On non-trivial Λ-submodules with finite index of the plus/minus Selmer group over anticyclotomic $\mathbb{Z}_p$-extension at inert primes

九州大学 大学院数理学府 数理学専攻
椎井 亮太 (Ryota SHII) *

概要

K を虚 2 次体とし, 素数 p が惰性的であるとする. E を K 上定義された楕円曲線とし, E は p で良超特異還元をもつと仮定する. 今回, E に関して緩い仮定のもとで K の反円分 $\mathbb{Z}_p$-拡大上の E の plus/minus Selmer 群が非自明な指数有限の Λ-部分加群を持たないことを示した. これは R. Greenberg や B. D. Kim の結果の反円分 $\mathbb{Z}_p$-拡大に対する類似の結果である. A. Agboola–B. Howard や A. Burungale–K. Büyükboduk–A. Lei の結果を適用することで, 主定理の仮定を満たす例を構成することもできた.

1 導入

F を代数体, E を F 上定義された楕円曲線とする. 簡単のため, 固定する素数 p は奇素数であるとする. このとき, E の $\mathbb{Z}_p$-拡大体 F_∞/F 上の p^∞-Selmer 群の Pontryagin 双対は楕円曲線の岩澤理論において重要な数論的対象である. 代数体 F 上の p^∞-Selmer 群とは次の完全列をみたすもののことである:

$$0 \longrightarrow E(F) \otimes \mathbb{Q}_p / \mathbb{Z}_p \longrightarrow \mathrm{Sel}_p(E/F) \longrightarrow Ш(E/F)[p^\infty] \longrightarrow 0,$$

ここで, $Ш(E/F)$ は E の F 上の Tate-Shafarevich 群である. F の $\mathbb{Z}_p$-拡大 F_∞ に対して $\mathrm{Sel}_p(E/F_\infty) := \varinjlim_n \mathrm{Sel}_p(E/F_n)$ と定める. $\mathrm{Sel}_p(E/F_\infty)$ には $\mathrm{Gal}(F_\infty/F)$ が自然に作用するので, 完備群環 $\Lambda = \mathbb{Z}_p[\![\mathrm{Gal}(F_\infty/F)]\!] = \varprojlim_n \mathbb{Z}_p[\![\mathrm{Gal}(F_n/F)]\!]$ 上の加群になる.

このようにして定義される p^∞-Selmer 群に指数有限の Λ-部分加群が存在するかという岩澤理論における基本的な問題がある. この問題の数論的な応用の 1 つに Birch and Swinnerton-Dyer 予想 (BSD 予想) の p-部分への応用がある. 今回,

- 素数 p が惰性する虚 2 次体 K とその反円分 $\mathbb{Z}_p$-拡大,
- K 上定義された楕円曲線 E が p で良超特異還元をもつ

という状況でこの問題に対する結果が得られた. 本稿では, 最初にいくつかの用語を定義し, 先行研究

* E-mail:shi.ryota.749@s.kyushu-u.ac.jp

である R. Greenberg の結果を紹介する．次章で, 今回得られた主定理 (定理 2.2.1) の状況と主張の詳細を説明する．

1.1 p^∞-Selmer 群と楕円曲線の岩澤理論

F を代数体, E を F 上定義された楕円曲線とする．このとき, F の **$\mathbb{Z}_p$-拡大**とは, F の (無限次)Galois 拡大体 F_∞ でその Galois 群 $\mathrm{Gal}(F_\infty/F)$ が位相群として $\mathbb{Z}_p$ と同型であるもののことである．$\mathbb{Z}_p$ の任意の閉部分群は $p^n\,\mathbb{Z}_p$ $(n \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ という形で表されることから, これに対応する F_∞/F の中間体を F_n とおく．$\mathbb{Z}_p$-拡大 F_∞/F に対して $\Lambda = \mathbb{Z}_p[\![\mathrm{Gal}(F_\infty/F)]\!] = \varprojlim_n \mathbb{Z}_p[\mathrm{Gal}(F_n/F)]$ と定める．$\mathrm{Gal}(F_\infty/F)$ の位相的生成元 γ を 1 つ固定すると, $\gamma \longmapsto 1+T$ により (非標準的な) 同型 $\Lambda \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_p[\![T]\!]$ を得る．

