移流拡散方程式の解の漸近挙動について

佐藤槙哉 (Shinya SATO) *

信州大学 大学院総合理工学研究科 工学専攻

福田一貴 (Ikki FUKUDA)†

信州大学 工学部 工学基礎部門

概要

本講演では, 移流拡散方程式の初期値問題を取り扱う. この問題の解は, 熱方程式と同様のオーダーで減衰し, 漸近形も同様に熱核の定数倍となることが知られている. 一方, その漸近率と解の第二次漸近形に関しては, 非線形項の指数 q に応じて変化する. 特に, 臨界冪 $q=1+\frac{2}{n}$ の場合には非線形項の影響が強く現れ, 第二次漸近形および漸近率に対数項が現れる. 本研究では, 解の第三次漸近形を具体的に構成することで, その漸近率を改良した最良な漸近率を導出することに成功したので, その結果について報告する. また, 一般論から得られる結果との比較についても述べる. 本講演の内容は信州大学の福田一貴氏との共同研究に基づく.

1 導入

本研究では, 次の偏微分方程式の初期値問題について考える：

$$\begin{aligned} &\partial_t u - \Delta u = a\cdot\nabla\left(|u|^{q-1}\,u\right), \quad x\in\mathbb{R}^n,\ t>0, \\ &u(x,0)=u_0(x), \quad x\in\mathbb{R}^n. \end{aligned} \tag{1.1}$$

ここで, $u=u(x,t)$ は実数値の未知関数を表し, $u_0(x)$ は与えられた初期データ, $n\ge 1$, $q>1$, $a\in\mathbb{R}^n$ とする. また, 偏微分作用素 ∂_t, ∇, Δ は, それぞれ以下で定義されるものとする.

$$\partial_t \coloneqq \frac{\partial}{\partial t}, \quad \nabla \coloneqq \left(\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right), \quad \Delta \coloneqq \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}.$$

この偏微分方程式 (1.1) は移流拡散方程式と呼ばれるものであり, 物理量の移流と拡散のプロセスを記述する方程式として, 自然科学や工学の様々な場面で現れるものである. 方程式中の $-\Delta u$ の項が拡散効果, $a\cdot\nabla(|u|^{q-1}u)$ の項が非線形の移流効果を表し, それらの相互作用によって解の振る舞いが決定されて, 現象が時間発展してゆくというモデルである. 本研究では, この初期値問題 (1.1) の解の長時間漸近挙動について考える. 現象の時間発展を理解するためには, 対応する解が時間の経過に伴ってどう変化していくのかを解析すればよいと考えられる. しかし一般に, 非線形の偏微分方程式については, その解の形を具体的に書き下すことは困難であるため, 直接解の形を見てそのグラフを解析するなどということは期待できない. 一方, たとえ解の具体的な表示を得ることができない場合でも, 時間無限大での解の挙動については情報が得られる場合がある. そこで本研究では, 時間無限大で (1.1) の解を十分良く近似する関数, 即ち解の漸近形を詳しく解析することにより, 解の構造を理論的に理解することを目標とする. 具体的には, 解の漸近形をより高次の項まで構成して, 解の高次漸近展開公式を導出し, 解が漸近形へどのようなオーダーで漸近していくのかについて明らかにする.

* E-mail: 22w2048k@shinshu-u.ac.jp

† E-mail: i_fukuda@shinshu-u.ac.jp

記号. ここで, 以下の本文で使用する記号等を幾つか説明・定義しておく.

- $\alpha \coloneqq (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ で多重指数を表し, $\partial_x^\alpha f \coloneqq \dfrac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$ と定める.
- 実数 $1 \leq p \leq \infty$ に対して, $L^p(\mathbb{R}^n)$ は通常の Lebesgue 空間を表すとする.
- 関数 $K(x)$ を用いて, 重み付き Lebesgue 空間 $L^p(\mathbb{R}^n; K(x))$ を次のように定義する.

$$L^p(\mathbb{R}^n; K(x)) \coloneqq \left\{ f \in L^p\left(\mathbb{R}^n\right) \;\middle|\; \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p K(x)\, dx < \infty \right\}.$$

- 整数 $k \geq 0$ と実数 $1 \leq p \leq \infty$ に対して, Sobolev 空間 $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ を次で定義する.

$$W^{k,p}\left(\mathbb{R}^n\right) \coloneqq \left\{ f \in L^p\left(\mathbb{R}^n\right) \;\middle|\; \|f\|_{W^{k,p}} \coloneqq \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial_x^\alpha f\|_{L^p}^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}.$$

- $I \subseteq [0, \infty)$ を区間とし, X を Banach 空間とする. このとき, $L^\infty(I; X)$ は X に値を取る I 上の本質的に有界な可測関数全体を表す. 同様に, $C(I; X)$ は X に値を取る I 上の連続関数全体を表す. さらに, $C^1(I; X)$ で X に値を取る I 上で一階連続微分可能な関数全体を表す.
- 関数 $f(x)$ の Fourier 変換と関数 $g(\xi)$ の Fourier 逆変換を次で定義する.

$$\hat{f}(\xi) = \mathcal{F}[f](\xi) \coloneqq \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} f(x)\, dx, \quad \mathcal{F}^{-1}[g](x) \coloneqq \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi} g(\xi)\, d\xi.$$

- 関数 $f(x)$ と $g(x)$ の畳み込み $(f * g)(x)$ を次で定義する.

$$(f * g)(x) \coloneqq \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y)\, dy.$$

  また, 関数 $F(x,t)$ と $g(x)$ の x 変数についての畳み込みを $(F(t) * g)(x)$ と表記する.
- 本稿全体を通して, C は様々な正の定数を表すこととし, 互いに異なるものであっても同じ C で表す. この定数 C は各種パラメータに依存することはあるが, 変数 x と t には依存しない.

