

# 分数冪 $p$ -ラプラシアンと一般化された非局所非線形項を含む臨界 Choquard 型方程式の解の無限列の存在

東京大学大学院数理科学研究科数理科学専攻  
佐久間正樹 (Masaki SAKUMA) \*

## 概要

本講演では、分数階  $p$ -ラプラシアン及び一般化された臨界増大度をもつ非局所非線形項を含む Choquard 型方程式の解の無限列の存在証明について解説する。弱  $L^r$  関数との畳み込みを含む非局所的な量に対して直接適用できるように一般化した凝集コンパクト性補題を用いて (PS) $_c$  列のコンパクト性を議論し、変分法で有用な Krasnoselskii genus と呼ばれる概念に基づく臨界点定理を用いてエネルギーが 0 へ収束する弱解の列の存在を保証する。

## 1 導入

本講演では、次の臨界増大度の非線形項をもつ分数階 Choquard 型方程式を扱う：

$$(-\Delta)_p^s u + V(x)|u|^{p-2}u = \frac{1}{p^\uparrow}(K * g(u))g'(u) + \varepsilon_W W(x)f'(u) \quad \text{in } \mathbb{R}^N. \quad (1)$$

ここで、 $s \in (0, 1)$ ,  $1 < p < N/s < 2pr$ ,  $r \in (1, \infty)$  であり、

$$(-\Delta)_p^s u(x) := \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_\varepsilon(x)} \frac{|u(x) - u(y)|^{p-2}(u(x) - u(y))}{|x - y|^{N+ps}} dy$$

は分数冪  $p$ -ラプラシアンと呼ばれる非線形作用素である。関数  $f, g \in C^1(\mathbb{R}^N)$ , 畳み込み核  $K$  は以下の条件を満たすとする。

(G1)  $h(-u) = h(u)$  and  $|h'(u)| \leq C(|u|^{\hat{p}_g-1} + |u|^{p_g-1})$  ( $\forall u \in \mathbb{R}$ ) for some  $p_g, \hat{p}_g$  with  $p < \hat{p}_g \leq p_g < p^\uparrow$ , where  $h(t) := g(t) - |t|^{p^\uparrow}$ .

(G2)  $0 < \alpha_g h(u) \leq u h'(u)$  ( $\forall u \neq 0$ ) for some  $\alpha_g \in (p^\downarrow, p^\uparrow]$ .

(F)  $f(-u) = f(u)$  and  $0 < \alpha_f f(u) \leq u f'(u) \leq C(|u|^{q_1} + |u|^{q_2})$  ( $\forall u \neq 0$ ) for some  $q_1, q_2 \in (1, p)$  and  $\alpha_f > 1$ .

(K)  $K \in L_+^{r, \infty}(\mathbb{R}^N)$  and  $K|_{\mathbb{R}^N \setminus B_\varepsilon(0)} \in L^\infty(\mathbb{R}^N \setminus B_\varepsilon(0))$  for any  $\varepsilon > 0$ .

ここで、 $p^\downarrow := p \left(1 - \frac{1}{2r}\right)$  および  $p^\uparrow := \frac{p^*}{p} p^\downarrow = \frac{pN(2r-1)}{2r(N-ps)}$  はそれぞれ Hardy-Littlewood-Sobolev の不等式における lower critical および upper critical の場合に対応する臨界指数である。

\* E-mail: masakisakuma0110@gmail.com

$p_s^* := \frac{pN}{N-ps}$  は分数階臨界ソボレフ指数である.  $B_R(x)$  は  $x$  を中心とする半径  $R$  の開球を表す. また, 分数階斉次ソボレフ空間 (斉次 Sobolev-Slobodeckij 空間)

$$D^{s,p}(\mathbb{R}^N) = \left\{ u \in L^{p_s^*}(\mathbb{R}^N) \mid \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{N+ps}} dx dy < \infty \right\}$$

の埋め込み  $D^{s,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{p_s^*}(\mathbb{R}^N)$  に関連して, 以下の3つの定数を定める.