E を F 上の楕円曲線, $G_F = \mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ を F の絶対 Galois 群とする．このとき, G_F-加群としての完全列

$$0 \longrightarrow E(F) \otimes \mathbb{Q}_p\,/\,\mathbb{Z}_p \longrightarrow \mathrm{Sel}_p(E/F) \longrightarrow Ш(E/F)[p^\infty] \longrightarrow 0$$

がある．ここで, $Ш(E/F)$ は E の F 上の Tate-Shafarevich 群である．この $\mathrm{Sel}_p(E/F)$ を E の F 上の **p^∞-Selmer 群**という．$\mathbb{Z}_p$-拡大 F_∞/F に対して, F_∞ 上の p^∞-Selmer 群を $\mathrm{Sel}_p(E/F_\infty) := \varinjlim_n \mathrm{Sel}_p(E/F_n)$ と定義する．$\mathrm{Sel}_p(E/F_\infty)$ には $\mathrm{Gal}(F_\infty/F)$ が作用するので, 自然に Λ-加群とみなせる．$\mathrm{Sel}_p(E/F_\infty)$ の Pontryagin 双対 $\mathrm{Sel}_p(E/F_\infty)^\vee := \mathrm{Hom}(\mathrm{Sel}_p(E/F_\infty), \mathbb{Q}_p\,/\,\mathbb{Z}_p)$ はコンパクトな有限生成 Λ-加群になることが知られている．したがって, 有限生成 Λ-加群の構造定理より Λ-加群としての完全列

$$0 \longrightarrow (\text{有限群}) \longrightarrow \mathrm{Sel}_p(E/F_\infty)^\vee \longrightarrow \Lambda^r \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{s} \Lambda/(f_i)\right) \longrightarrow (\text{有限群}) \longrightarrow 0 \qquad (1.1)$$

がある．ここで, f_i は Λ の既約元である．この完全列 (1.1) を用いて次の用語を定義する．

Definition 1.1.1. (1) 完全列 (1.1) に現れる r を $\mathrm{Sel}_p(E/F_\infty)$ の **Λ-corank** といい, $\mathrm{corank}_\Lambda \mathrm{Sel}_p(E/F_\infty)$ と表す．

(2) $\mathrm{corank}_\Lambda \mathrm{Sel}_p(E/F_\infty) = 0$ のとき $\mathrm{Sel}_p(E/F_\infty)$ は **Λ-cotorsion** であるという．

(3) $\mathrm{Sel}_p(E/F_\infty)$ が Λ-cotorsion であるとき, Λ のイデアル $(\prod_{i=1}^s f_i)$ を $\mathrm{Sel}_p(E/F_\infty)$ の**特性イデアル**といい, $\mathrm{char}_\Lambda \mathrm{Sel}_p(E/F_\infty)^\vee$ と表す．

E が p の上にある F の任意の素点で良通常還元を持ち, F_∞/F を円分 $\mathbb{Z}_p$-拡大とするとき, $\mathrm{Sel}_p(E/F_\infty)$ が Λ-cotorsion であることが Mazur によって予想されている．この予想に関して, 一般には現在でも未解決問題であるが, 例えば $F = \mathbb{Q}$ のときは加藤による結果 [8] がある．

簡単のため, この節の最後までは $F = \mathbb{Q}$ と仮定する．したがって, $\mathbb{Q}_\infty\,/\,\mathbb{Q}$ は円分 $\mathbb{Z}_p$-拡大である．このとき, A. Wiles らの結果により, $L(E/\,\mathbb{Q}, s)$ は $\mathbb{C}$ 上正則に解析接続される．p で良通常還元となる $\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線 E と $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_\infty\,/\,\mathbb{Q})$ の有限位数の指標 χ に対して $L(E/\,\mathbb{Q}, \chi, 1)$ の代数的部分を p-進補完するような p-進 L-関数 $\mathcal{L}_p(E/\,\mathbb{Q}_\infty)$ が存在し, さらにこれは Λ の元になる．**岩澤主予想**とは