2　既知の結果

この節では, 初期値問題 (1.1) の解の長時間漸近挙動に関する, 先行研究における既知の結果について述べよう. はじめに, (1.1) の線形化方程式, 即ち $a = 0$ の場合について考える：

$$\begin{aligned} &\partial_t u - \Delta u = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0, \\ &u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned} \tag{2.1}$$

この方程式は熱方程式と呼ばれており, 最も基本的な偏微分方程式の一つとして知られている. この (2.1) は Fourier 変換を用いて具体的に解くことができる. 実際, 方程式と初期値を x 変数に関して Fourier 変換すると, Fourier 変換の微分法則により, 次が得られる.

$$\partial_t \hat{u}(\xi,t) + |\xi|^2 \hat{u}(\xi,t) = 0, \quad \hat{u}(\xi,0) = \hat{u}_0(\xi).$$

上式を時間に関する常微分方程式として解くと, $\hat{u}(\xi,t) = \hat{u}_0(\xi) e^{-t|\xi|^2}$ が得られるので, これを Fourier 逆変換すれば解 $u(x,t)$ が求められる. 実際, 熱核と呼ばれる関数 $G(x,t)$ を

$$G(x,t) \coloneqq \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}, \quad x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0 \tag{2.2}$$

と定義すると, $\hat{G}(\xi,t)=(2\pi)^{-\frac{n}{2}}e^{-t|\xi|^2}$ となるので, Fourier 変換の合成積法則により, (2.1) の解は

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \mathcal{F}^{-1}\left[\hat{u}_0(\xi)e^{-t|\xi|^2}\right](x) = \mathcal{F}^{-1}\left[(2\pi)^{\frac{n}{2}}\hat{G}(\xi,t)\hat{u}_0(\xi)\right](x) = \mathcal{F}^{-1}\left[(\widehat{G(t)*u_0})(\xi)\right](x) \\ &= \left(G(t)*u_0\right)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} G(x-y,t)u_0(y)\,dy, \quad x\in\mathbb{R}^n,\ t>0 \end{aligned} \tag{2.3}$$

と表現できる. このように, 線形の微分方程式は非線形の問題と違って解を具体的に求めることができる. しかし, これで完全に解の振る舞いが分かったとはまだ言えない. 実際, (2.3) を見てみると, 解が畳込みの積分の形で表現されているため, 積分が計算できない限り, 具体的な形状は直接には分からない. そこで, (2.3) を用いて, 解 $u(x,t)$ が $t\to\infty$ でどのような振る舞いをするのか, その長時間漸近挙動を解析する. まず, $g(x):=(4\pi)^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{|x|^2}{4}}$ とおくと, (2.2) より, 熱核 $G(x,t)$ に対して,

$$\partial_x^\alpha G(x,t) = t^{-\frac{n}{2}-\frac{|\alpha|}{2}}\left(\partial_x^\alpha g\right)\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right), \quad x\in\mathbb{R}^n,\ t>0$$

が成り立つ. このことから, $p\in[1,\infty]$ に対して, 熱核 $G(x,t)$ は次の L^p-減衰評価を満たす.

$$\left\|\partial_x^\alpha G(t)\right\|_{L^p} \le Ct^{-\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)-\frac{|\alpha|}{2}}, \quad t>0. \tag{2.4}$$

従って, (2.3) と Young の不等式, (2.4) により, (2.1) の解 $u(x,t)$ に対しても, 同様の L^p-減衰評価

$$\left\|\partial_x^\alpha u(t)\right\|_{L^p} = \left\|\partial_x^\alpha G(t)*u_0\right\|_{L^p} \le C\left\|u_0\right\|_{L^1} t^{-\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)-\frac{|\alpha|}{2}}, \quad t>0 \tag{2.5}$$

が成立する. このことから, (2.1) の解 $u(x,t)$ は時間経過に伴い $O(t^{-\frac{n}{2}(1-\frac{1}{p})})$ のオーダーで減衰し, さらに微分する毎に減衰率が $1/2$ だけ改善されることが分かった. それでは, 解 $u(x,t)$ はどのような形状で減衰するのだろうか. その具体的な表示について考察しよう. まず, 平均値の定理により,

$$G(x-y,t) = G(x,t) - \int_0^1 y\cdot\nabla G(x-\theta y,t)\,d\theta \tag{2.6}$$

が成り立つから, (2.3) により, 次が得られる.

$$\begin{aligned} \left(G(t)*u_0\right)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} G(x-y,t)u_0(y)\,dy \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} u_0(y)\,dy\right)G(x,t) - \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_0^1 y\cdot\nabla G(x-\theta y,t)\,d\theta\right)u_0(y)\,dy. \end{aligned}$$

上式を利用すると, $u_0\in L^1(\mathbb{R}^n)$ のとき, $p\in[1,\infty]$ に対して, 次の漸近公式が導ける.

$$\lim_{t\to\infty} t^{\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)}\left\|G(t)*u_0 - MG(t)\right\|_{L^p} = 0. \tag{2.7}$$

ここで, $M:=\int_{\mathbb{R}^n}u_0(x)\,dx$ である. なお, 詳しい証明については儀我–儀我 [4] を参照せよ. この漸近公式 (2.7) により, (2.1) の解 $u(x,t)$ は時間無限大においては熱核の定数倍である $MG(x,t)$ で近似できて, さらにその漸近率は評価 (2.5) での $O(t^{-\frac{n}{2}(1-\frac{1}{p})})$ よりも改善された $o(t^{-\frac{n}{2}(1-\frac{1}{p})})$ で与えられることが分かる. なお, この熱方程式 (2.1) に対してはより詳細な解の漸近挙動も解析されており, 解の高次漸近形についても導出されている. 実際, (2.6) に対して, 再び平均値の定理を用いると,

$$G(x-y,t) = G(x,t) - y\cdot\nabla G(x,t) + \int_0^1 (1-\theta)y\cdot\left(D^2G(x-\theta y,t)y\right)d\theta$$

