

# $S_1$ 特異点の変形の幾何学

神戸大学大学院理学研究科数学専攻

島田 瑠奈 (Runa Shimada)\*

## 概要

2次元多様体から3次元多様体への滑らかな写像にあらわれる特異点は、Mond の分類によってあらわれやすい順に  $S_0$  特異点 (ホイットニーの傘),  $S_1$  特異点であることが知られている. 本講演では, 定義域に1パラメータを追加した  $S_1$  特異点の変形に対して像域の等長写像のみを用いた表示式を与え, その微分幾何的な性質や変形にあらわれる  $S_0$  特異点について述べる.

## 1 導入

近年特異点をもつ曲線や曲面の微分幾何的研究が盛んに行われている. 正則な曲面の代表的な微分幾何的不変量にガウス曲率と平均曲率があり, 曲面の微分幾何的性質はこれらの曲率の性質をもとに多く研究されてきた. 曲面が特異点をもつ場合, これらの不変量は通常発散し, 定義できない. したがって, 特異点を持つ曲面の微分幾何的性質を述べるための言語がない状態になる. これの対処法の一つに像域の等長写像のみを用いた表示式 ( $SO(3)$ -normal form) を使う方法がある. 代表的な特異点に対してはこの表示式が与えられており, 様々な微分幾何的性質が研究されている. ただし, これらの表示式は固定された特異点に対するものである. 特異点はあらわれやすい順に分類がなされており, 一番あらわれやすい特異点の次にあらわれやすい特異点は特異点の出現や消滅に対応するような, 写像の1パラメータ変形にあらわれるものである. したがって, このような特異点を調べる際は変形まで含めて考えるのが自然である. 本講演では特異点の変形に対して, 変形まで含めた  $S_1^\pm$  特異点の像域の等長写像のみを用いた表示式を与える. これを用いて,  $S_1^\pm$  特異点の変形の微分幾何的性質を調べる.

本講演では写像の局所的な振る舞いのみ注目するため, 写像はすべて写像芽として述べる. 詳しい定義は [4, 3章] [6, 8章] 等を参照.

**定義 1.1.** 2つの写像芽  $f, g : (\mathbf{R}^m, 0) \rightarrow (\mathbf{R}^n, 0)$  が  $\mathcal{A}$  同値または右左同値であるとは, 定義域の座標変換  $\varphi$  と像域の座標変換  $\psi$  が存在して  $g = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$  が成り立つときをいう.

この同値関係は写像芽の定義域と像域の座標変換, つまり微分同相写像で移り合うものはすべて等しいとみなすものであり, 写像の幾何的な性質を扱う立場から自然なものである. この同値関係で考えると, 微分の階数が最大となっている点の写像芽はすべて同値になる. したがって, 注目するのは次で定義する特異点である.

---

\* E-mail:231s010s@stu.kobe-u.ac.jp

**定義 1.2.** 写像  $f: M \rightarrow N$  に対して  $p \in M$  が  $f$  の特異点であるとは,  $\text{rank } df_p < \min\{m, n\}$  となるときをいう. ただし  $\dim M = m, \dim N = n$  とする. さらに  $S(f)$  で  $f$  の特異点集合を表す.

曲面にあらわれる特異点で一番よくあらわれるのはホイットニーの傘と呼ばれる特異点である.

**定義 1.3.**  $f(u, v) = (u, uv, v^2)$  で定義される写像の原点における写像芽に右左同値な写像芽またはその原点を  $S_0$  特異点または交叉帽子またはホイットニーの傘という.

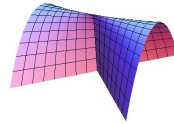


図1 ホイットニーの傘

曲面にあらわれる特異点でホイットニーの傘の次によくあらわれるのは  $S_1^\pm$  特異点と呼ばれるものである ([5]).

