

# 擬球面内の非等質な OT-FKM 型等径超曲面

東京都立大学大学院 理学研究科 数理科学専攻

笹原 優大 (Yuta SASAHARA) \*

## 概要

OT-FKM 型等径超曲面は、Clifford 系から構成される擬球面内の主曲率が一定な超曲面である。また、擬球面内の連結な部分多様体  $L$  が等質であるとは、擬球面の等長変換群の Lie 部分群が  $L$  に推移的に作用することである。本講演では、(連結な)OT-FKM 型等径超曲面とその焦多様体の各連結成分が、それらの Clifford 系の符号  $(m, r)$  について  $m$  が 4 の倍数かつ  $r$  が 2 の倍数のときに、非等質になることを示す。

## 1 導入

本節では、主定理に至るまでの歴史的経緯と、その動機について説明する。

### 1.1 歴史的経緯

1910 年代から、物理の幾何光学を動機として、等径超曲面の研究が始まる。Euclid 空間、球面、双曲空間のことをまとめて Riemann 空間形というが、1938 年に、Élie Cartan により、Riemann 空間形内の等径超曲面は、主曲率一定超曲面と言い換えられることを示した。Cartan はその後、主曲率に関する Cartan の公式を導き、相異なる主曲率が 3 つの場合に球面内の等径超曲面の分類をするなど、この分野について精力的に研究した。

等質超曲面は定義から直ちに等径超曲面であるとわかるが、その逆が成り立つかは長らく疑問であった。Cartan の時代に、非等質な等径超曲面は見つかっていなかったが、1976 年に、尾関、竹内が、[9] 及び [10] で球面内の相異なる主曲率が 4 つの場合の等径超曲面で、非等質な例を与えた。

1980 年代になると、Hans-Friedrich Münzner により、[6], [7] で研究が大きく進展することになる。特に、球面内の等径超曲面の相異なる主曲率の個数が、1, 2, 3, 4, 6 のいずれかになるということを示したことは大きな進展であった。1981 年に、Ferus, Karcher, Münzner は、[2] で尾関、竹内を与えた非等質な例の構成法を一般化する。現在では、この構成により得られる等径超曲面を、OT-FKM 型等径超曲面と呼んでいる。

その後、Riemann 空間形内の等径超曲面の分類問題が進んだ。ここまでの話は、宮岡礼子先生の [13] に詳しく、[14] も参考になる。2020 年には、分類問題において最後まで残っていた場合を、[1] で Quo-Shin Chi が解決し、約 100 年程の歳月をかけて分類問題が完了するに至った。

---

\* E-mail:sasahara-yuta@ed.tmu.ac.jp, ysasahara0804+res@gmail.com

## 1.2 動機

1981年に、野水克己先生は、[8]で Lorentz 空間形内の空間的超曲面に対し等径であるという概念を導入した。1984年に、Hahn は、[3]で野水の定義を拡張して、擬 Riemann 空間形内の非退化超曲面に対し、等径であることを定義した。また、[3]の後半で、擬球面内の OT-FKM 型等径超曲面を構成した。Riemann の場合には、球面内の OT-FKM 型等径超曲面の等質なものと、非等質なものが完全に決定されている。一方、Hahn の定義した OT-FKM 型等径超曲面の例は、等質であるか非等質であるかが議論されていない。さらに、Hahn は [4]で擬球面内の等質超曲面を調べているが、未だ擬 Riemann 空間形の等径超曲面に対して非等質性が議論されていない状況がある。

筆者は、擬球面内の OT-FKM 型等径超曲面が非等質になるための十分条件を導き、さらに、OT-FKM 型等径超曲面を構成する上で必要となる (拡張された) Clifford 系の存在を、具体的に構成することにより保証した\*1。

## 2 OT-FKM 型等径超曲面の説明

本節では、主定理を述べるのに必要な OT-FKM 型等径超曲面とその周辺用語を定義する。詳しくは、[3]の3節を見ていただくことにする。また、省略した基本的事項は、[12]に掲載されている。

### 2.1 擬 Riemann 空間形

$A, B$  を行列とするとき、 $A$  の転置を  ${}^tA$  と表し、 $A$  と  $B$  との直和を  $A \oplus B$  で表す。 $n$  を自然数とするとき、 $n$  次単位行列を  $E_n$  と表す。 $p, q$  を非負整数とするとき、

$$J_{p,q} := \begin{cases} -E_p, & (q = 0), \\ E_q, & (p = 0), \\ (-E_p) \oplus E_q, & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

