱の個数であり，$|T|$ は歪セットタブロー T に割り当てられている正の整数の個数である．

小節 2.1にある sign reversing involution を歪セットタブローへ拡張することにより，以下のことを明らかにした．

定理 2.3. 任意の歪 Young 図形 λ/μ に対し，次が成り立つ．

$$G_{\lambda/\mu}(\beta, \beta, \ldots, \beta \mid -\beta^{-1}) = \beta^{|\lambda/\mu|}.$$

系 2.2. 任意の歪 Young 図形 λ/μ に対する n 変数の歪セットタブローの個数は，奇数である．

謝辞

第 20 回数学総合若手研究集会での講演の機会を与えていただき，世話人の皆様に心より感謝申し上げます．本研究は，JST 次世代研究者挑戦的研究プログラム JPMJSP2148 の支援を受けたものです．

参考文献

[1] A. S. Buch, *A Littlewood-Richardson rule for the K-theory of Grassmannians*, Acta. Math., **189**(1): 37-78, 2002.

[2] T. Fujii, T. Nobukawa and T. Shimazaki, *The number of the set-valued tableaux is odd*, arXiv: 2305.06740, preprint, 2023.

[3] B. H. Hwang, J. Jang, J. S. Kim, M. Song and U. Song, *Refined canonical stable Grothendieck polynomials and their duals*, arXiv preprint arXiv:2104.04251, 2021.

[4] T. Ikeda and H. Naruse, *Excited Young diagrams and equivariant Schubert calculus*, Trans. Amer. Math. Soc. vol.**361**, 5193–5221, 2009.

[5] T. Ikeda and H. Naruse, *K-theoretic analogues of factorial Schur P-and Q-functions*, In: Adv. Math., **243**: 22-66, 2013.

[6] T. Ikeda and T. Shimazaki, *A proof of K-theoretic Littlewood–Richardson rules by Bender-Knuth-type involutions*, Math. Res. Lett., **21**(2): 333-339, 2014.

[7] A. N. Kirillov, *On some quadratic algebras I 1/2: combinatorics of Dunkl and Gaudin elements, Schubert, Grothendieck, Fuss-Catalan, universal Tutte and reduced polynomials*, SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl. **12**: 002, 2016.

[8] A. Lascoux, *Anneau de Grothendieck de la variété de drapeaux*, The Grothendieck Festschrift, Vol. **III**, Progr. Math., Birkhäuser, Boston, 1-34, 1990.

[9] A. Lascoux and M. P. Schützenberger, *Structure de Hopf de l'anneau de cohomologie et de l'anneau de Grothendieck d'une variété de drapeaux*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math, **295**(11): 629-633, 1982.

[10] C. Lenart, *Combinatorial aspects of the K-theory of Grassmannians*, Ann. Comb. **4**: 67-82, 2000.

[11] I. G. Macdonald, *Symmetric Functions and Hall Polynomials*, 2nd. ed., Oxford, 1995.

[12] K. Motegi and K. Sakai, *Vertex models, TASEP and Grothendieck polynomials*, J. Phys. A **46**(35): Paper No. 355201, 2013.

[13] H. Naruse, *Excited Young diagram and Yang-Baxter relations*, Lecture in The Mathematical Society of Japan, in Japanese, 2011.

[14] B. E. Sagan, *The symmetric group: representations, combinatorial algorithms, and symmetric functions*, Vol. **203**. Springer Science & Business Media, 2001.

[15] T. Scrimshaw, *private communications* with the authors.