時系列がランダムウォーク的か量子ウォーク的かを区別する研究にむけて

神奈川大学大学院　工学研究科　工学専攻
坂本光 (Hikari SAKAMOTO) *

概要

時系列解析における時系列モデルは, ノイズをガウス分布に従うホワイトノイズとして採用するのが典型的である. これはランダムウォークに従う古典的なノイズの影響を受けるといえるが, 量子的なノイズ, すなわち「量子ウォーク」に従うノイズに影響を受ける場合を考えたい. 本研究は量子的なノイズを持つ時系列にどのような特徴があるか, 時系列がランダムウォーク的であるか量子ウォーク的であるかを区別する手法について述べる.

1　導入

1.1　AR モデル

時系列モデルの内の 1 つであり, 自己回帰モデルと呼ばれ, 現在の値を過去のデータを用いて回帰するモデルである. 本研究では AR モデルの中でも 1 時点前までのデータを用いて回帰する 1 次トレンドモデルを用いる.

$$x_{t+1} = x_t + w$$

ここでノイズ w は以下のパラメータで定義される確率変数である.

- ランダムウォークの場合： $w \sim N(\mu, \sigma^2)$
- 量子ウォークの場合： $w \sim QN(r, m, |a|, C)$

$N(\mu, \sigma^2)$ は平均 μ, 分散 σ^2 の正規分布を表し, $QN(r, m, |a|, C)$ は後述する量子ウォークの弱収束分布である. また, 量子ウォークのパラメータについては下記にて詳しく説明する.

1.2　量子ウォーク

一次元格子上 $\mathbb{Z}$ 上の離散時間量子ウォークを定義する. 時刻 t, 頂点 x での確率振幅 $\Psi_t(x) \in \mathbb{C}^2$ について時間発展を次のように定義する.

$$\Psi_{t+1}(x) = P\Psi_t(x+1) + Q\Psi_t(x-1).$$

* E-mail:r202370136ay@jindai.jp

ただし，P, Q は以下で与えられる 2×2 行列であり，特に $P+Q$ はユニタリ行列 U になるとする．

$$U = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{bmatrix}.$$

U がユニタリ行列であることから，$|a|^2+|c|^2=|b|^2+|d|^2=1$ が成立する．特にユニタリ行列 U が

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

である場合をアダマールウォークという．
また，初期状態は $|\alpha^2|+|\beta^2|=1$ を満たす $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ に対し，以下である．

$$\Psi_0(x) = \begin{cases} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \end{bmatrix}^T, & x=0, \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T, & x \neq 0. \end{cases}$$

ここで，T は転置を表す．時刻 t で量子ウォーカーが場所 x に存在する確率を $\|\Psi_t(x)\|^2$ で定義する．

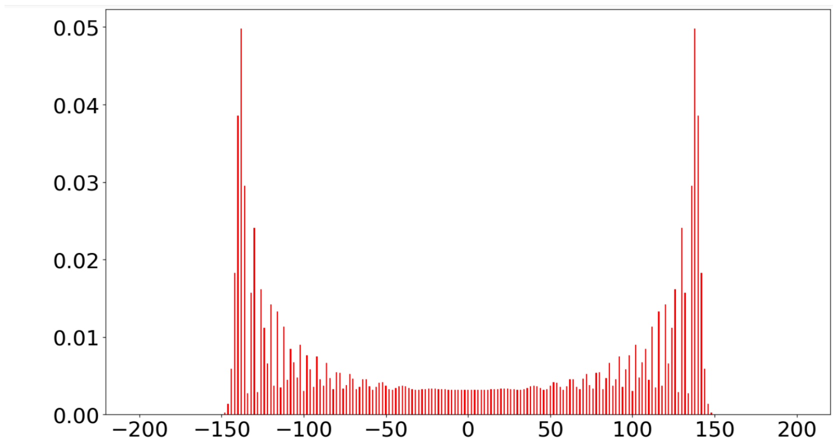

図 1　原点出発で $t=200$ の時のアダマールウォークの分布の形[*2]

時刻 t で量子ウォーカーが存在する場所を表す確率変数を X_t とすると，$Z := \lim_{t\to\infty} X_t/t$ の確率密度関数は以下となることが今野 [1,2] より知られている．

$$f(x) = (1 - C(a,b,\alpha,\beta)x)\, f_K(x).$$

ただし，$C = C(a,b,\alpha,\beta)$，$f_K(x)$ は以下の通りである．

$$C(a,b,\alpha,\beta) = |\alpha|^2 - |\beta|^2 + \frac{a\alpha\bar{b}\bar{\beta} + \bar{a}\bar{\alpha}b\beta}{|a|^2},$$

$$f_K(x) = \frac{\sqrt{1-|a|^2}}{\pi(1-x^2)\sqrt{|a|^2-x^2}} I_{(-|a|,\ |a|)}(x).$$

[*2] 縦軸は確率，横軸は場所である．

この確率密度関数 $f(x)$ のことを「今野分布」という．定義関数 $I_{(-|a|,\ |a|)}(x)$ は x が $-a$ から a であるときに 1 となり, その他の場合は 0 となる定義関数である． 今野分布の平均, 分散は以下の通りである．

$$
\begin{aligned}
E[Z] &= C(1-\sqrt{1-|a^2|}),\\
V[Z] &= (1-\sqrt{1-|a^2|}) - C^2(1-\sqrt{1-|a^2|})^2.
\end{aligned}
$$

