3 変数多項式環のレトラクトについて

新潟大学大学院自然科学研究科数理物質科学専攻数理科学コース
笹川 理湖 (Riko SASAGAWA) *

概要

B を体 k 上の n 変数多項式環とする. B の k 部分代数 A がレトラクトであるとは, B から A への全射準同型写像 φ で $\varphi|_A$ が恒等写像になるものが存在するときをいう. 本発表では, $n=3$ で k の標数が正の場合について, B のレトラクトが多項式環になるための十分条件をいくつか紹介する.

1 導入

k を体とし, k 上の n 変数多項式環を $k^{[n]}$ と表す. 以下, 扱う環はすべて k 代数であり, $\cong$ は特に断らない限り k 代数としての同型を意味するものとする.

定義 1.1. B を k 代数とし, A を B の k 部分代数とする. A が B の**レトラクト**であるとは, A が次の同値な 3 条件のうちの 1 つをみたすときをいう.

(1) k 代数としての自己準同型写像 φ で, $\varphi^2=\varphi$ かつ $\varphi(B)=A$ となるものが存在する. (この φ を**レトラクション**という.)
(2) B から A への k 代数としての全射準同型写像 φ で, $\varphi|_A$ が恒等写像になるものが存在する.
(3) B のあるイデアル I が存在して, A 加群としての同型 $B\cong A\oplus I$ が成り立つ.

k 代数のレトラクトについて, いくつかの先行研究があるが, D. L. Costa 氏は [2] において, 次の問題を提起した.

問題 1.2. $k^{[n]}$ のレトラクト A は多項式環になるか.

この問題は, 以下の Zariski 消去問題を含んでいる.

問題 1.3. **(Zariski 消去問題)** A を有限生成な k 整域とする. このとき, $A^{[1]}\cong k^{[n+1]} \Longrightarrow A\cong k^{[n]}$ は成り立つか.

実際, $A^{[1]}\cong k^{[n+1]}$ が成り立つとき, k 代数としての準同型写像 $\varphi : k^{[n+1]}\cong A[x]\to A$ を, $\varphi(x)=0$, $\varphi(a)=a$ $(a\in A)$ により定めると, φ はレトラクションである. したがって, A は $k^{[n+1]}$ のレトラクトである. ここで, 問題 1.3 が肯定的であれば, $A\cong k^{[n]}$ が成り立つことが分かる.

* E-mail: f22a038f@mail.cc.niigata-u.ac.jp

問題 1.2 について, 次の結果が知られている.

(1) $\mathrm{tr.deg}_k A = 0$ (resp. $\mathrm{tr.deg}_k A = n$) ならば $A = k$ (resp. $A = k^{[n]}$) が成り立つ.
(2) ([2, Theorem 3.5]) $n = 2$ ならば A は多項式環である. 更に, $n \geq 3$ かつ $\mathrm{tr.deg}_k A = 1$ ならば, $A \cong k^{[1]}$ が成り立つ.
(3) ([6, Theorem 2.5], [1, Theorem 5.8]) $n = 3$ かつ $\mathrm{char}\,(k) = 0$ ならば, A は多項式環である. 更に, $\mathrm{char}\,(k) = 0$ かつ $\mathrm{tr.deg}_k A = 2$ ならば, $A \cong k^{[2]}$ が成り立つ.
(4) ([3], [4]) $n \geq 4$ かつ $\mathrm{char}\,(k) > 0$ のときは反例がある.

したがって, 問題 1.2 は $n = 3$ かつ $\mathrm{char}\,(k) > 0$ の場合と, $n \geq 4$ かつ $\mathrm{char}\,(k) = 0$ の場合が残されている. 今回は, $n = 3$ かつ $\mathrm{char}\,(k) > 0$ の場合における部分的な結果を紹介する.

2 準備

主結果を紹介するために必要となる概念と結果を紹介する. 以下, k を体とする. さらに, 整域 B に対して, B の商体を $Q(B)$ と表すこととする.

2.1 レトラクトに関する性質

初めに, k 整域のレトラクトの性質をいくつか紹介する.