$$S_{D^{s,p}} := \inf_{u \in D^{s,p}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}} \frac{\|u\|_{D^{s,p}}^p}{\|u\|_{p_s^*}^p},$$

$$S_K := \inf_{u \in D^{s,p}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}} \frac{\|u\|_{D^{s,p}}^p}{\left( \int_{\mathbb{R}^N} (K * |u|^{p^\dagger}) |u|^{p^\dagger} dx \right)^{p/(2 \cdot p^\dagger)}},$$

$$L_K := \inf_{u \neq 0} \frac{\|u\|_{p_s^*}^{p_s^*}}{\left( \int_{\mathbb{R}^N} (K * |u|^{p^\dagger}) |u|^{p^\dagger} dx \right)^{p_s^*/(2 \cdot p^\dagger)}}.$$

なお,  $D^{s,p}(\mathbb{R}^N)$  ( $s \in (0, 1)$ ,  $p \in [1, \infty)$ ) は本来はコンパクト台をもつ滑らかな関数全体のなす空間  $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$  のノルム

$$\|u\|_{D^{s,p}} := \left( \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{N+ps}} dx dy \right)^{1/p}$$

に関する完備化として定義されるが,  $ps < N$  のときは上記の  $L^{p_s^*}(\mathbb{R}^N)$  の部分空間に同一の式で表されるノルムを入れて得られるバナッハ空間と同一視できるので, そのように考えている. (一方,  $ps \geq N$  のときは定数差を無視したヘルダー空間や BMO 空間の部分空間と同一視される [2].)

(G1) は  $g$  が upper critical の増大度をもつことを保証し, (G2) は  $g$  が lower critical より大きな増大度をもつことを保証する Ambrosetti-Rabinowitz 型条件である. (F) も同様に  $f$  に対して上下からの評価を与える. Choquard 方程式の文脈における  $K$  の古典的な例はリースポテンシャルの畳み込み核

$$I_\alpha(x) = \frac{\Gamma((n-\alpha)/2)}{2^\alpha \pi^{n/2} \Gamma(\alpha/2)} |x|^{-(N-\alpha)}$$

だが, (K) はそれを原点でのみ特異性をもつ弱  $L^r$  関数に一般化し, 湯川ポテンシャルなどの他の種類の畳み込み核も同時に扱うことを可能にする.

方程式 (1) において, ポテンシャル  $V$ , 局所非線形項の重み関数  $W$  は次の条件を満たすとす.

$$(V) \exists \tau_0 > 0 \text{ s.t. } \mu_{\mathbb{R}^N}(V^{-1}((-\infty, \tau_0])) < \infty, \|V_-\|_{N/(ps)} < S_{D^{s,p}} \text{ and } V_+ \in L_{\text{loc}}^{N/(ps)}(\mathbb{R}^N).$$

$$(W) W \in L^{\frac{p_s^*}{p_s^*-q_1}}(\mathbb{R}^N) \cap L^{\frac{p_s^*}{p_s^*-q_2}}(\mathbb{R}^N), W > 0 \text{ a.e.}$$

## 2 主定理

本講演で紹介する主結果は次の通りである.

**定理 1.** 仮定 (G1), (G2), (V), (K), (F), (W) の下で, ある  $\varepsilon > 0$  が存在して,  $0 < \varepsilon_W < \varepsilon$  のとき, 方程式 (1) は対応するエネルギーが 0 に収束するような弱解の無限列をもつ.