と定める。

自然数  $n$  を固定する。 $x, y \in \mathbb{R}^n$  と  $s \in \{0, 1, \dots, n\}$  とに対し、 $\langle x, y \rangle_s := {}^t x J_{s, n-s} y$  と定める。 $\langle \cdot, \cdot \rangle_s$  は非退化計量となる。 $\mathbb{R}_s^n := (\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_s)$  を、指数  $s$  の  $n$  次元擬 Euclid 空間という。特に、 $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$  を Euclid 計量といい、 $\mathbb{R}^n := \mathbb{R}_0^n$  を  $n$  次元 Euclid 空間という。

$$\begin{aligned} S_s^n &:= \{x \in \mathbb{R}_s^{n+1} \mid \langle x, x \rangle_s = 1\}, & (s \in \{0, 1, \dots, n-1\}), \\ S_n^n &:= \{x \in \mathbb{R}_n^{n+1} \mid \langle x, x \rangle_n = 1, x^{n+1} > 0\}, \\ H_s^n &:= \{x \in \mathbb{R}_{s+1}^{n+1} \mid \langle x, x \rangle_{s+1} = -1\}, & (s \in \{1, 2, \dots, n\}), \\ H_0^n &:= \{x \in \mathbb{R}_1^{n+1} \mid \langle x, x \rangle_1 = -1, x^1 > 0\} \end{aligned}$$

\*1 本研究は、JST 次世代研究者挑戦的研究プログラム JPMJSP2156 の支援を受けたものである。

と定める.  $s \in \{0, 1, \dots, n\}$  とするとき,  $S_s^n, H_s^n$  を, それぞれ指数  $s$  の  $n$  次元擬球面, 擬双曲空間という. 特に,  $S^n := S_0^n, H^n := H_0^n$  をそれぞれ  $n$  次元球面, 双曲空間という.

$S_s^n, \mathbb{R}_s^n, H_s^n$  は連結であり, それぞれ  $\kappa = 1, 0, -1$  の定曲率を持つ.  $\kappa \in \{-1, 0, 1\}$  に対し,

$$N_s^n(\kappa) := \begin{cases} S_s^n, & (\kappa = 1), \\ \mathbb{R}_s^n, & (\kappa = 0), \\ H_s^n, & (\kappa = -1) \end{cases}$$

と定める.  $N_s^n(\kappa)$  を擬 Riemann 空間形という. 特に,  $N_0^n(\kappa)$  を Riemann 空間形という.  $S_s^n, H_s^n$  には誘導計量が入るので,  $N_s^n(\kappa)$  には自然な計量がある.

## 2.2 等径超曲面

$n$  次元部分多様体  $M \subset N_s^{n+1}(\kappa)$  の誘導計量が非退化であるとき,  $M$  を  $N_s^{n+1}(\kappa)$  の非退化超曲面という.  $\iota: M \hookrightarrow N_s^{n+1}(\kappa)$  を包含写像とし,  $M$  を連結な非退化超曲面とする. 簡単のため, 現れる計量は全て  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  と表すことにする. ベクトル束  $E$  の切断全体の集合を  $\Gamma(E)$  と表す.  $M, N_s^{n+1}(\kappa)$  の接束を, それぞれ  $TM, TN_s^{n+1}(\kappa)$  と表す.  $M$  には単位法ベクトル場  $\xi \in \Gamma(\iota^*TN_s^{n+1}(\kappa))$  が存在すると仮定する\*2.  $\nu := \langle \xi, \xi \rangle$  と定め,  $\delta := \kappa \cdot \nu$  と定める.  $\delta$  を  $M$  の型という.

$N_s^{n+1}(\kappa)$  には標準的な Levi-Civita 接続  $\nabla^{N_s^{n+1}(\kappa)}$  があり, 引き戻し接続  $\nabla^{\iota^*TN_s^{n+1}(\kappa)}$  がある.  $X \in \Gamma(TM)$  に対し,  $A(X) := -\nabla_X^{\iota^*TN_s^{n+1}(\kappa)}\xi \in \Gamma(\iota^*TN_s^{n+1}(\kappa))$  と定める. このとき,  $A \in \Gamma(\text{End}(TM))$  が成り立つ.  $A$  を  $M$  の型作用素という.  $I \in \Gamma(\text{End}(TM))$  を恒等変換とする.  $\det(xI - A) = 0$  の根を  $M$  の主曲率という.  $M$  の任意の主曲率が  $M$  上定数函数となるとき,  $M$  は等径 (isoparametric) であるという.