**定義 1.4.**  $f(u, v) = (u, v^2, v(u^2 \pm v^2))$  で定義される写像の原点における写像芽に右左同値な写像芽またはその原点を  $S_1^\pm$  特異点という.

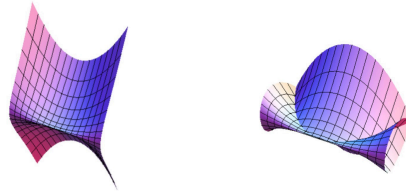


図2 左:  $S_1^+$  特異点, 右:  $S_1^-$  特異点

## 2 $S_1^\pm$ 特異点の変形

**定義 2.1.** 写像芽  $f: (\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}, 0) \rightarrow (\mathbf{R}^3, 0)$  が滑らかかつ  $f(u, v, 0)$  が  $(u, v) = (0, 0)$  において  $S_1^\pm$  特異点であるとき,  $f$  を  $S_1^\pm$  特異点の変形であるという.

この定義において, 定義域に追加した  $\mathbf{R}$  が写像の変形を表すパラメーターであり変形パラメーターという. 写像芽の変形に対しては変形パラメーターを保つ右左同値を考えるのが適切である.

**定義 2.2.** 2つの写像芽  $f, g: (\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}, 0) \rightarrow (\mathbf{R}^3, 0)$  が  $S_1^\pm$  特異点の変形であるとする. このとき  $f$  と  $g$  が変形として同値であるとは,  $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(u, v, s) = g(u, v, s)$  となる微分同相写像芽  $\varphi: (\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}, 0) \rightarrow (\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}, 0)$  と  $\psi: (\mathbf{R}^3, 0) \rightarrow (\mathbf{R}^3, 0)$  が存在することをいう. ただし,  $\varphi(u, v, s) = (\varphi_1(u, v, s), \varphi_2(u, v, s), \varphi_3(s))$  の形である.

ここで定義域の第3成分が変形パラメーターであり,  $\varphi_3$  が  $s$  にしか依存しないように定義されているのは, 変形パラメーター自体の変化は許すが, 変形パラメーターに他のパラメーターが影響を与

えないようにするためである。ゆえにこの定義は変形パラメーターを保つような右左同値である。

**例 2.3.**  $S_1^\pm$  特異点の変形として次の  $f_d$  を考える。

$$f_d : (\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}, 0) \ni (u, v, s) \mapsto (u, v^2, v(u^2 \pm v^2) + sv) \in (\mathbf{R}^3, 0)$$

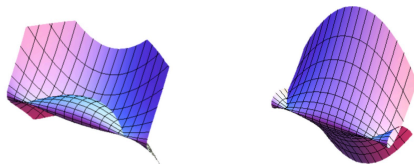


図3 左: $s = -\frac{1}{2}$ のときの  $S_1^+$  特異点の変形, 右: $s = -\frac{1}{2}$ のときの  $S_1^-$  特異点の変形

### 3 変形にあらわれるホイットニーの傘

本講演では特異点の微分幾何的な性質を扱うが、特異点においては通常単位法線ベクトルが定義されず、このためにガウス曲率、平均曲率等の曲面の性質を表している量が意味を失う。そのような場合の有効な方法の1つが normal form(正確には  $SO(3)$ -normal form) と呼ばれるものである。

**定理 3.1.** [1] 写像芽  $f : (\mathbf{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbf{R}^3, 0)$  がホイットニーの傘であるとする。このとき  $T \circ f \circ \varphi(u, v) = (u, uv + O(3), \frac{1}{2}(a_{20}u^2 + 2a_{11}uv + a_{02}v^2) + O(3))$  となる  $T \in SO(3)$  と微分同相写像芽  $\varphi : (\mathbf{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbf{R}^2, 0)$  が存在する。ただし、 $a_{20}, a_{11}, a_{02} \in \mathbf{R}$  である。

この定理にあらわれる式

$$(u, v) \mapsto (u, uv + O(3), \frac{1}{2}(a_{20}u^2 + 2a_{11}uv + a_{02}v^2) + O(3))$$

をホイットニーの傘の ( $SO(3)$ -)normal form という。この式にあらわれる係数  $a_{20}, a_{11}, a_{02}$  はホイットニーの傘の微分幾何的不変量であり、意味を失っているガウス曲率、平均曲率等の代わりにこれらの不変量を用いてホイットニーの傘の微分幾何的な研究が行われている。本講演で扱う  $S_1^\pm$  特異点の変形にはホイットニーの傘があらわれるため、その不変量を使った研究を述べる。