$\mathrm{Sel}_p(E/\mathbb{Q}_\infty)$ の特性イデアルが p-進 L-関数で生成される Λ のイデアルと等しい, つまり

$$\mathrm{char}_\Lambda \mathrm{Sel}_p(E/F_\infty)^\vee = \mathcal{L}_p(E/\mathbb{Q}_\infty)\Lambda$$

が成り立つだろうという予想である. この予想は, E が虚数乗法をもつ場合は D. Rohrlich と K. Rubin, E が虚数乗法を持たない場合は加藤と C. Skinner–E. Urban により多くの E と p に対して証明されている. 詳細は C. Skinner による lecture note [14] などを参照してほしい.

1.2 指数有限 Λ-部分加群

岩澤理論において, p^∞-Selmer 群が指数有限の Λ-部分加群を持たないかどうかという基本的な問題がある. 先行研究の 1 つに次の R. Greenberg の結果がある.

Theorem 1.2.1 ([5]). E が p の上にある F の任意の素点で良通常還元をもつと仮定する. F_∞/F を円分 $\mathbb{Z}_p$-拡大とする. このとき, $\mathrm{Sel}_p(E/F_\infty)$ が Λ-cotorsion であれば, $\mathrm{Sel}_p(E/F_\infty)$ は非自明な指数有限 Λ-部分加群を持たない.

この定理の応用の 1 つに次がある.

Corollary 1.2.2 ([6, Theorem 4.1]). 定理 1.2.1 と同じ状況を考える. $\mathrm{Sel}_p(E/F)$ が有限群であると仮定すると, 次が成り立つ.

(1) $\mathrm{Sel}_p(E/F_\infty)$ は Λ-cotorsion である.
(2) $\mathrm{Sel}_p(E/F_\infty)$ の特性イデアルの生成元を $f_E \in \Lambda$ とすると,

$$f_E(0) \sim \left(\prod_{\mathfrak{p}|p} \#\widetilde{E}(\mathbb{F}_\mathfrak{p})\right) \frac{\#\,\mathrm{Sel}_p(E/F)}{(\#E(F))^2} \prod_v c_v \tag{1.2}$$

が成り立つ. ただし, $\mathbb{F}_\mathfrak{p}$ は $\mathfrak{p}$ における剰余体, c_v は F の素点 v における E の局所玉河数, $a, b \in \mathbb{Q}_p$ に対して $a \sim b$ は $ab^{-1} \in \mathbb{Z}_p^\times$ のことである.

(1) は Mazur のコントロール定理からの帰結である. 式 (1.2) は次のようにして BSD 予想の p-部分への応用とみなすことができる. 前節で述べた岩澤主予想が成り立つ状況であれば $f_E(0)$ は p-進 L-関数 $\mathcal{L}_p(E/F_\infty)$ の定数項と p-進単数を除いて一致する. 一方, p-進 L-関数の定義より $\mathcal{L}_p(E/F_\infty)$ の定数項は Hasse-Weil L-値 $L(E/F,1)$ の代数的部分である. 以上のことから, この系は岩澤主予想のもとで (1.2) の右辺と $L(E/F,1)$ の代数的部分の p-進付値が等しいことを導く. これは BSD 予想の先頭項予想の p-部分を比較していることを意味する.

この問題に対する類似の結果を紹介する. まず, 一般化の方向として higher weight の方向と良超特異還元の方向の 2 つが考えられる. Higher weight に関しては Longo–Vigni [12] がある. 良超特異還元をもつ楕円曲線に対する結果としては, B. D. Kim [9] や北島–大槻 [10] が挙げられる. これらの結果は円分 $\mathbb{Z}_p$-拡大やそれに近いもの (局所体の円分 $\mathbb{Z}_p$-拡大を含むもの) に対しての結果であることに注意する. 今回,

- 素数 p が惰性する虚 2 次体 K とその反円分 $\mathbb{Z}_p$-拡大,

- K 上定義された楕円曲線 E が p で良超特異還元をもつ

という, 今までに示されていなかった状況での類似の結果が得られた.