となるので, 上の条件に加えて $|x|u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$ も仮定することで, $p \in [1,\infty]$ に対して, 漸近公式

$$\lim_{t\to\infty} t^{\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)+\frac{1}{2}} \|G(t)*u_0 - MG(t) + m\cdot\nabla G(t)\|_{L^p} = 0 \tag{2.8}$$

が導かれる. ここで, $m \coloneqq (m_1, m_2, \cdots, m_n)$, $m_i \coloneqq \int_{\mathbb{R}^n} x_i u_0(x)\,dx$ である. 上式 (2.8) は解の時間無限大での第一次漸近形が $MG(x,t)$ というだけでなく, 第二次漸近形が $-m\cdot\nabla G(x,t)$ で与えられるということを意味する. この漸近展開はさらに拡張できて, Duoandikoetxea–Zuazua [1] により, 一般の高次漸近展開公式も得られており, $G(x,t)$ の高階の導関数が高次漸近形として順次現れる.

次に, 元の非線形問題 (1.1) について, 即ち $a \neq 0$ の場合における既知の結果について解説しよう. この初期値問題 (1.1) は Escobedo–Zuazua [2] および Zuazua [7] によって詳しく研究されており, 解の漸近挙動についても非常に多くの結果が得られている. まず, (1.1) の時間大域解の存在と一意性およびその解の減衰評価については, Escobedo–Zuazua [2] によって既に示されている. 実際, 先程と同様に Fourier 変換を通じて方程式を変換すると, 対応する積分方程式

$$u(x,t) = \left(G(t)*u_0\right)(x) + \int_0^t \left(a\cdot\nabla G(t-\tau) * \left(|u|^{q-1}u\right)(\tau)\right)(x)\,d\tau \tag{2.9}$$

が得られる. この積分方程式を直接解析することにより, 次の結果が示される.

命題 2.1 (Escobedo–Zuazua [2]). $q > 1$, $a \in \mathbb{R}^n$ とし, 初期値は次を満たすと仮定する.

$$u_0 \in L^1\left(\mathbb{R}^n\right) \cap L^\infty\left(\mathbb{R}^n\right).$$

このとき, 初期値問題 (1.1) の唯一つの時間大域解

$$u \in C\left([0,\infty); L^1\left(\mathbb{R}^n\right)\right) \cap C\left((0,\infty); L^\infty\left(\mathbb{R}^n\right)\right) \cap L^\infty\left(\mathbb{R}^n \times [0,\infty)\right)$$

が存在する. また, $p \in (1,\infty)$ に対して, 解 $u(x,t)$ は次の性質を満たす.

$$u \in C\left((0,\infty); W^{2,p}\left(\mathbb{R}^n\right)\right) \cap C^1\left((0,\infty); L^p(\mathbb{R}^n)\right).$$

さらに, $p \in [1,\infty]$ に対して, 解 $u(x,t)$ は次の L^p-減衰評価を満たす.

$$\|u(t)\|_{L^p} \le Ct^{-\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)}, \quad t > 0. \tag{2.10}$$

この評価 (2.10) から, 初期値問題 (1.1) の解 $u(x,t)$ は熱方程式 (2.1) の解と同様のオーダーで減衰するということが分かった. なお, これらの結果は Zuazua のレクチャーノート [6] にも非常に詳しくまとめられている. それでは解の漸近形についてはどうであろうか. これに関しては, Escobedo–Zuazua の同一の論文 [2] によって, 次の漸近公式が導出されている.

命題 2.2 (Escobedo–Zuazua [2]). $q > 1 + \frac{1}{n}$, $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n; 1+|x|) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ とする. このとき, $p \in [1,\infty]$ に対して, $t \ge 1$ のとき, 初期値問題 (1.1) の解 $u(x,t)$ は次の漸近公式を満たす.

$$\|u(t) - MG(t)\|_{L^p} \le C \begin{cases} t^{-\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)-\frac{1}{2}}, & q > 1 + \dfrac{2}{n}, \\ t^{-\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)-\frac{1}{2}}\log t, & q = 1 + \dfrac{2}{n}, \\ t^{-\frac{n}{2}\left(q-\frac{1}{p}\right)+\frac{1}{2}}, & 1 + \dfrac{1}{n} < q < 1 + \dfrac{2}{n}. \end{cases} \tag{2.11}$$

この結果から, 初期値問題 (1.1) に対して, $q > 1 + \frac{1}{n}$ の場合には線形部分が支配的となり, 解 $u(x,t)$ は熱方程式 (2.1) の場合と同様に熱核の定数倍 $MG(x,t)$ に漸近することが分かる ($q = 1 + \frac{1}{n}$ の場合には, (1.1) の持つ自己相似解に漸近する. cf. [2]). しかし解の挙動が全く同じというわけではなく, $MG(x,t)$ への漸近率は, $q = 1 + \frac{2}{n}$ を臨界に三つに分岐する. なお, この指数は, (2.9) の第二項である非線形項を積分したときに出てくる, 次式の最右辺の積分の可積分性に起因して現れる.