$\text{grad}^N, \Delta^N$  を, それぞれ  $N_s^{n+1}(\kappa)$  の勾配, ラプラシアンとする. 函数  $f: N_s^{n+1}(\kappa) \rightarrow \mathbb{R}$  が等径であるとは, ある  $\Phi, \Psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  が存在して,  $\langle \text{grad}^N(f), \text{grad}^N(f) \rangle = \Phi \circ f$  かつ  $\Delta^N(f) = \Psi \circ f$  となることである.  $W_{RN}(f) := \{c \in f(N_s^{n+1}(\kappa)) \mid \Phi(c) \neq 0\}$  と定める. このとき,  $c \in W_{RN}(f)$  における  $f$  の等位集合  $f^{-1}(c) \subset N_s^{n+1}(\kappa)$  の各連結成分は等径超曲面となる.

## 2.3 Clifford 系と OT-FKM 型等径超曲面

$l$  を自然数とし,  $s \in \{0, 1, \dots, 2l\}$  とする.

$$\text{Sym}(\mathbb{R}_s^{2l}) := \{F \in \text{End}(\mathbb{R}_s^{2l}) \mid \forall u, v \in \mathbb{R}_s^{2l}, \langle F(u), v \rangle = \langle u, F(v) \rangle\}$$

と定める. 一般に,  $F \in \text{Sym}(\mathbb{R}_s^{2l})$  の表現行列は実対称行列ではない.

$m$  を 2 以上の整数とし,  $r \in \{0, 1, 2, \dots, m\}$  とする. 族  $\{P_i\}_{i=1}^m$  が  $\mathbb{R}_s^{2l}$  上の符号  $(m, r)$  の (拡張された) Clifford 系であるとは, 以下の条件を共に満たすことである.

- (1)  $\forall i \in \{1, \dots, m\}, P_i \in \text{Sym}(\mathbb{R}_s^{2l})$ .
- (2)  $\forall i, j \in \{1, \dots, m\}, P_i P_j + P_j P_i = 2\eta_{ij}I$ . 但し,  $(\eta_{ij}) := J_{r, m-r}$  とする.

\*2 これから考える  $M$  は向きつけ可能な場合であり, そうではない場合には  $M$  の二重被覆を取り考えることで, 等径を定義することはできる.

上記の Clifford 系は [3] で定義されたものであり,  $r = 0, s = 0$  のとき, [2] で定義されている Clifford 系に一致する.

記号の濫用にはなるが,  $P, Q \in \text{Sym}(\mathbb{R}_s^{2l})$  に対し,  $\langle P, Q \rangle := \text{trace}(PQ)/(2l)$  と定める.  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  は, いわゆるトレースフォームで, 非退化対称双線型形式となる.  $\Sigma := \text{span}\{P_i \mid i \in \{1, \dots, m\}\} \subset \text{Sym}(\mathbb{R}_s^{2l})$  と定める. このとき,  $(\Sigma, \langle \cdot, \cdot \rangle) \subset (\text{Sym}(\mathbb{R}_s^{2l}), \langle \cdot, \cdot \rangle)$  は非退化部分空間となる. また,  $\{P_i\}$  は  $\Sigma$  の擬正規直交基底となる. 逆に,  $\Sigma$  の擬正規直交基底  $\{Q_i\}_{i=1}^m$  は,  $\mathbb{R}_s^{2l}$  上の符号  $(m, r)$  の Clifford 系となる.

指数  $s$  に関して,  $r > 0$  ならば  $s = l$  となり,  $r \leq m - 2$  ならば  $s$  は偶数となる.

函数  $H: \mathbb{R}_s^{2l} \rightarrow \mathbb{R}$  を,

$$H(x) := \sum_{j=1}^m \eta_{jj} \langle P_j x, x \rangle^2$$

と定める.  $H$  は  $\{P_i\}$  の取り方に依らず,  $\Sigma$  のみに依る. 4 次斉次函数  $F: \mathbb{R}_s^{2l} \rightarrow \mathbb{R}$  を,  $F(x) := \langle x, x \rangle^2 - 2H(x)$  と定める.  $f := F|_{S_s^{2l-1}}$  と定める. このとき,  $f$  は等径となる.  $c \in W_{\text{RN}}(f)$  に対し,  $M_c := f^{-1}(c) \subset S_s^{2l-1}$  と定める.  $M_c$  の連結成分を, **OT-FKM 型等径超曲面** という.

$\pm 1 \notin W_{\text{RN}}(f)$  となる.  $M_c$  の型は,  $c \in (-1, 1)$  ならば  $\delta = 1 \cdot 1 = \nu$  となり,  $c \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$  ならば  $\delta = 1 \cdot -1 = \nu$  となる.  $x \in M_c$  における単位法ベクトルは,

$$\xi_x = \frac{1}{\sqrt{\delta(1-c^2)}} \left\{ (1-c)x - 2 \sum_j \eta_{jj} \langle P_j x, x \rangle P_j x \right\}$$

となる.