補題 2.1. (cf. [2, Section 1]) *B を k 整域とし, A を B のレトラクトとする. このとき, 次が成り立つ.*

(1) $Q(A) \cap B = A$.
(2) *B が k 上有限生成であるならば, A も k 上有限生成である.*
(3) *B が UFD ならば, A も UFD である.*

補題 2.2. (cf. [6, Lemma 1.2]) *B を k 整域とし, k' を k の任意の代数拡大体とする. A が B のレトラクトであるならば, $A \otimes_k k'$ は $B \otimes_k k'$ のレトラクトである.*

2.2 lfihd に関する性質

次に, lfihd の定義とその核に関する性質を紹介する. 以下, A を k 整域とする.

定義 2.3. $D = \{D_i\}_{i \geq 0}$ を A の自己写像の族とする. D は A 上の k **高階導分 (higher k-derivation)** であるとは, 次の 2 条件をみたすときをいう.

(1) 任意の $i \geq 0$ に対して, D_i は k 線形写像である. また, D_0 は A 上の恒等写像である.
(2) 任意の $n \geq 0$, 任意の $x, y \in A$ に対して, $D_n(xy) = \sum_{i+j=n} D_i(x) D_j(y)$ が成り立つ.

定義 2.4. $D = \{D_i\}_{i \geq 0}$ を A 上の k 高階導分とする. D は**局所有限 (locally finite)** である (resp. **階層的 (iterative)** である) とは, 次の (3) (resp. (4)) の条件をみたすときをいう.

(3) 任意の $a \in A$ に対して, ある $N > 0$ が存在して, $n \geq N$ となるすべての n に対して, $D_n(a) = 0$ が成り立つ.
(4) 任意の $i, j \geq 0$ に対して, $D_i \circ D_j = \binom{i+j}{i} D_{i+j}$ が成り立つ.

定義 2.5. $D = \{D_i\}_{i \geq 0}$ を A 上の k 高階導分とする. $\bigcap_{i \geq 1} \ker D_i$ を D の**核**といい, A^D と表す. $A^D = A$ が成り立つとき, D は**自明**であるという.

以下, 局所有限階層的高階導分を *lfihd* と省略して書く. lfihd の核に関する性質として, 次の結果が知られている.

補題 2.6. (cf. [5, Section 2]) D を A 上の lfihd とする. このとき, 次が成り立つ.

(1) $Q(A^D) \cap A = A^D$.
(2) A が UFD ならば, A^D も UFD である.

補題 2.7. (cf. [5, Lemma 2.2]) D を A 上の非自明な lfihd とする. このとき, 次が成り立つ.

(1) $A \otimes_{A^D} Q(A^D) \cong Q(A^D)^{[1]}$.
(2) A が k 上有限生成ならば, $\mathrm{tr.deg}_k Q(A^D) = \mathrm{tr.deg}_k Q(A) - 1$ が成り立つ.

最後に, 次の定義を紹介する.

定義 2.8. A 上の lfihd 全体の集合を $\mathrm{LFIHD}_k(A)$ とおく. このとき,

$$\mathrm{ML}(A) = \bigcap_{D \in \mathrm{LFIHD}_k(A)} A^D$$

を A の **ML 不変量 (Makar-Limanov invariant)** という.

3 主定理

k を体とする. 今回, $k^{[3]}$ のレトラクトが多項式環になるための十分条件として, 次の結果を得ることができた. 以下, $B = k^{[3]}$ とおく.

定理 3.1. A を $\mathrm{tr.deg}_k A = 2$ となる B のレトラクトとする. このとき, 次が成り立つ.

(1) $\mathrm{ML}(A) \neq A$ ならば, $A \cong k^{[2]}$ が成り立つ.
(2) 非自明な B 上の lfihd D が存在して, $A = B^D$ ならば, $A \cong k^{[2]}$ が成り立つ.

定理 3.1 において, k の標数が 0 のときは $A \cong k^{[2]}$ となることは [6, Theorem2.5] や [1, Theorem 5.8] より従う. k の標数が正となる場合が新しい結果である. ここでは, 定理 3.1 の (1) の証明を紹介する. 証明では, 次の結果を用いる.

補題 3.2. (Zariski [9]) A を $\mathrm{tr.deg}_k A \leq 2$ となる $k^{[n]}$ の k 部分代数とする. このとき, $Q(A) \cap k^{[n]}$ は k 上有限生成である.

補題 3.3. (Zaks [8]) R を $k^{[n]}$ の k 部分代数とする．R は次の (1)–(3) をみたすと仮定する．

(1) R は k 上有限生成である．
(2) R は正規である．
(3) $\mathrm{tr.deg}_k R = 1$.