方程式 (1) は最初  $p = 2, s = 1, N = 3, K(x) = |x|^{-1}, g(u) = |u|^2, V \equiv 1, W \equiv 0$  の場合に, [6] によりポーラロンを記述する量子力学のモデルとして提唱された. その後, 天文学にも同様のモデル [7] が登場し, 更に数学的な興味で多様に一般化されている. 特に非局所性と上下 2 つの臨界指数をもつ点が特徴的である.  $p = 2, s = 1, N \geq 1, K = I_\alpha, g(u) = |u|^q, V \equiv 1, W \equiv 0$  の場合,  $p^\downarrow < q < p^\uparrow$  のときは峠の補題により基底状態の解 (正值球対称な古典解) をもつが,  $q$  がちょうど臨界指数に一致するときは Pohozaev の等式から非自明解が存在しない. そこで, 臨界のケースについては方程式 (1) が解をもつためのポテンシャル  $V$  に関する十分条件を与える研究や, 局所非線形項を導入したり  $g$  を古典的なものから変更したりした場合の可解性や解の個数についての研究が盛んである. 最近では, variable exponent や Kirchhoff 型への拡張 [10, 3, 9] も行われている. こうした先行研究を踏まえ, 本研究 [8] では  $p$ -分数階への拡張を考え, 更に  $W \neq 0, f \neq 0$  とし, Krasnoselskii genus に基づく偶汎関数に対する臨界点定理を用いることで無限個の解の存在を得た. また, 前述したように本研究は条件 (K) によってリース・ポテンシャルに限らない一般の弱  $L^r$  関数との畳み込みを扱っているという点でも特徴がある. 更に, 後述するように, 証明の過程で  $K$  との畳み込みを含む非局所的な量に直接適用できるように従来の凝集コンパクト性補題を改良した結果も本研究の成果である.

### 3 証明の概略

変分法を用いて議論するため, 関数空間とエネルギー汎関数を設定する. 分数階 Sobolev 空間の一種である Sobolev-Slobodeckij 空間  $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$  は次のように定義される:

$$W^{s,p}(\mathbb{R}^N) := \left\{ u \in L^p(\mathbb{R}^N) \mid [u]_{s,p} := \left( \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{N+ps}} dx dy \right)^{1/p} < \infty \right\}.$$

$W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$  上の自然なノルムは  $\|u\|_{W^{s,p}} = \|u\|_{L^p} + [u]_{s,p}$  である.  $[\cdot]_{s,p}$  は Gagliardo 半ノルムと呼ばれるが, 全領域においては  $L^p$  が定数関数を含まないため,  $[\cdot]_{s,p}$  単体でもノルムを定めている. ここでは固定された  $s$  を扱うため,  $[\cdot]_{s,p}$  を  $\|\cdot\|_{D^{s,p}}$  と同じ表式により定めたが,  $s \rightarrow +0, s \rightarrow 1-0$  の極限でそれぞれ  $\|u\|_{L^p}, \|\nabla u\|_{L^p}$  の定数倍に収束するように

$$[u]_{s,p} := \left( s(1-s) \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{N+ps}} dx dy \right)^{1/p}$$

により定義される場合もある.  $u \in W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$  に対し,

$$\|u\|_{s,p,V_+} := \left( \|u\|_{D^{s,p}}^p + \int_{\mathbb{R}^N} V_+ |u|^p dx \right)^{1/p}$$

とする. このとき, それをノルムとするバナッハ空間

$$E := \{u \in W^{s,p}(\mathbb{R}^N) \mid \|u\|_{s,p,V_+} < \infty\}$$

は一様凸空間となる．この  $E$  が今回の変分法の議論に用いる関数空間である．方程式 (1) に対応する  $E$  上のエネルギー汎関数  $I: E \rightarrow \mathbb{R}$  は

$$I[u] = \frac{1}{p} \|u\|_{D^{s,p}}^p + \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|u|^p dx - \frac{1}{2 \cdot p^*} \int_{\mathbb{R}^N} (K * g(u))g(u) dx - \varepsilon_W \int_{\mathbb{R}^N} W(x)f(u) dx \quad (u \in E)$$

である． $I$  の臨界点を方程式 (1) の弱解または単に解と呼ぶ．

非局所非線形項に対応するエネルギーの制御には Hardy-Littlewood-Sobolev の不等式の一般化である次の不等式を用いる． $f = |\cdot|^{-(N-\alpha)}$  の場合が Hardy-Littlewood-Sobolev の不等式である．これは弱  $L^r$  空間におけるヤングの不等式のアナロジーなどから証明できる．