2 主定理

この章では, 今回得られた主定理の仮定についての詳細を述べた後に主定理の主張を述べる.

2.1 主定理の仮定

まず, 代数体 F 上の楕円曲線 E が p の上の素点で良超特異還元を持つという仮定について説明する. E が p の上の素点で良超特異還元を持つ場合, これまでに述べてきた p^∞-Selmer 群は Λ-corank を持つことが知られており, 通常還元を持つ場合と同様な議論は期待できない. 小林 [11] により定義された plus/minus Selmer 群 $\mathrm{Sel}_p^{\pm}(E/F_\infty)$ と呼ばれる $\mathrm{Sel}_p(E/F_\infty)$ の部分群に着目することで, 通常還元のときと同様な議論を行うことができる. 例えば, $F = \mathbb{Q}$, F_∞/F が円分 $\mathbb{Z}_p$-拡大のときは $\mathrm{Sel}_p^{\pm}(E/F_\infty)$ は Λ-cotorsion になることが [11] で示されており, この場合の岩澤主予想もこれを用いて定式化されている.

次に, 反円分 $\mathbb{Z}_p$-拡大について説明する. K を虚 2 次体とする. K の**反円分 $\mathbb{Z}_p$-拡大** K_∞ とは, $K_\infty/\mathbb{Q}$ が Galois 拡大であり, かつその Galois 群が副二面体群 $\mathbb{Z}_p \rtimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ と同型となる唯一の $\mathbb{Z}_p$-拡大のことである. また, これは導手が p^n となる K の環類体のすべての n に対する合成体に含まれる唯一の $\mathbb{Z}_p$-拡大と特徴づけられる. この $\mathbb{Z}_p$-拡大は多くの数論的な応用を持っており, 例えば, Heegner 点の理論や Gross–Zagier と Kolyvagin の定理などに本質的にあらわれる. 以下, p が K の類数 h_K を割り切らないと仮定する. これにより, p の上にある K の任意の素点が総分岐となる.

反円分岩澤理論において, p の $K/\mathbb{Q}$ での振る舞い, つまり p が $K/\mathbb{Q}$ で分解するか惰性的であるかによって様相は大きく異なる. p が $K/\mathbb{Q}$ で分解する場合, つまり $p = \mathfrak{p}\overline{\mathfrak{p}}$ と表されるとき, $\mathfrak{p}$ による K の完備化 $K_\mathfrak{p}$ は $\mathbb{Q}_p$ と同一視できる. これにより, K の反円分 $\mathbb{Z}_p$-拡大体 K_∞ の $\mathfrak{p}$ の上にある素点 w での完備化 $K_{\infty,w}$ は $K_\mathfrak{p}$ の高さ 1 の Lubin–Tate 拡大となる. この状況での反円分岩澤理論はよく知られており, 例えば p が通常素点の場合は [2], p が超特異還元の場合は [7] などの先行研究がある. 一方, p が $K/\mathbb{Q}$ で惰性的な場合, K の素点 p での完備化 K_p は $\mathbb{Q}_p$ の不分岐 2 次拡大である. これにより, K_∞ の p の上の素点 w での完備化 $K_{\infty,w}$ は K_p の高さ 2 の Lubin–Tate 拡大体の部分体となる. この場合は技術的に難しい点があり, 楕円曲線の反円分岩澤理論を研究する上で p が分解するという条件は外せない条件であった.

K. Rubin は [13] の論文において, p が惰性的となる虚 2 次体 $K/\mathbb{Q}$ に虚数乗法をもつ楕円曲線に対する反円分岩澤理論について考察と予想 (Rubin 予想) を述べた. 近年, この Rubin 予想が A. Burungale–小林–太田 [4] により解決されたことにより, p が惰性的である状況でも高さ 1 のときと同様な議論を行うことができるようになった. 特に, plus/minus Selmer 群を定義する際に重要な「局所点からなる系」を構成することができる. この Rubin 予想自体は虚数乗法は関係なく, 局所理論 (形式群の理論) であることに注意する.