**定理 3.2.** [3] 写像芽  $f : (\mathbf{R}^2; (u, v), p) \rightarrow (\mathbf{R}^3, 0)$  がホイットニーの傘であるとする。  $\text{Ker}df_0 = \langle \partial v \rangle$  である  $(u, v)$  に対して、 $|f_u, f_{uv}, f_{vv}| > 0$  ならばその不変量は以下のように書ける。

$$a_{02} = \frac{|f_u||f_u \times f_{vv}|^3}{|f_u, f_{uv}, f_{vv}|^2}(p)$$

$$a_{20} = \frac{|f_u \times f_{vv}|}{4|f_u|^3|f_u, f_{uv}, f_{vv}|^2}(|f_u, f_{uu}, f_{vv}|^2 + 4|f_u, f_{uv}, f_{vv}||f_u, f_{uv}, f_{uu}|)(p)$$

$$a_{11} = \frac{1}{2|f_u||f_u, f_{uv}, f_{vv}|^2} \left( 2|f_u, f_{uv}, f_{vv}| \begin{vmatrix} f_u \cdot f_u & f_u \cdot f_{uv} \\ f_{vv} \cdot f_u & f_{vv} \cdot f_{uv} \end{vmatrix} - |f_u \times f_{vv}|^2 |f_u, f_{uu}, f_{vv}| \right) (p)$$

**注意 3.3.**  $S_1^\pm$  特異点では  $|f_u, f_{uv}, f_{vv}| = 0$  となる。

**定義 3.4.** 写像芽  $f : (\mathbf{R}^2, (u_0, v_0)) \rightarrow \mathbf{R}^3$  は  $\text{rank } df_{(u_0, v_0)} = 1$  とする.  $f$  の  $(u_0, v_0)$  における **focal set** とは, 距離 2 乗関数  $D^x(u, v) = \frac{1}{2}|x - f|^2$  に対して,

$$\{x \in \mathbf{R}^3 \mid D_u^x(u_0, v_0) = D_v^x(u_0, v_0) = 0, D_{uu}^x(u_0, v_0)D_{vv}^x(u_0, v_0) - D_{uv}^x(u_0, v_0)^2 = 0\} \subset \text{Im}(df_{(u_0, v_0)})^\perp$$

のことである.

ホイットニーの傘に対して focal set は円錐曲線となる ([2]) ため, focal set は **focal conic** とよばれる.

**命題 3.5.** [2] 写像芽  $f : (\mathbf{R}^2; (u, v), p) \rightarrow (\mathbf{R}^3, 0)$  がホイットニーの傘であるとする. これに対し  $f$  の focal conic は, 以下のようになる.

(1)  $a_{02}a_{20} < 0 \Leftrightarrow$  楕円

(2)  $a_{02}a_{20} > 0 \Leftrightarrow$  双曲線

(3)  $a_{20} = 0 \Leftrightarrow$  放物線

## 4 主結果

**定理 4.1.** 写像芽  $f : (\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}, 0) \rightarrow (\mathbf{R}^3, 0)$  が  $S_1^\pm$  特異点の変形ならば, 向きを保つ微分同相写像芽  $\varphi : (\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}, 0) \rightarrow (\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}, 0)$  で定義 2.2 の形をしたものと,  $T \in SO(3)$  と関数  $f_{21}, f_{31} \in C^\infty(1, 1), f_{24}, f_{33}, f_{34} \in C^\infty(2, 1), f_{32} \in C^\infty(3, 1)$  が存在して,

$$\begin{aligned} f_n^s &:= T \circ f \circ \varphi(u, v, s) \\ &= (u, u^2 f_{21}(u) + v^2 + u s f_{24}(u, s), \\ &\quad u^2 f_{31}(u) + v^2 f_{32}(u, v, s) + v f_{33}(u, s) + u s f_{34}(u, s)) \end{aligned}$$

が成り立つ.

ただし,  $(f_{32})_v(0, 0, 0) \neq 0, (f_{33})_{uu}(0, 0) \neq 0, f_{32}(0, 0, 0) = f_{33}(0, 0) = (f_{33})_u(0, 0) = 0$  である.

この  $f_n^s$  を  $S_1^\pm$  特異点の変形の  $(SO(3)-)$ normal form という. この写像  $f_n^s$  の特異点集合  $S(f_n^s)$  は,

$$S(f_n^s) = \{(u, v) \mid v = 0, f_{33}(u, s) = 0\}$$

である. この定理において与えられた  $f$  と  $f_n^s$  は変形として同値であり, さらに像域の微分同相写像は,  $SO(3)$  の元であるため  $f$  と  $f_n^s$  は同じ微分幾何的な性質をもつ.