## 2.4 焦多様体

$$M_{\pm} := \{x \in S_s^{2l-1} \mid \text{grad}^N(f) = 0, f(x) = \pm 1\} \subset S_s^{2l-1}$$

と定める. 今回は,  $M_+$  のみに注目する\*3.

$$M_+ = \{x \in S_s^{2l-1} \mid \forall j \in \{1, \dots, m\}, \langle P_j x, x \rangle = 0\}$$

が成り立つ. 正則値定理より,  $M_+ \neq \emptyset$  ならば,  $M_+ \subset S_s^{2l-1}$  は余次元  $m$  の非退化部分多様体となる.  $M_+$  を  $\{M_c\}_c$  の**焦多様体**という.

$M_+$  と  $M_c$  とには関係がある.  $x \in M_+$  とするとき,  $T_x^\perp M_+ = \{P_x \mid P \in \Sigma\}$  が成り立つ. 従って,  $T^\perp M_+$  は自明である. そこで,

$$\perp M_+(\delta) := \{(x, v) \mid x \in M_+, v \in T_x^\perp M_+, \langle v, v \rangle = \delta\}$$

と定める.  $c \in (-1, 1) \cup (1, \infty)$  ならば,  $\perp M_+(\delta)$  と  $M_c$  とは微分同相となることを示すことができる. 擬球面, 擬双曲空間が非連結になる場合を考えて,  $c \in (-1, 1)$  の場合  $r \neq m - 1$  を,  $c \in (1, \infty)$  の場合  $r \neq 1$  を, 仮定することで,  $\perp M_+(\delta)$  の連結成分と  $M_c$  の連結成分とが, 1 対 1 に対応するようになる.

\*3  $M_-$  は主定理では言及することができていない.

### 3 主定理

主定理は、等質であるかの命題であるから、その定義を述べることにする：連結<sup>\*4</sup>な部分多様体  $L \subset S_s^{2l-1}$  が等質であるとは、 $S_s^{2l-1}$  の等長変換群  $O(s, 2l-s)$  のある Lie 部分群  $K$  が存在して、 $K$  が  $L$  に推移的に作用することである。

主定理を述べる。  $\{P_i\}_{i=1}^m$  を  $\mathbb{R}_s^{2l}$  上の符号  $(m, r)$  の Clifford 系で、以下を満たすとする：

- (a)  $m \equiv 0 \pmod{4}$ .
- (b)  $r \equiv 0 \pmod{2}$ .
- (c)  $l > m$ .

$\Sigma := \text{span}\{P_i \mid i \in \{1, \dots, m\}\}$  により生じる  $\{M_c\}$  とその焦多様体  $M_+$  を考える。  $M_c$  の連結成分が、OT-FKM 型等径超曲面であった。ここでは、 $c \in W_{\text{RN}}(f) \cap (-1, \infty)$  を仮定する<sup>\*5</sup>。  $M_+$  の連結成分を議論し、 $M_+$  と  $M_c$  との関係を使うと、次の補題が得られる。

**補題 3.1** ([11]).  $M_+$  と  $M_c$  との連結成分の個数は一致し、それらは高々 2 つである。

[2] の議論を拡張することにより、次の定理を得ることができた。

**定理 3.2** ([11]).  $M_+$  の各連結成分は非等質となる。

また、[2] には載っていないが、 $M_+$  と  $M_c$  との関係を使うことで、次の定理を得、今まで知られていなかった擬球面内の非等質な等径超曲面が得られることを明らかにした。

**定理 3.3** ([11]).  $M_c$  の各連結成分は非等質となる。

定理 3.3 は、定理 3.2 に加えて、次の命題を証明することで得られる： $M_c$  の連結成分が等質ならば、対応する  $M_+$  の連結成分が等質となる。

主定理の証明などは、[11] を見ていただくことにする。

### 4 Clifford 系の存在

主定理は、Clifford 系の存在について言及していない。また、[3] でも言及されていない。一方、次の命題が成り立つ。

**命題 4.1** ([11]). 任意の組  $(m, r)$  に対して、ある自然数  $l$  が存在して、 $\mathbb{R}_l^{2l}$  上の符号  $(m, r)$  の Clifford 系が存在する。

命題 4.1 の証明の方針は、帰納的に構成するというものであり、そのアイデアは [5] にある線型同型を使うものである。

<sup>\*4</sup> 非連結な部分多様体が非等質となったとして、各連結成分も非等質であるかがわからず、それでは意味がない。

<sup>\*5</sup>  $W_{\text{RN}}(f) \cap (-\infty, -1) \neq \emptyset$  であるかもしれないが、その集合の元  $c$  に対する  $M_c$  の連結成分が非等質であるかどうかは調べられていない。