**命題 2.**  $1/p_1 + 1/p_2 + 1/p_3 = 2$  を満たす指数  $p_1, p_2, p_3 \in (1, \infty)$  に対し，ある定数  $C > 0$  が存在して，任意の  $f \in L^{p_1, \infty}(\mathbb{R}^N)$ ,  $g \in L^{p_2}(\mathbb{R}^N)$ ,  $h \in L^{p_3}(\mathbb{R}^N)$  に対して，

$$\|(f * g)h\|_1 \leq \|f\|_{p_1, \infty} \|g\|_{p_2} \|h\|_{p_3}.$$

更に，一般化された畳み込み核  $K$  の挙動を解析するために次の簡単な補題を用意する．

**補題 3.** (K) を満たす  $K$  に対し， $K'(x) := |x|K(x)$  とすると， $K' \in L_{\text{loc}}^{r^*, \infty}(\mathbb{R}^N)$  である．ここで， $r < N$  のとき  $r^* = \frac{Nr}{N-r}$ ， $r \geq N$  のとき  $r^* = \infty$ ．

全領域における臨界方程式の  $(PS)_c$  列のコンパクト性を回復するためには，非有界な平行移動によるコンパクト性の破れとスケーリングによるコンパクト性の破れを共に記述する必要がある．そのために，本研究では，補題 3 を用いて，P. L. Lions [4] によるラドン測度に関する凝集コンパクト性補題を  $K$  との畳み込みを含む非局所的な量に直接適用できるように一般化・拡張することを試みた．これを記述するには複素ラドン測度の空間  $\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$  における漠収束 (vague convergence) と呼ばれる概念を用いる．

**定義 4.**  $C_0(\mathbb{R}^N)$  を  $f(x) \rightarrow 0$  ( $|x| \rightarrow \infty$ ) となる連続関数  $f: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{C}$  全体がなす空間で，一様ノルムを備えたものとする． $\mathbb{R}^N$  上の複素ラドン測度の列  $\{\mu_n\}$  が複素ラドン測度  $\mu$  に漠収束するとは，任意の  $f \in C_0(\mathbb{R}^N)$  に対して

$$\int_{\mathbb{R}^N} f d\mu_n \rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} f d\mu \quad (n \rightarrow \infty)$$

が成り立つことを言う．

Riesz-Markov-角谷の表現定理より， $\mathbb{R}^N$  上の複素ラドン測度全体が全変動ノルムに関してなすバナッハ空間  $\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$  は  $C_0(\mathbb{R}^N)$  の連続双対空間と同一視できるが，漠収束を定める位相 (漠位相) はまさにこの空間における汎弱位相である．漠収束は「弱収束」と呼ばれることもあるが，有界連続関数を試験関数とする確率論における通常の「測度の弱収束」とは異なるので注意が必要である．漠収束はその意味での「弱収束」よりも弱い．また， $\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$  は回帰的ではないため，漠収束と  $\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$  における関数解析的な意味での「弱収束」も一致しない．

本研究において拡張された凝集コンパクト性補題は次の通りである．

**定理 5.**  $\{u_n\}$  を  $D^{s,p}$  の有界列で,  $u_n \rightharpoonup u$  in  $D^{s,p}$  (weakly) and a.e. in  $\mathbb{R}^N$  を満たすものとする. ラドン測度の空間における漠収束の意味で,  $\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u_n(x) - u_n(y)|^p}{|x - y|^{N+ps}} dy \xrightarrow{*} \mu$ ,  $|u_n|^{p_s^*} \xrightarrow{*} \nu$ ,  $(K * |u_n|^{p^\dagger})|u_n|^{p^\dagger} \xrightarrow{*} \xi$  が成り立つと仮定する. それぞれの列の「無限遠に逃げる profile の総量」を

$$\begin{aligned}\mu_\infty &:= \lim_{R \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\{|x| \geq R\}} \left( \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u_n(x) - u_n(y)|^p}{|x - y|^{N+ps}} dy \right) dx; \\ \nu_\infty &:= \lim_{R \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\{|x| \geq R\}} |u_n|^{p_s^*} dx; \\ \xi_\infty &:= \lim_{R \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\{|x| \geq R\}} (K * |u_n|^{p^\dagger})|u_n|^{p^\dagger} dx\end{aligned}$$