**例 4.2.**  $f(u, v, s) = (u, u^2 + v^2 - us, u^2 - uv^2 + v^3 + vs + u^2v + us)$  とする.

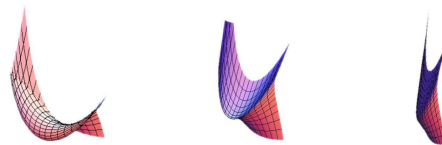


図 4 左:  $s = -1$ , 中:  $s = 0$ , 右:  $s = 1$

以下では  $f = f_n^s$  とおく. また,  $f$  にあらわれる関数は次のようにおくことができる:

$$\begin{aligned} f_{32}(u, v, s) &= uf_{321}(u, v, s) + vf_{322}(u, v, s) + sf_{323}(u, v, s) \\ f_{33}(u, s) &= f_{330}(s) + uf_{331}(s) + u^2f_{332}(s) + u^3f_{333}(s) + \cdots \end{aligned}$$

さらに,  $f_{332}(0) > 0$  を仮定し,  $f_{332}(0) = f_{3320}^2$  とおく.  $f_{332}(0) < 0$  の場合は  $f_{332}(0) = -f_{3320}^2$  とおくことで同様に計算できる. さらに,  $S(f) \neq \emptyset$  であることと  $s \leq 0$  は同値であるため  $s = -\tilde{s}^2$  とおく.

**定理 4.3.**  $(u, v) \in S(f)$  ならば

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{f_{3320}}\tilde{s} + \frac{1}{2f_{3320}^2}\left(f_{331}(0) - \frac{f_{333}(0)}{f_{3320}^2}\right)\tilde{s}^2 \\ &\quad - \frac{1}{4f_{3320}^3}\left(f_{331}(0) - \frac{f_{333}(0)}{f_{3320}^2}\right)\left(f_{331}(0) + \frac{f_{333}(0)}{f_{3320}^2} + \frac{f_{332}(0)}{2f_{3320}}\left(f_{331}(0) - \frac{f_{333}(0)}{f_{3320}^2}\right)\right)\tilde{s}^3 + O(4) \\ v &= 0 \end{aligned}$$

のように展開できる. また  $u \neq 0$  のとき  $(u, 0)$  で  $f$  はホイトニーの傘である.

$(u, 0) \in S(f)$  とすると定理 4.3 のように  $u$  は  $\tilde{s}$  に依存する. さらに  $u \neq 0$  のとき  $f$  は  $(u, 0)$  でホイトニーの傘なので, この点でホイトニーの傘の normal form にあらわれる不変量  $a_{20}, a_{20}, a_{11}$  が定義される. これらは  $\tilde{s}$  に依存するため, それを  $a_{20}(\tilde{s}), a_{11}(\tilde{s}), a_{02}(\tilde{s})$  と書くと以下を得る.

**定理 4.4.** 関数  $a_{20}(\tilde{s}), a_{20}(\tilde{s}), a_{11}(\tilde{s})$  は,

$$\begin{aligned} a_{02}(\tilde{s}) &= \frac{1}{\tilde{s}^2}\left(\frac{1}{2f_{3320}^2} + O(1)\right) \\ a_{20}(\tilde{s}) &= \frac{1}{\tilde{s}^2}\left(\frac{f_{31}^2}{2f_{3320}^2} - \frac{f_{31}(c_1 + 2f_{3320}c_2)}{64}\tilde{s} + O(2)\right) \\ a_{11}(\tilde{s}) &= \frac{1}{\tilde{s}^2}\left(\frac{4}{f_{3320}}(f_{21}f_{321} - 3f_{31u})\tilde{s} + O(2)\right) \end{aligned}$$

と展開できる. ただし  $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$  である.