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} |u(x,\tau)|^q \, dx \, d\tau = \int_0^t \|u^q(\cdot,\tau)\|_{L^1} \, d\tau \le C \int_0^t (1+\tau)^{-\frac{n}{2}(q-1)} \, d\tau. \tag{2.12}$$

さらに, 非線形項の影響は解の第二次漸近形にはより顕著に現れる. 実際, Zuazua [7] では非線形項の指数 q の (2.11) における三つの場合分けに応じて, 解の第二次漸近形が本質的に異なることが示されている. 特に, 臨界的な状況である $q = 1 + \frac{2}{n}$ の場合には, 解の第二次漸近形に非線形項の影響が強く現れることが知られている. ここでは, [7] から $q = 1 + \frac{2}{n}$ の場合の結果を抜粋して述べよう.

命題 2.3 (Zuazua [7])**.** $q = 1 + \frac{2}{n}$ とし, 命題 2.2 の条件に加えて, $u_0 \in L^2\left(\mathbb{R}^n; e^{\frac{|x|^2}{4}}\right)$ を仮定する. このとき, $p \in [1,\infty]$ に対して, 初期値問題 (1.1) の解 $u(x,t)$ は次の漸近公式を満たす.

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t^{\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)+\frac{1}{2}}}{\log t} \left\| u(t) - MG(t) - \alpha_n |M|^{\frac{2}{n}} M (\log t) a \cdot \nabla G(t) \right\|_{L^p} = 0. \tag{2.13}$$

ここで, $\alpha_n := \frac{1}{4\pi}\left(1 + \frac{2}{n}\right)^{-\frac{n}{2}}$ である.

熱方程式に対する解の第二次漸近公式 (2.8) と上記の漸近公式 (2.13) を比較すると, 熱方程式の場合には解の第二次漸近形は $-m \cdot \nabla G(x,t)$ で与えられたのに対して, (1.1) の解の第二次漸近形は $\alpha_n |M|^{\frac{2}{n}} M (\log t) a \cdot \nabla G(x,t)$ であり, 定数倍の差だけでなく減衰率的にも $\log t$ のズレがあり, 本質的に異なるものであることが分かる. なお, この $\log t$ は (2.12) の積分から導かれるもので, 非線形項の影響から来るものであることに注意する. また, 漸近公式 (2.8) と (2.13) では, その第二次漸近形への漸近率にも違いがあり, (2.8) では $o(t^{-\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)-\frac{1}{2}})$ なのに対して, (2.13) では $o(t^{-\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)-\frac{1}{2}} \log t)$ と $o(\log t)$ だけ遅くなっている. 一方, 石毛–川上 [5] では (1.1) の解 $u(x,t)$ に対して, この漸近率を改善して (2.8) と同様のオーダー $o(t^{-\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)-\frac{1}{2}})$ を実現した, 次の漸近公式が導出されている.

命題 2.4 (石毛–川上 [5])**.** $q > 1 + \frac{1}{n}$, $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n; 1+|x|) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ とする. このとき, $p \in [1,\infty]$ に対して, 初期値問題 (1.1) の解 $u(x,t)$ は次の漸近公式を満たす.

$$\lim_{t\to\infty} t^{\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)+\frac{1}{2}} \|u(t) - \tilde{u}(t)\|_{L^p} = 0. \tag{2.14}$$

ここで, 関数 $\tilde{u}(x,t)$ は次で定義される.

$$\begin{aligned}
\tilde{u}(x,t) &:= MG(x,1+t) - c(t) \cdot \nabla G(x,1+t) \\
&\qquad + |M|^{q-1} M \int_0^t \left(a \cdot \nabla G(t-\tau) * G(1+\tau)^q\right)(x) \, d\tau, \\
c_i(t) &:= \int_{\mathbb{R}^n} x_i u(x,t) \, dx - |M|^{q-1} M \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} x_i \left\{a \cdot \nabla \left(G(x,1+\tau)^q\right)\right\} \, dx \, d\tau, \\
c(t) &:= (c_1(t), c_2(t), \cdots, c_n(t)).
\end{aligned}$$

なお, 実際の論文 [5] では, 移流拡散方程式 (1.1) だけでなく, より一般の放物型偏微分方程式

$$\begin{aligned} &\partial_t u - \Delta u = F(x,t,u,\nabla u), \quad x \in \mathbb{R}^n,\ t>0, \\ &u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \end{aligned} \tag{2.15}$$

の解の長時間漸近挙動が研究されており, 上記の命題 2.4 はその一般論からの帰結である. 詳しい $F(x,t,u,\nabla u)$ の仮定や, より一般の方程式 (2.15) に対する結果については, 元の論文 [5] を参照せよ.

さて, この命題 2.4 によって, 解の $o(t^{-\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)-\frac{1}{2}})$ までのオーダーでの漸近展開は達成されたが, 公式 (2.13) と (2.14) ではそれぞれ漸近形の表現が異なっていることに注意する. 上記の (2.14) では, $q>1+\frac{1}{n}$ を満たす一般の指数 q に対して, 統一して (1.1) の解の漸近挙動を表現できているという利点がある. 一方, [7] で得られている結果とは異なり, 指数 q が臨界冪 $q=1+\frac{2}{n}$ の場合の非線形項の漸近形への影響は見えにくくなっている. 反対に, [7] では非線形項に応じて第二次漸近形が詳かく分解して表現されているが, 漸近率は $o(t^{-\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)-\frac{1}{2}}\log t)$ と遅くなっている. そこで本研究では, Zuazua [7] が導いた解の漸近形と同一の表現を持つ形, 即ちあくまで第一次漸近形は $MG(x,t)$, 第二次漸近形は $\alpha_n \left|M\right|^{\frac{2}{n}} M(\log t) a\cdot\nabla G(x,t)$ であると考えたときに, 漸近率 $o(t^{-\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)-\frac{1}{2}})$ が実現できるかどうか, 即ち (2.13) で与えられた漸近率 $o(t^{-\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)-\frac{1}{2}}\log t)$ が最良であるかどうかについて考察を行った. 具体的には, (2.15) に対する一般論を経由せずに (1.1) を直接解析して, [7] で得られた解の第二次漸近形の情報を利用することで, 解の第三次漸近形を新規に構成して, 新しい解の漸近公式を導出した. その結果として, 第三次漸近形への漸近率として $o(t^{-\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)-\frac{1}{2}})$ を実現することに成功し, そこからの系として, 第二次漸近形への最良な漸近率を特定することに成功した.