2.2 主定理

この節では今回得られた結果について述べる．前節で設けた仮定を整理すると

- 素数 p が惰性する虚 2 次体 K とその反円分 $\mathbb{Z}_p$-拡大,
- K 上定義された楕円曲線 E が p で良超特異還元をもつ

であったが, もう少し一般化した形で結果が得られる．$\mathcal{O}_p$ を K の p での完備化 K_p の整数環とする．

Theorem 2.2.1. $p > 5$ とする．F を K の有限次拡大体とし, F_∞ を F と K_∞ の合成体とする．K の素点 p は F/K で完全分解し, $p \nmid h_K[F:K]$ と仮定する．E を F 上定義された楕円曲線とし, p の上にある F の任意の素点 $\mathfrak{p}$ で良超特異還元を持つと仮定する．$\widehat{E}$ を $\mathfrak{p}$ おける E の形式群とする．任意の $\mathfrak{p} \mid p$ に対して, $\widehat{E}$ は高さ 2, パラメータ $-p$ である Lubin–Tate 形式群と $\mathcal{O}_p$ 上同型であると仮定する．このとき, $\mathrm{Sel}_p^{\pm}(E/F_\infty)$ が Λ-cotorsion であるならば, $\mathrm{Sel}_p^{\pm}(E/F_\infty)$ は指数有限の Λ-部分加群を持たない.

Remark 2.2.2. (1) p が F/K で完全分解するという仮定より, p の上にある F の任意の素点 $\mathfrak{p}$ に対して $F_\mathfrak{p} = K_p$ である．$p \nmid h_K$ という仮定より, p は K_∞/K で総分岐であり, さらに $p \nmid [F:K]$ の仮定より $\mathfrak{p}$ は F_∞/F でも総分岐となる．前節の最後にも述べた通り, $\widehat{E}$ の仮定が Rubin 予想を用いるための仮定である.

(2) 主定理 2.2.1 の $\widehat{E}$ の仮定をみたす楕円曲線 E は実際に存在する．例えば, $p > 5$ であることから $\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線 E が p で良超特異還元を持てば自動的に仮定をみたす．(定義体は適宜 base change する.) 楕円曲線 E が K の整数環 $\mathcal{O}_K$ に虚数乗法をもつ場合も定理の仮定をみたす.

A. Agboola–B. Howard [1] や A. Burungale–K. Büyükboduk–A. Lei [3] による $\mathrm{Sel}_p^{\pm}(E/F_\infty)$ の Λ-cotorsion 性の結果を適用することで, 次のような例が得られる.

Corollary 2.2.3 (CM case)**.** E を $\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線で, p で良超特異還元を持つと仮定し, $F = K$ とする．E は K の整数環に虚数乗法を持つと仮定する．ε を $L(E/\mathbb{Q}, s)$ の関数等式の符号とする．このとき, $\mathrm{Sel}_p^{-\varepsilon}(E/F_\infty)$ は非自明な指数有限 Λ-部分加群を持たない.

Corollary 2.2.4 (non-CM case)**.** E を $\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線で, p で良超特異還元を持つと仮定し, $F = K$ とする．E のコンダクターを $N = N^+N^-$ とする．ただし, N^+ は $K/\mathbb{Q}$ で分解する素数でのみ割れる自然数, N^- は $K/\mathbb{Q}$ で惰性する素数でのみ割れる自然数である．虚 2 次体 K は $(D_K, pN) = 1$, かつ N^- は奇数個の素数の積からなる平方因子を持たない自然数と仮定する．さらに, 次を仮定する:

- mod p Galois 表現 $G_\mathbb{Q} \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathbb{F}_p}(E[p])$ が $\begin{cases} \text{全射} & (p = 5), \\ \text{既約} & (p > 5). \end{cases}$
- $\ell^2 \equiv 1 \bmod p$ をみたす任意の素数 $\ell \mid N^-$ に対して, 惰性群 $I_\ell \subset G_{\mathbb{Q}_\ell}$ が $E[p]$ に非自明に作用