**系 4.5.**  $\tilde{s} \rightarrow 0$  とすると以下が成り立つ.

$$\begin{aligned} a_{02}(\tilde{s}) &\rightarrow \infty \\ a_{20}(\tilde{s}) &\rightarrow \begin{cases} +\infty & \Leftrightarrow f_{31} \neq 0 \\ \text{有界} & \Leftrightarrow f_{31} = 0 \end{cases} \\ a_{11}(\tilde{s}) &\rightarrow \begin{cases} \pm\infty & \Leftrightarrow f_{21}f_{321} - 3(f_{31})_u \neq 0 \\ \text{有界} & \Leftrightarrow f_{21}f_{321} - 3(f_{31})_u = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

この系より  $f_{31}(0) \neq 0$  のとき,  $a_{02}a_{20} \rightarrow +\infty$  ( $\tilde{s} \rightarrow 0$ ) であるから命題 3.5 より次の系を得る.

**系 4.6.**  $f_{31}(0) \neq 0$  である  $S_1^\pm$  特異点の変形の微小な変形において focal conic は全て双曲線である.

**例 4.7.**  $f(u, v, s) = (u, v^2, -u^2 + v^3 + vs + u^2v)$  とすると  $f$  の focal conic は,  $\tilde{s} \neq 0$  で双曲線,  $\tilde{s} = 0$  で交わる 2 直線である.

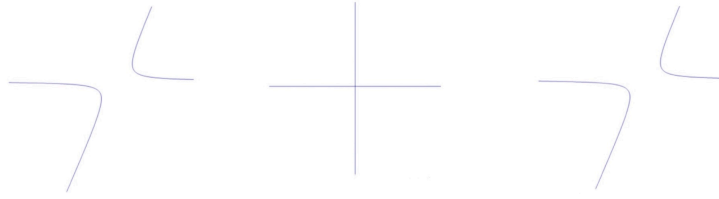


図5 左: $\tilde{s}=-1$ , 中: $\tilde{s}=0$ , 右: $\tilde{s}=1$

$S_1^\pm$  特異点の変形の normal form に対して変形パラメーターを含む最低次の係数  $f_{24}(0,0)$ ,  $f_{34}(0,0)$  の幾何学的意味は次のようになる.  $S_1^\pm$  特異点の変形に対して特異点集合の軌跡  $S(f_n^{-\tilde{s}^2})$  は原点を通る空間曲線となる. このとき,

**注意 4.8.** 特異点集合  $S(f_n^{-\tilde{s}^2})$  の定理 4.3 で与えられたパラメーター表示

$$\gamma := \{f_n^{-\tilde{s}^2}(u, v) | (u, v) \in S(f_n^{-\tilde{s}^2})\}$$

に対して,  $\gamma$  の原点での曲率の 1 階微分を  $\frac{d\kappa}{d\tilde{s}} = \kappa'$ , 捩率を  $\tau$  とすると  $f_{21}^2(0) + f_{31}^2(0) \neq 0$  のとき,

$$f_{24}(0,0) = \frac{2\tau f_{31}(0) + \frac{\kappa' f_{3320} f_{21}(0)}{\sqrt{f_{21}^2(0) + f_{31}^2(0)}} + 6f_{21}'(0)}{6f_{3320}^2}$$

$$f_{34}(0,0) = \frac{-2\tau f_{21}(0) + \frac{\kappa' f_{3320} f_{31}(0)}{\sqrt{f_{21}^2(0) + f_{31}^2(0)}} + 6f_{31}'(0)}{6f_{3320}^2}$$

が成り立つ.

## 参考文献

- [1] J. W. Bruce, and J. M. West, *Function on a cross cap*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **123** (1998), 19-39.
- [2] T. Fukui and M. Hasegawa, *Fronts of Whitney umbrella -a differential geometric approach via blowing up*, J. Singul. **4** (2012), 35-67.
- [3] M. Hasegawa, A. Honda, K. Naokawa, M. Umehara and K. Yamada, *Intrinsic invariants of cross caps*, Sel. Math. New Ser. **20** (2014), 769-785.
- [4] 泉屋周一, 石川剛郎, 応用特異点論, 共立出版株式会社, (1998)
- [5] D. Mond *On the classification of germs of maps from  $\mathbf{R}^2$  to  $\mathbf{R}^3$* , Proc. London Math. Soc. **50**, (1985), 333-369.
- [6] 梅原雅顕, 佐治健太郎, 山田光太郎, 特異点をもつ曲線と曲面の微分幾何学, 丸善出版株式会社, (2017).