3　研究の主結果

この節では本研究の主結果を紹介する. 今回我々は, 積分方程式 (2.9) の Duhamel 項の解の第二次漸近形を新規に構成することにより, (1.1) の解の第三次漸近形を導出することに成功した. 主結果を述べるために, 新しい関数 $\Psi(x,t)$ を次で定義する.

$$\Psi(x,t) := t^{-\frac{n}{2}-\frac{1}{2}}\Psi_*\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right),\ \Psi_*(x) := a\cdot\nabla\left(\int_0^1 \left(G(1-s)*F(s)\right)(x)\,ds\right), \tag{3.1}$$

$$F(y,s) := s^{-\frac{n}{2}-1}F_*\left(\frac{y}{\sqrt{s}}\right),\ F_*(y) := \frac{1}{2^{n+2}\pi^{\frac{n}{2}+1}}\left\{e^{-\frac{|y|^2}{4}\left(1+\frac{2}{n}\right)} - \left(1+\frac{2}{n}\right)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|y|^2}{4}}\right\}. \tag{3.2}$$

これに加えて, 定数 $\mathcal{M}$ を次で定義する.

$$\mathcal{M} := \int_0^1\int_{\mathbb{R}^n}\left(|u|^{\frac{2}{n}}u\right)(y,\tau)\,dy\,d\tau + \int_1^\infty\int_{\mathbb{R}^n}\left(|u|^{\frac{2}{n}}u - |MG|^{\frac{2}{n}}MG\right)(y,\tau)\,dy\,d\tau.$$

上記の記号の下, (1.1) の解に対する新しい漸近公式として, 次が成り立つ.

定理 3.1 (主結果)**.** $q=1+\frac{2}{n}$, $u_0 \in L^1\left(\mathbb{R}^n; 1+|x|\right)\cap L^\infty\left(\mathbb{R}^n\right)$ と仮定する. このとき, $p\in[1,\infty]$ に対して, 初期値問題 (1.1) の解 $u(x,t)$ は次の漸近公式を満たす.

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} t^{\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)+\frac{1}{2}}\Big\| & u(t) - MG(t) - \alpha_n|M|^{\frac{2}{n}}M(\log t)a\cdot\nabla G(t) \\ & - (\mathcal{M}a - m)\cdot\nabla G(t) - \left(|M|^{\frac{2}{n}}M\right)\Psi(t)\Big\|_{L^p} = 0. \end{aligned} \tag{3.3}$$

上記の漸近公式 (3.3) は, (1.1) の解の第三次漸近形が $(\mathcal{M}a - m)\cdot\nabla G(x,t) + \left(|M|^{\frac{2}{n}}M\right)\Psi(x,t)$ で与えられ, さらにその第三次漸近形への漸近率として, 命題 2.4 の (2.14) と同様のオーダー $o(t^{-\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)-\frac{1}{2}})$ が実現されることを意味する. また, 解の第一次・第二次の漸近形の形状は Zuazua [7] で得られたものと同一の表現であることから, これは命題 2.3 の漸近公式 (2.13) の拡張になっている. さらに, $\Psi(x,t)$ の定義 (3.1) に注意すれば, この定理から直ちに次の結果も得られる.

系 3.2. 定理 3.1 の仮定の下, $t\to\infty$ で次の漸近公式が成り立つ.

$$\left\|u(t) - MG(t) - \alpha_n |M|^{\frac{2}{n}} M(\log t)a\cdot\nabla G(t)\right\|_{L^p} = (C_* + o(1))\, t^{-\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)-\frac{1}{2}}. \tag{3.4}$$

ここで, $C_* := \left\|(\mathcal{M}a - m)\cdot\nabla G(1) + |M|^{\frac{2}{n}} M\Psi_*\right\|_{L^p}$ である.

注意 3.3. $C_* \neq 0$ の場合, 上式 (3.4) は解の第二次漸近形への上下からの評価を意味する. 従って, このとき定理 2.3 の (2.13) で得られた漸近率 $o(t^{-\frac{n}{2}(1-\frac{1}{p})-\frac{1}{2}}\log t)$ は最良ではなく改良することができて, $O(t^{-\frac{n}{2}(1-\frac{1}{p})-\frac{1}{2}})$ が最良の漸近率となる. 一方, $C_* = 0$ の場合, (3.4) は次式の成立を意味する.

$$\lim_{t\to\infty} t^{\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)+\frac{1}{2}} \left\|u(t) - MG(t) - \alpha_n |M|^{\frac{2}{n}} M(\log t)a\cdot\nabla G(t)\right\|_{L^p} = 0.$$

これは, $C_* = 0$ の場合には第二次漸近形への漸近率は, $O(t^{-\frac{n}{2}(1-\frac{1}{p})-\frac{1}{2}})$ もさらに最良ではなくなり, より改善された漸近率 $o(t^{-\frac{n}{2}(1-\frac{1}{p})-\frac{1}{2}})$ が得られることを意味する. なお, これらに関連する結果は, 類似の構造を持つ一次元の散逸・分散型方程式に対して, [3] でも得られていることに注意する.