する．

このとき, $\mathrm{Sel}_p^{\pm}(E/F_\infty)$ は非自明な指数有限 Λ-部分加群を持たない．

R. Greenberg の結果と同様に, plus/minus Selmer group の特性イデアルと楕円曲線の BSD 不変量との間の関係についての結果も得られた．

Corollary 2.2.5. 定理 2.2.1 の仮定のもとで, さらに, $\mathrm{Sel}_p(E/F)$ は有限群であると仮定する．このとき, $\mathrm{Sel}_p^{\pm}(E/F_\infty)$ は Λ-cotorsion であり, $(f^{\pm}) \subset \Lambda$ を $\mathrm{Sel}_p^{\pm}(E/F_\infty)$ の特性イデアルとすると, 次が成り立つ．

$$|f^{\pm}(0)| \sim \#\,\mathrm{Sel}_p(E/F) \cdot \prod_v c_v,$$

ただし, c_v は E の v における局所玉河数である．

謝辞. 本稿および集会における講演の機会を与えてくださったオーガナーザーの皆さまに感謝申し上げます．また, 書きかけの原稿に丁寧な指摘をしてくださった足立 大雅くんに感謝申し上げます．本研究は JST SPRING JPMJSP2136 の支援を受けたものである．

参考文献

[1] Adebisi Agboola and Benjamin Howard. Anticyclotomic Iwasawa theory of CM elliptic curves. II. *Math. Res. Lett.*, 12(5-6):611–621, 2005.

[2] M. Bertolini and H. Darmon. Iwasawa's main conjecture for elliptic curves over anticyclotomic $\mathbb{Z}_p$-extensions. *Ann. of Math. (2)*, 162(1):1–64, 2005.

[3] Ashay Burungale, Kâzım Büyükboduk, and Antonio Lei. Anticyclotomic iwasawa theory of abelian varieties of GL_2-type at non-ordinary primes. *Advances in Mathematics (to appear)*.

[4] Ashay Burungale, Shinichi Kobayashi, and Kazuto Ota. Rubin's conjecture on local units in the anticyclotomic tower at inert primes. *Ann. of Math. (2)*, 194(3):943–966, 2021.

[5] Ralph Greenberg. The structure of Selmer groups. volume 94, pages 11125–11128. 1997. Elliptic curves and modular forms (Washington, DC, 1996).

[6] Ralph Greenberg. *Iwasawa theory for elliptic curves*, pages 51–144. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 1999.

[7] Adrian Iovita and Robert Pollack. Iwasawa theory of elliptic curves at supersingular primes over $\mathbb{Z}_p$-extensions of number fields. *J. Reine Angew. Math.*, 598:71–103, 2006.

[8] Kazuya Kato. p-adic Hodge theory and values of zeta functions of modular forms. In Berthelot Pierre, Fontaine Jean-Marc, Illusie Luc, Kato Kazuya, and Rapoport Michael, editors, *Cohomologie p-adiques et applications arithmétiques (III)*, number 295 in Astérisque. Société mathématique de France, 2004.

[9] Byoung Du Kim. The plus/minus Selmer groups for supersingular primes. *J. Aust. Math. Soc.*, 95(2):189–200, 2013.

[10] Takahiro Kitajima and Rei Otsuki. On the plus and the minus Selmer groups for elliptic curves at supersingular primes. *Tokyo J. Math.*, 41(1):273–303, 2018.

[11] Shin-ichi Kobayashi. Iwasawa theory for elliptic curves at supersingular primes. *Invent. Math.*, 152(1):1–36, 2003.

[12] Matteo Longo and Stefano Vigni. On Bloch-Kato Selmer groups and Iwasawa theory of p-adic Galois representations. *New York J. Math.*, 27:437–467, 2021.

[13] Karl Rubin. Local units, elliptic units, Heegner points and elliptic curves. *Invent. Math.*, 88(2):405–422, 1987.

[14] Christopher Skinner. Lectures on the Iwasawa theory of elliptic curves. `https://swc-math.github.io/aws/2018/2018SkinnerNotes.pdf`.