とおく. このとき, 高々可算な添字集合  $\mathcal{I}$ , 点の族  $\{x_i\}_{i \in \mathcal{I}} \subset \mathbb{R}^N$ , 非負実数の族  $\{\xi_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ ,  $\{\mu_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ ,  $\{\nu_i\}_{i \in \mathcal{I}} \subset \mathbb{R}$  が存在して, 以下の結論 A, B, C, D が成り立つ.

#### A. 汎弱極限の分解

$$\begin{aligned}\xi &= (K * |u|^{p^\dagger})|u|^{p^\dagger} + \sum_{i \in \mathcal{I}} \xi_i \delta_{x_i}; \\ \mu &\geq \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{N+ps}} dy + \sum_{i \in \mathcal{I}} \mu_i \delta_{x_i}; \\ \nu &= |u|^{p_s^*} + \sum_{i \in \mathcal{I}} \nu_i \delta_{x_i}; \\ \sum_{i \in \mathcal{I}} \xi_i^{p_s^*/(2 \cdot p^\dagger)} &\leq \sum_{i \in \mathcal{I}} \xi_i^{p/(2 \cdot p^\dagger)} < \infty.\end{aligned}$$

#### B. 離散成分間の量的関係

$$\mu_i \geq S_K \xi_i^{p/(2 \cdot p^\dagger)}, \quad \nu_i \geq L_K \xi_i^{p_s^*/(2 \cdot p^\dagger)}, \quad \mu_i \geq S_{D^{s,p}} \nu_i^{p/p_s^*}. \quad (2)$$

#### C. 保存則

$$\begin{aligned}\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} (K * |u_n|^{p^\dagger})|u_n|^{p^\dagger} dx &= \int_{\mathbb{R}^N} d\xi + \xi_\infty; \\ \limsup_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_{D^{s,p}}^p &= \int_{\mathbb{R}^N} d\mu + \mu_\infty; \\ \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p_s^*} dx &= \int_{\mathbb{R}^N} d\nu + \nu_\infty.\end{aligned}$$

#### D. 無限遠に逃げる成分間の量的関係

$$\begin{aligned}L_K^2 \xi_\infty^{p_s^*/p^\dagger} &\leq \nu_\infty \left( \int_{\mathbb{R}^N} d\nu + \nu_\infty \right); \\ S_K^2 \xi_\infty^{p/p^\dagger} &\leq \mu_\infty \left( \int_{\mathbb{R}^N} d\mu + \mu_\infty \right); \\ S_{D^{s,p}} \nu_\infty^{p/p_s^*} &\leq \mu_\infty.\end{aligned}$$

更に, 量的関係 (2) は  $\xi_i, \mu_i, \nu_i$  をそれぞれ  $\xi(\mathbb{R}^N), \mu(\mathbb{R}^N), \nu(\mathbb{R}^N)$  に置き換えても成り立つ.