4 主結果の証明の概略

この節では, 本研究の主結果である定理 3.1 の証明の概略について述べる. 以下, $q = 1 + \frac{2}{n}$ とする. まず, (1.1) に対応する積分方程式 (2.9) を考えて, その Duhamel 項を $D(x,t)$ とおく.

$$\begin{aligned} \text{i.e.}\ \ u(x,t) &= (G(t)*u_0)(x) + \int_0^t \left(a\cdot\nabla G(t-\tau) * \left(|u|^{\frac{2}{n}}u\right)(\tau)\right)(x)\,d\tau \\ &=: (G(t)*u_0)(x) + D(x,t). \end{aligned} \tag{4.1}$$

上式の第一項 $(G(t)*u_0)(x)$ に対する漸近公式は (2.8) によって既に与えられているため, Duhamel 項 $D(x,t)$ の漸近公式を導出すればよい. 実際, $D(x,t)$ の第二次漸近公式として, 次が成り立つ.

定理 4.1. $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n; 1+|x|) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ とすると, $D(x,t)$ に対して, 次の漸近公式が成り立つ.

$$\lim_{t\to\infty} t^{\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)+\frac{1}{2}} \left\|D(t) - \alpha_n|M|^{\frac{2}{n}}M(\log t)a\cdot\nabla G(t) - \mathcal{M}a\cdot\nabla G(t) - \left(|M|^{\frac{2}{n}}M\right)\Psi(t)\right\|_{L^p} = 0.$$

ここで, この定理を示すために, 次の新しい関数 $v(x,t)$ と $w(x,t)$ を導入する.

$$\begin{aligned} v(x,t) &= \int_1^t \left(a\cdot\nabla G(t-\tau) * \left(|G|^{\frac{2}{n}}G\right)(\tau)\right)(x)\,d\tau, \\ w(x,t) &= \int_0^1 \left(a\cdot\nabla G(t-\tau) * \left(|u|^{\frac{2}{n}}u\right)(\tau)\right)(x)\,d\tau \\ &\quad + \int_1^t \left(a\cdot\nabla G(t-\tau) * \left(|u|^{\frac{2}{n}}u - |MG|^{\frac{2}{n}}MG\right)(\tau)\right)(x)\,d\tau. \end{aligned}$$

いま, 上記の $v(x,t)$ と $w(x,t)$ を用いると, (4.1) の Duhamel 項 $D(x,t)$ は次のように分割できる.

$$
\begin{aligned}
D(x,t) &= \int_0^t \left(a\cdot\nabla G(t-\tau) * \left(|u|^{\frac{2}{n}} u\right)(\tau)\right)(x)\,d\tau \\
&= \int_1^t \left(a\cdot\nabla G(t-\tau) * \left(|MG|^{\frac{2}{n}} MG\right)(\tau)\right)(x)\,d\tau \\
&\quad + \int_0^1 \left(a\cdot\nabla G(t-\tau) * \left(|u|^{\frac{2}{n}} u\right)(\tau)\right)(x)\,d\tau \\
&\quad + \int_1^t \left(a\cdot\nabla G(t-\tau) * \left(|u|^{\frac{2}{n}} u - |MG|^{\frac{2}{n}} MG\right)(\tau)\right)(x)\,d\tau \\
&= |M|^{\frac{2}{n}} M v(x,t) + w(x,t).
\end{aligned}
$$

このことから, 次の関係式が成り立つ.

$$
\begin{aligned}
&D(x,t) - \alpha_n |M|^{\frac{2}{n}} M (\log t) a\cdot\nabla G(x,t) - \mathcal{M} a\cdot\nabla G(x,t) - \left(|M|^{\frac{2}{n}} M\right)\Psi(x,t) \\
&= |M|^{\frac{2}{n}} M \left\{ v(x,t) - \alpha_n(\log t) a\cdot\nabla G(x,t) - \Psi(x,t)\right\} + \left\{ w(x,t) - \mathcal{M} a\cdot\nabla G(x,t)\right\}.
\end{aligned}
$$

従って, 定理 4.1 を示すには上式の第一項と第二項を評価すればよい. 実際, 次の命題が成り立つ.

命題 4.2. $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n; 1+|x|) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ とすると, $v(x,t)$ に対して, 次の漸近公式が成り立つ.

$$
\|v(t) - \alpha_n(\log t) a\cdot\nabla G(t) - \Psi(t)\|_{L^p} \le C t^{-\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)-1}, \quad t > 1. \tag{4.2}
$$

命題 4.3. $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n; 1+|x|) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ とすると, $w(x,t)$ に対して, 次の漸近公式が成り立つ.

$$
\lim_{t\to\infty} t^{\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)+\frac{1}{2}} \|w(t) - \mathcal{M} a\cdot\nabla G(t)\|_{L^p} = 0.
$$

上記の命題 4.3 については, 放物型偏微分方程式の解の漸近解析の手法を応用すれば, 比較的簡単に証明できるため, ここでは本研究のメインパートに当たる, 命題 4.2 の証明について述べよう.