まずは、次を満たす直交行列の族  $\{A_i\}_{i=1}^m$  を帰納的に作る： $A_i A_j + A_j A_i = 2\eta_{ij} E_l$ . 但し、 $(\eta_{ij}) = J_{r, m-r}$  とする.  $(m, r) = (1, 0), (1, 1), (2, 0), (2, 1), (2, 2)$  に対しては、簡単に作ることができる. それらを使い、行列の Kronecker 積を取るなどして、 $(m, 0), (m, 1), \dots, (m, m)$  に対する族から、 $(m+2, 0), (m+2, 1), \dots, (m+2, m+2)$  に対する族を作ることができる. このとき、族  $\{P_i\}_{i=1}^m$  を次のように構成すればよい：

$$P_i := \begin{cases} \begin{bmatrix} & A_i \\ A_i & \end{bmatrix}, & (i \in \{1, 2, \dots, r\}), \\ \begin{bmatrix} A_i & \\ & A_i \end{bmatrix}, & (i \in \{r+1, r+2, \dots, m\}). \end{cases}$$

すると、 $\{P_i\}_{i=1}^m$  は  $\mathbb{R}_l^{2l}$  上の符号  $(m, r)$  の Clifford 系となる.

命題 4.1 では、 $\mathbb{R}_l^{2l}$  上の Clifford 系を構成している.  $r > 0$  ならば  $s = l$  となることを思い出すと、多くの場合に存在することを主張しているという意味で、命題 4.1 には意味があると言える.  $s \neq l$  の場合に  $\mathbb{R}_s^{2l}$  上の符号  $(m, 0)$  の Clifford 系を構成することができるかという問題には、未だ答えられていない.

Clifford 系のサイズ  $l$  は、命題 4.1 の構成方法から容易に大きくすることができるので、主定理の条件 (c) を満たすのは容易である.

## 参考文献

- [1] Q.-S. Chi. Isoparametric hypersurfaces with four principal curvatures, IV. *J. Differential Geom.*, 115(2):225–301, 2020.
- [2] D. Ferus, H. Karcher, and H. F. Münzner. Cliffordalgebren und neue isoparametrische Hyperflächen. *Math. Z.*, 177(4):479–502, 1981.
- [3] J. Hahn. Isoparametric hypersurfaces in the pseudo-Riemannian space forms. *Math. Z.*, 187(2):195–208, 1984.
- [4] J. Hahn. Isotropy representations of semisimple symmetric spaces and homogeneous hypersurfaces. *J. Math. Soc. Japan*, 40(2):271–288, 1988.
- [5] H. B. Lawson, Jr. and M.-L. Michelsohn. *Spin geometry*, volume 38 of *Princeton Mathematical Series*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1989.
- [6] H. F. Münzner. Isoparametrische Hyperflächen in Sphären. *Math. Ann.*, 251(1):57–71, 1980.
- [7] H. F. Münzner. Isoparametrische Hyperflächen in Sphären. II. Über die Zerlegung der Sphäre in Ballbündel. *Math. Ann.*, 256(2):215–232, 1981.
- [8] K. Nomizu. On isoparametric hypersurfaces in the Lorentzian space forms. *Japan. J. Math. (N.S.)*, 7(1):217–226, 1981.
- [9] H. Ozeki and M. Takeuchi. On some types of isoparametric hypersurfaces in spheres. I. *Tohoku Math. J. (2)*, 27(4):515–559, 1975.

- [10] H. Ozeki and M. Takeuchi. On some types of isoparametric hypersurfaces in spheres. II. *Tohoku Math. J. (2)*, 28(1):7–55, 1976.
- [11] Y. Sasahara. Inhomogeneity of isoparametric hypersurfaces of OT-FKM-type in the pseudo-sphere. arXiv, <https://arxiv.org/abs/2308.13025>, 2023.
- [12] 笹原優大. 擬 Riemann 空間形内の等径超曲面と Cartan の公式. 修士論文 (東京都立大学), <https://tokyo-metro-u.repo.nii.ac.jp/record/9248/files/T02722-001.pdf>, 2021.
- [13] 宮岡礼子. 等径超曲面今昔-Élie Cartan と 21 世紀-. *数理解析研究所講究録*, 1206:32–44, 2001.
- [14] 宮岡礼子. 等径超曲面再訪. *数学*, 53(1):18–33, 2001.