特に量的関係を用いて特異成分や無限遠に逃げる profile の総量が 0 であることを示すことで、十分小さい  $\varepsilon_W > 0$  と  $c < 0$  に対して  $I$  の  $(PS)_c$  条件の成立が言える。

**命題 6.**  $\varepsilon_W > 0$  が十分小さいとき、 $I$  は全ての  $c < 0$  に対して  $(PS)_c$  条件を満たす。すなわち、 $I[u_n] \rightarrow c, I'[u_n] \rightarrow 0$  in  $E'$  を満たす任意の  $\{u_n\} \subset E$  ( $(PS)_c$  列) が収束部分列をもつ。

*Proof.* 証明の概略のみ述べる。

$\{u_n\}$  を  $(PS)_c$  列とする。 $\{u_n\}$  は  $E$  で有界なので、必要なら部分列に移って弱収束するとして良い。更にソボレフの埋め込み定理や  $C_0(\mathbb{R}^N)$  に対する Banach–Alaoglu の定理などから先の補題の仮定を満たす部分列が存在する。表記の簡略化のため、以下、その部分列を同じ記号  $\{u_n\}$  で表す。

### 特異成分の非存在

カットオフ関数  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$  s.t.  $\chi_{B_1(0)} \leq \varphi \leq \chi_{B_2(0)}$  をとる。先の補題における各  $i \in \mathcal{I}$  に対し、

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \lim_{n \rightarrow \infty} I'[u_n] \left( \varphi \left( \frac{\cdot - x_i}{\varepsilon} \right) u_n \right) = 0$$

より、 $0 \geq \mu_i - \xi_i$  が得られる。これを量的関係 (2) と連立すると、各  $i$  に対して  $\xi_i = 0$  または  $\xi_i \geq S_K^{\frac{N(r+1)}{N+pr_s}}$  のどちらか一方が成り立つことが導かれる。後者の可能性は適当な  $\beta$  に対する  $I[u_n] - \beta I'[u_n]u_n$  の下からの評価を解析することで  $\varepsilon_W$  が十分小さければ排除できる。同様にして  $\mu_i = 0$  も言え、量的関係 (2) から  $\nu_i = 0$  も分かる。

### 無限遠に逃げる成分の非存在

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} I'[u_n](\eta_R u_n) &= 0 \quad (\eta_R(x) := 1 - \varphi(x/R)) \\ \therefore \mu_\infty + V_\infty &= \lim_{R \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} (K * g(u_n)) g'(u_n) u_n \eta_R dx. \end{aligned} \quad (3)$$

ここで、

$$V_\infty := \lim_{R \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} V |u_n|^p \eta_R dx.$$

$V_\infty$  の下からの評価や様々な不等式を経由すると、

$$\begin{aligned} &\lim_{R \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} (K * g(u_n)) g'(u_n) u_n \eta_R dx \\ &\leq C \left( \frac{V_\infty}{\tau_0} \right)^{\frac{\alpha' \hat{p}_g}{p}} (\nu_\infty)^{\frac{(1-\alpha') \hat{p}_g}{p_s^*}} + C' (\nu_\infty)^{1/\ell_r} \end{aligned}$$

が得られる。ここで、

$$\frac{1}{\hat{p}_g \ell_r} = \frac{\alpha'}{p} + \frac{1-\alpha'}{p_s^*}, \text{ i.e., } \alpha' := \frac{p(p_s^* - \hat{p}_g \ell_r)}{\hat{p}_g \ell_r (p_s^* - p)}.$$

積に関するヤングの不等式から、

$$\mu_\infty \leq \mu_\infty + (1 - C'' \varepsilon^{\frac{p}{\alpha' \hat{p}_g}}) V_\infty \leq C_\varepsilon (\nu_\infty)^{\frac{(1-\alpha') \hat{p}_g}{p_s^*}} \cdot \frac{p}{p - \alpha' \hat{p}_g} + C' \nu_\infty^{1/\ell_r}.$$

形式的に  $\hat{p}_g$  を変数と見做すと、指数

$$\Xi(\hat{p}_g) := \frac{(1-\alpha') \hat{p}_g}{p_s^*} \cdot \frac{p}{p - \alpha' \hat{p}_g} = \frac{\hat{p}_g \ell_r - p}{\hat{p}_g \ell_r - p \ell_r + p_s^* (\ell_r - 1)}$$