このとき, $R \cong k^{[1]}$ が成り立つ．

補題 3.4. (Russell–Sathaye [7, Theorem 2.4.2]) A を有限生成な k 整域とする．$f \in A$ に対して, $S = k[f] \setminus \{0\}$ とおく．次の (1)–(3) を仮定する．

(1) $S^{-1}A \cong k(f)^{[1]}$.
(2) $k(f) \cap A = k[f]$.
(3) A は k 上 geometrically factorial である．すなわち, 任意の k の代数拡大体 k' に対して, $A \otimes_k k'$ は UFD である．

このとき, $A \cong k[f]^{[1]}$ が成り立つ．

定理 3.1 (1) の証明を紹介する．

定理 3.1 (1) の証明. A は B のレトラクトであり, B は k 上有限生成であるから, 補題 2.1 (2) より, A は k 上有限生成である．さらに, B は UFD であるから, 補題 2.1 (3) より, A は UFD である．仮定より, $\mathrm{ML}(A) \neq A$ であるから, A 上非自明な lfihd D が存在する．ここで, $R = A^D$ とおく．

主張 1. $R \cong k^{[1]}$ が成り立つ．

証明. D は A 上非自明であるから, 補題 2.7 (2) より,

$$\mathrm{tr.deg}_k R = \mathrm{tr.deg}_k A - 1 = 2 - 1 = 1$$

が成り立つ．A は UFD であるから, 補題 2.6 (2) より, R は UFD である．さらに, 補題 2.6 (1) と補題 3.2 より, $R = Q(R) \cap A$ は k 上有限生成である．したがって, R は補題 3.3 の仮定をみたす．以上より, $R \cong k^{[1]}$ が成り立つ． □

主張 2. A は k 上 geometrically factorial である．

証明. k' を k の代数拡大体とする． 補題 2.2 より, $A \otimes_k k'$ は $B \otimes_k k'$ のレトラクトである．$B \otimes_k k' \cong k'^{[3]}$ は UFD であるから, 補題 2.1 (3) より, $A \otimes_k k'$ は UFD である．よって, A は k 上 geometrically factorial である． □

主張 3. $A \cong k^{[2]}$ が成り立つ．

証明. 主張 1 より, ある $f \in A \setminus k$ に対して, $R = k[f]$ となることと, 補題 2.6 (1) より,

$$k(f) \cap A = Q(R) \cap A = R = k[f]$$

が成り立つ．よって, 補題 3.4 の仮定 (2) が成り立つ．$S = k[f] \setminus \{0\}$ とおく．補題 2.7 (1) より,

$$S^{-1}A = A \otimes_R Q(R) \cong Q(R)^{[1]} = k(f)^{[1]}$$

が成り立つ．よって, 補題 3.4 の仮定 (1) が成り立つ．主張 2 より, 補題 3.4 の仮定 (3) が成り立つ．以上より, $A \cong k[f]^{[1]} \cong k^{[2]}$ が成り立つ. □

以上により, 定理 3.1 (1) が示された.

□

参考文献

[1] S. Chakraborty, N. Dasgupta, A. K. Dutta and N. Gupta, Some results on retracts of polynomial rings, J. Algebra, **567** (2021), 243–268.

[2] D. L. Costa, Retracts of polynomial rings, J. Algebra, **44** (1977), 492–502.

[3] N. Gupta, On the cancellation problem for the affine space $\mathbb{A}^3$ in characteristic p, Invent. Math., **195** (2014), 279–288.

[4] N. Gupta, On Zariski's cancellation problem in characteristic p, Adv. Math., **264** (2014), 296–307.

[5] H. Kojima, Notes on the kernels of locally finite iterative higher derivations in polynomial rings, Comm. Algebra, **44** (2016), 1924–1930.

[6] T. Nagamine, A note on retracts of polynomial rings in three variables, J. Algebra, **534** (2019), 339–343.

[7] P. Russell and A. Sathaye, On finding and cancelling variables in $k[X, Y, Z]$, J. Algebra, **57** (1979), 151–166.

[8] A. Zaks, Dedekind subrings of $k[x_1, \ldots, x_n]$ are rings of polynomials, Israel J. Math., **9** (1971), 285–289.

[9] O. Zariski, Interprétations algébrico-géométriques du quatorzième problème de Hilbert, Bull. Sci. Math., **78** (1954), 155–168.