命題 4.2 の証明. まず, 熱核 $G(x,t)$ が $\partial_t(a\cdot\nabla G(x,t)) = \Delta(a\cdot\nabla G(x,t))$ を満たすことに着目し, $V(x,t) \coloneqq \alpha_n(\log t) a\cdot\nabla G(x,t)$ を時間変数 t で微分すると, 次が成り立つ.

$$
\begin{aligned}
\partial_t V(x,t) &= \frac{\alpha_n}{t}(a\cdot\nabla G(x,t)) + \alpha_n(\log t)\partial_t(a\cdot\nabla G(x,t)) \\
&= \frac{\alpha_n}{t}(a\cdot\nabla G(x,t)) + \alpha_n(\log t)\Delta(a\cdot\nabla G(x,t)).
\end{aligned}
$$

従って, $V(x,t)$ は次の初期値問題の解となることが分かる.

$$
\begin{aligned}
&\partial_t V - \Delta V = \frac{\alpha_n}{t}(a\cdot\nabla G(x,t)), \quad x\in\mathbb{R}^n,\ t>1, \\
&V(x,1) = 0, \quad x\in\mathbb{R}^n.
\end{aligned}
$$

これは非斉次の熱方程式であるので, 解の表現公式を用いれば, $V(x,t)$ は次の形に書き換えられる.

$$
V(x,t) = \alpha_n \int_1^t \tau^{-1}\left(G(t-\tau) * (a\cdot\nabla G(\tau))\right)(x)\,d\tau.
$$

ここで, $(|G|^{\frac{2}{n}}G-\alpha_n\tau^{-1}G)(y,\tau)=\tau^{-\frac{n}{2}-1}F_*(\frac{y}{\sqrt{\tau}})$ が成り立つことに注意すると, 次が得られる.

$$v(x,t)-V(x,t)=a\cdot\nabla\int_1^t\tau^{-\frac{n}{2}-1}\int_{\mathbb{R}^n}G(x-y,t-\tau)F_*\left(\frac{y}{\sqrt{\tau}}\right)dy\,d\tau=:a\cdot\nabla K(x,t). \tag{4.3}$$

上記の $K(x,t)$ に対して, 熱核の自己相似性に着目して, 変数変換を複数回行えば, 次が得られる.

$$\begin{aligned}
K(x,t)&=\int_1^t\tau^{-\frac{n}{2}-1}\int_{\mathbb{R}^n}G(x-y,t-\tau)F_*\left(\frac{y}{\sqrt{\tau}}\right)dy\,d\tau\\
&=\int_1^t\tau^{-1}\int_{\mathbb{R}^n}G\left(x-\sqrt{\tau}z,t-\tau\right)F_*\left(z\right)dz\,d\tau\qquad\left(z=\frac{y}{\sqrt{\tau}}\right)\\
&=\int_{\frac{1}{t}}^1 s^{-1}\int_{\mathbb{R}^n}G\Big(x-\sqrt{ts}z,t(1-s)\Big)F_*\left(z\right)dz\,ds\qquad(\tau=ts)\\
&=\int_{\frac{1}{t}}^1 s^{-1}t^{-\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n}G\left(\frac{x}{\sqrt{t}}-\sqrt{s}z,1-s\right)F_*\left(z\right)dz\,ds\\
&=t^{-\frac{n}{2}}\int_{\frac{1}{t}}^1\int_{\mathbb{R}^n}G\left(\frac{x}{\sqrt{t}}-y,1-s\right)s^{-\frac{n}{2}-1}F_*\left(\frac{y}{\sqrt{s}}\right)dy\,ds\qquad\left(z=\frac{y}{\sqrt{s}}\right)\\
&=t^{-\frac{n}{2}}\int_{\frac{1}{t}}^1\int_{\mathbb{R}^n}G\left(\frac{x}{\sqrt{t}}-y,1-s\right)F(y,s)\,dy\,ds\\
&=t^{-\frac{n}{2}}\int_{\frac{1}{t}}^1\left(G(1-s)*F(s)\right)\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)ds.
\end{aligned}\tag{4.4}$$

従って, 関数 $\Psi(x,t)$ の定義 (3.1) に注意すれば, (4.3) と (4.4) より,

$$\begin{aligned}
\|v(t)-V(t)-\Psi(t)\|_{L^p}&=t^{-\frac{n}{2}}\left\|a\cdot\nabla\int_0^{\frac{1}{t}}\left(G(1-s)*F(s)\right)\left(\frac{\cdot}{\sqrt{t}}\right)ds\right\|_{L^p}\\
&=t^{-\frac{n}{2}-\frac{1}{2}+\frac{n}{2p}}\left\|a\cdot\nabla\int_0^{\frac{1}{t}}\left(G(1-s)*F(s)\right)(\cdot)\,ds\right\|_{L^p}
\end{aligned}\tag{4.5}$$

となるから, 上式最右辺のノルムを評価すればよい. いま, 平均値の定理より,

$$G(x-y,1-s)=G(x,1-s)-\int_0^1 y\cdot\nabla G(x-\theta y,1-s)\,d\theta$$

となることと, $\int_{\mathbb{R}^n}F_*(\frac{y}{\sqrt{t}})\,dy=t^{\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n}F_*\left(z\right)dz=0$ に注意すると, (3.2) と Schwarz の不等式より,