は  $\hat{p}_g$  に関して単調増加で、 $\Xi(p) = p/p_s^*$  であることに注意すると、 $\Xi(\hat{p}_g) > p/p_s^*$  ( $\because \hat{p}_g > p$ ). これと量的関係  $\mu_\infty > S_{D^s,p} \nu_\infty^{p/p_s^*}$  より、所与の指数と  $K, V, W, f, g$  のみに依存して  $\varepsilon_W$  に依存しない定数  $\Lambda_0 > 0$  が存在して  $\mu_\infty = 0$  または  $\mu_\infty > \Lambda_0$  が結論される. 再び適当な  $\beta$  に対する  $I[u_n] - \beta I'[u_n]u_n$  の下からの評価から  $\mu_\infty \leq O(\varepsilon_W^{\frac{p}{p - \min\{q_1, q_2\}}})$  (as  $\varepsilon_W \rightarrow 0$ ) が言えるので、 $\varepsilon_W$  が十分小さければ  $\mu_\infty > \Lambda_0$  となることはあり得ない. よって、 $\mu_\infty = 0$  となり、無限遠に逃げる成分間の量的関係と (3) から他の無限遠に逃げる成分も 0 であることが分かる.

### 強収束の導出

特異成分と無限遠に逃げる成分の非存在が言えたので、 $\|u_n\|_{D^s,p} \rightarrow \|u\|_{D^s,p}$  となる.  $V_\infty = 0$  や無限測度空間における Vitali の収束定理などから  $\|u_n\|_E = \|u\|_E$  が得られる.  $E$  の一様凸性から、これと弱収束を合わせると、 $u_n \rightarrow u$  in  $E$ .  $\square$

強収束の導出には様々な方法が考えられ、例えば  $I'[u_n]u_n \rightarrow 0$  と  $I'[u]u = 0$  の比較に基づく方法もある.  $(PS)_c$  条件から臨界点の列の存在を示すには、[1] 以降よく知られている次の symmetric mountain pass theorem を用いる.

**定理 7** (Ambrosetti–Rabinowitz, 1973).  $X$  を無限次元バナッハ空間、 $\mathcal{A} := \{A \subset X \mid A : \text{closed}, -A = A\}$  とし、 $\gamma(A)$  で  $A \in \mathcal{A}$  の Krasnoselskii genus を表す. すなわち、

$$\gamma(A) := \inf\{m \in \mathbb{N} \mid \exists h \in C(A; \mathbb{R}^m \setminus \{0\}); h(-\cdot) = -h\}.$$

$\Sigma_n := \{A \in \mathcal{A} \mid \gamma(A) \geq n\}$  とおく.

$J \in C^1(X; \mathbb{R})$  は下に有界な偶汎関数で  $J(0) = 0$  と任意の  $c < 0$  に対する  $(PS)_c$  条件を満たすとす. 各  $n \in \mathbb{N}$  に対し、 $\sup_{A_n} J < 0$  なる  $A_n \in \Sigma_n$  が存在すると仮定すると、各  $c_n := \inf_{A \in \Sigma_n} \sup_A J$  は  $J$  の臨界値である.

ただし、方程式 (1) に対応するエネルギー汎関数  $I$  そのものはこの仮定を満たさないため、 $I$  の適切なカットオフ  $J$  を考え、それに対して上記の臨界点定理を用いる. 具体的には、適当なカットオフの仕方を見定めるために、 $I$  の下からの評価

$$I[u] \geq C_1 \|u\|_E^p - C_2 (\|u\|_E^{2\hat{p}_g} + \|u\|_E^{2p^\dagger}) - \varepsilon_W \cdot C_3 (\|u\|_E^{q_1} + \|u\|_E^{q_2})$$