$$\begin{aligned}
&\left\|a\cdot\nabla\int_0^{\frac{1}{t}}\left(G(1-s)*F(s)\right)(\cdot)\,ds\right\|_{L^p}\\
&\le\int_0^{\frac{1}{t}}\left\|a\cdot\nabla\int_{\mathbb{R}^n}G(\cdot-y,1-s)s^{-\frac{n}{2}-1}F_*\left(\frac{y}{\sqrt{s}}\right)dy\right\|_{L^p}ds\\
&=\int_0^{\frac{1}{t}}s^{-\frac{n}{2}-1}\left\|a\cdot\nabla\int_{\mathbb{R}^n}\left(G(\cdot,1-s)-\int_0^1 y\cdot\nabla G(\cdot-\theta y,1-s)\,d\theta\right)F_*\left(\frac{y}{\sqrt{s}}\right)dy\right\|_{L^p}ds\\
&=\int_0^{\frac{1}{t}}s^{-\frac{n}{2}-1}\left\|a\cdot\nabla\int_{\mathbb{R}^n}\int_0^1 y\cdot\nabla G(\cdot-\theta y,1-s)F_*\left(\frac{y}{\sqrt{s}}\right)\,d\theta\,dy\right\|_{L^p}ds
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^{\frac{1}{t}} s^{-\frac{n}{2}-1} \left\| \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^1 a \cdot \left(D^2 G(\cdot - \theta y, 1-s) y \right) F_* \left(\frac{y}{\sqrt{s}} \right) d\theta \, dy \right\|_{L^p} ds \\
&\le \int_0^{\frac{1}{t}} s^{-\frac{n}{2}-1} \left\| \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^1 |a| \left| D^2 G(\cdot - \theta y, 1-s) \right| |y| \left| F_* \left(\frac{y}{\sqrt{s}} \right) \right| d\theta \, dy \right\|_{L^p} ds \\
&= |a| \int_0^{\frac{1}{t}} s^{-\frac{n}{2}-\frac{1}{2}} \left\| \int_0^1 \frac{1}{\theta^n} \int_{\mathbb{R}^n} \left| D^2 G \left(\frac{\cdot}{\theta} - y, \frac{1-s}{\theta^2} \right) \right| \frac{|y|}{\sqrt{s}} \left| F_* \left(\frac{y}{\sqrt{s}} \right) \right| dy \, d\theta \right\|_{L^p} ds =: I(t). \quad (4.6)
\end{aligned}
$$

ここで, $\tilde{F}(y,s) := \frac{|y|}{\sqrt{s}} |F_*(\frac{y}{\sqrt{s}})|$ とおけば, 次が成り立つ.

$$
\left\| \left(\left| D^2 G \left(\frac{1-s}{\theta^2} \right) \right| * \tilde{F}(s) \right) \left(\frac{\cdot}{\theta} \right) \right\|_{L^p} = \theta^{\frac{n}{p}-2} \left\| \left(\left| D^2 G \left(\frac{1-s}{\theta^2} \right) \right| * \tilde{F}(s) \right) (\cdot) \right\|_{L^p}.
$$

故に, $\|\tilde{F}(\cdot,s)\|_{L^1} = s^{\frac{n}{2}} \||\cdot| F_*(\cdot)\|_{L^1}$ と Young の不等式, さらに熱核の L^p-減衰評価 (2.4) から,

$$
\left\| D^2 G \left(\frac{1-s}{\theta^2} \right) \right\|_{L^p} \le C(1-s)^{-\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)-1} \theta^{n\left(1-\frac{1}{p}\right)+2}
$$

が成り立つことにも注意すると, $I(t)$ に対して次の評価が得られる.

$$
\begin{aligned}
I(t) &\le |a| \int_0^{\frac{1}{t}} s^{-\frac{n}{2}-\frac{1}{2}} \int_0^1 \theta^{-n\left(1-\frac{1}{p}\right)-2} \left\| \left(\left| D^2 G \left(\frac{1-s}{\theta^2} \right) \right| * \tilde{F}(s) \right) (\cdot) \right\|_{L^p} d\theta \, ds \\
&\le |a| \int_0^{\frac{1}{t}} s^{-\frac{n}{2}-\frac{1}{2}} \int_0^1 \theta^{-n\left(1-\frac{1}{p}\right)-2} \left\| D^2 G \left(\frac{1-s}{\theta^2} \right) \right\|_{L^p} \left\| \tilde{F}(\cdot,s) \right\|_{L^1} d\theta \, ds \\
&\le C \int_0^{\frac{1}{t}} s^{-\frac{n}{2}-\frac{1}{2}} \int_0^1 \theta^{-n\left(1-\frac{1}{p}\right)-2} (1-s)^{-\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)-1} \theta^{n\left(1-\frac{1}{p}\right)+2} s^{\frac{n}{2}} \||\cdot| F_*(\cdot)\|_{L^1} \, d\theta \, ds \\
&\le C \int_0^{\frac{1}{t}} s^{-\frac{1}{2}} (1-s)^{-\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)-1} ds \le C \left(1 - \frac{1}{t} \right)^{-\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)-1} \int_0^{\frac{1}{t}} s^{-\frac{1}{2}} ds \le C t^{-\frac{1}{2}}. \quad (4.7)
\end{aligned}
$$

最後に, (4.5), (4.6), (4.7) を組み合わせれば, 所望の評価 (4.2) が成立する. □

参考文献

[1] J. Duoandikoetxea and E. Zuazua, *Moments, masses de Dirac et décomposition de fonctions*, C.R. Acad. Sci. Paris, t. 315, Serie I (1992) 693–698.

[2] M. Escobedo and E. Zuazua: *Large time behavior for convection-diffusion equations in* $\mathbb{R}^n$. J. Funct. Anal. **100** (1991) 119–161.

[3] I. Fukuda and Y. Irino: *Higher-order asymptotic profiles for solutions to the Cauchy problem for a dispersive-dissipative equation with a cubic nonlinearity*, arXiv.2211.04667.

[4] 儀我美一, 儀我美保：非線形偏微分方程式–解の漸近挙動と自己相似解–, 共立出版, 1999.

[5] K. Ishige and T. Kawakami: *Asymptotic expansions of solutions of the Cauchy problem for nonlinear parabolic equations*, J. Anal. Math. **121** (2013) 317–351.

[6] E. Zuazua: *Asymptotic behavior of scalar convection-diffusion equations*, arXiv.2003.11834.

[7] E. Zuazua: *Weakly nonlinear large time behavior for scalar convection-diffusion equations*, Differ. Integral Equ. **6** (1993) 1481–1492.