に注目する.  $\ell_\varepsilon(t) := C_1 t^p - C_2 (t^{2\hat{p}_g} + t^{2p^\dagger}) - \varepsilon_W \cdot C_3 (t^{q_1} + t^{q_2})$  に対し、 $\exists \varepsilon'_0 > 0$  s.t.  $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon'_0)$ ;  $0 < \exists t_{\varepsilon,0} < \exists t_{\varepsilon,1}$  s.t.  $\ell_\varepsilon(t) < 0$  for  $t \in (0, t_{\varepsilon,0})$ ;  $\ell_\varepsilon(t) > 0$  for  $t \in (t_{\varepsilon,0}, t_{\varepsilon,1})$ ;  $\ell_\varepsilon(t) < 0$  for  $t \in (t_{\varepsilon,1}, \infty)$  が成立する. カットオフ関数  $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$  s.t.  $\chi_{[0, t_{\varepsilon_W,0}^p]} \leq \psi \leq \chi_{[0, t_{\varepsilon_W,1}^p]}$  をとり、

$$\begin{aligned} J[u] &:= I_+[u] - \psi(\|u\|_E^p) I_-[u] \\ &= \frac{1}{p} \|u\|_{D^s,p}^p + \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} V(x) |u|^p dx \\ &\quad - \frac{1}{2p^\dagger} \psi(\|u\|_E^p) \int_{\mathbb{R}^N} (K * g(u)) g(u) dx \\ &\quad - \varepsilon_W \psi(\|u\|_E^p) \int_{\mathbb{R}^N} W(x) f(u) dx \end{aligned}$$

とすると、 $J$  は下に有界となり、 $J[u] < 0 \Rightarrow I[u] = J[u]$  となる. よって、 $c < 0$  に対する  $I$  の  $(PS)_c$  条件から  $J$  の  $(PS)_c$  条件が従う.

この  $J$  と各自然数  $n$  に対し,  $J$  の上からの評価と Krasnoselskii genus の単調性から  $J^{-1}((-\infty, \delta_n]) \in \Sigma_n$  を示せる. ここから,

$$c_n := \inf_{A \in \Sigma_n} \sup_A J \leq \delta_n < 0.$$

こうして  $J$  が symmetric mountain pass lemma の仮定を満たすことが分かるので適用する.

## 参考文献

- [1] Ambrosetti, A., Rabinowitz, P. H.: Dual variational methods in critical point theory and applications. *J. Funct. Anal.* **14**, 349–381 (1973)
- [2] Brasco, L., Gómez-Castro, D., Vázquez, J. L.: Characterisation of homogeneous fractional Sobolev spaces. *Calc. Var. Partial Differ. Equ.* **60**, 60 (2021)
- [3] Lin, X., Zheng, S., Feng, Z.: Multiple solutions of  $p$ -fractional Schrödinger-Choquard-Kirchhoff equations with Hardy-Littlewood-Sobolev critical exponents. *Adv. Nonlinear Stud.* **23**, 20220059 (2023)
- [4] Lions, P. L.: The Concentration-Compactness Principle in the Calculus of Variations. The limit case, Part 1. *Rev. Mat. Iberoam.* **1**(1), 145–201 (1985)
- [5] Moroz, V., Schaftingen, J.: A guide to the Choquard equation. *J. Fixed Point Theory Appl.* **19**, 773–813 (2017)
- [6] Pekar, S.: Untersuchung über die elektronentheorie der kristalle. Akademie Verlag, Berlin (1954)
- [7] Penrose, R.: On gravity’s role in quantum state reduction. *Gen Relativ Gravit.* **28**(5), 581–600 (1996)
- [8] Sakuma, M.: Infinitely many solutions for  $p$ -fractional Choquard type equations involving general nonlocal nonlinearities with critical growth via the concentration compactness method. to appear in *J. Differ. Equ.* arXiv: 2305.01705 (2024)
- [9] Tao, L., He, R., Liang, S., Niu, R.: Existence and multiplicity of solutions for critical Choquard-Kirchhoff type equations with variable growth. *AIMS Math.* **8**(2), 3026–3048 (2023).
- [10] Wang, L., Han, T.: Infinitely Many Solutions for Schrödinger-Choquard-Kirchhoff Equations Involving the Fractional  $p$ -Laplacian. *Acta Math. Sin. Engl. Ser.* **37**(2), 315–332 (2021)