正規分布であれば任意の平均, 分散を与えるように密度関数を与えることが出来るが, 今野分布はユニタリ性などの制約から $0<|a|<1$, $-\frac{1}{|a|}<C<\frac{1}{|a|}$ であるため, 必ずしもそうではないため, モデルの拡張を行う．

1.3 拡張した量子ウォーク

典型的な一次元格子 $\mathbb{Z}$ 上の離散時間量子ウォークの，歩幅を非負実数 r，出発点を実数 m とした量子ウォークとしたモデルを考える．確率振幅 $\Psi_t(x)$ に対して，時間発展を以下で定める．

$$
\Psi_{t+1}(x) = P\Psi_t(x+r) + Q\Psi_t(x-r).
$$

また，初期状態は以下である．

$$
\Psi_0(x) = \begin{cases} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \end{bmatrix}^T, & x = m, \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T, & x \neq m. \end{cases}
$$

この拡張したモデルにおいて，時刻 t で量子ウォーカーが存在する場所を表す確率変数をあらためて X_t とすると，$\tilde{Z} := \lim_{t\to\infty} X_t/t$ の確率密度関数は以下となる．

$$
\tilde{f}(x) = \frac{1}{r} f\left(\frac{x-m}{r}\right).
$$

これを「拡張した今野分布」ということにする．このとき $\tilde{Z}$ の平均 μ と分散 σ^2 は以下となる．

$$
\begin{aligned}
E[\tilde{Z}] =& \mu = -rC\left(1-\sqrt{1-|a|^2}\right) + m,\\
V[\tilde{Z}] =& \sigma^2 = r^2(1-\sqrt{1-|a|^2})\left\{1-C^2(1-|a|^2)\right\}.
\end{aligned}
$$

したがって，μ と σ^2 を任意の定数としたとき，それに応じて r, m が定められる．このことから，$\tilde{f}(x)$ は，$\mu, \sigma^2, |a|, C = C(a, b, \alpha, \beta)$ をパラメータとした関数として記述される．

以上の結果から量子ウォークのノイズ w のパラメータは $(r, m, |a|, C)$ の 4 つになり, 得られた N 個のサンプル $(\hat{x_1}, \hat{x_2}, ..., \hat{x_N})$ に対し, モーメント母数推定法から適切なパラメータを求めたい．
ただし, 本研究ではアダマールウォークについて考えるため, $|a| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ となる．

1.4　モーメント母数推定法

得られた N 個のサンプル $(\hat{x_1}, \hat{x_2}, ..., \hat{x_N})$ について, 標本平均を $\bar{x}$ とすると,

$$\bar{x} := \sum_{i=1}^{N} \frac{\hat{x}_i}{N}$$

で表すことができる．例えば, モーメント母数推定法では $E[\tilde{Z}] = \bar{x}$ を満たすようなパラメータ m, r, C を定める.

K 次の標本モーメント $\hat{m}_K$ を以下のように定義する.

$$\hat{m}_K := \sum_{i=1}^{N} \frac{(\hat{x}_i)^K}{N}$$

推定するパラメータが 3 つであることから $K = 1, 2, 3$ について $E[\tilde{Z}^K] = \hat{m}_K$ を満たすパラメータを推定する．$\tilde{Z}$ の K 次モーメントを $E[\tilde{Z}^K]$ とすると,

$$E[\tilde{Z}^K] = \int_{-\infty}^{\infty} x^K \tilde{f}(x) dx$$

と書き表すことができ, 拡張した今野分布の確率密度関数 $\tilde{f}(x)$ を通常の今野分布の確率密度関数 $f(x)$ に変形すると,

$$\begin{aligned}
E[\tilde{Z}^K] &= \int_{-\infty}^{\infty} x^K \tilde{f}(x) dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x^K f\left(\frac{x-m}{r}\right) dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (ry+m)^K \frac{1}{r} f(y) r dy \\
&= \sum_{j=0}^{K} \binom{K}{j} m^{k-j} r^j \int_{-\infty}^{\infty} y^j f(y) dy \\
&= \sum_{j=0}^{K} \binom{K}{j} m^{k-j} r^j E[Z^K]
\end{aligned}$$

と書き換えることができ, 確率変数 Z の j 次モーメントで書き表すことができるようになる.

1.5　今野分布の j 次モーメント

以下，サンプルを適当に平行移動することにより平均 $\bar{x} = \hat{m}_1 = 0$ である場合を考える．今野分布の j 次モーメントは

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} y^j f(y) dy \\
=& \begin{cases} 1 - \sqrt{1-|a|^2} \sum_{u=0}^{m-1} \binom{2u}{u} \left(\frac{|a|^2}{4}\right)^u & (j = 2m) \\ 0 & (j = 2m+1) \end{cases}
\end{aligned}$$

で求めることができると知られているため, これを用いて $E[\tilde{Z}^K]$ を求めると,

$$E[\tilde{Z}^1] = m - A_1 Cr \tag{1}$$
$$E[\tilde{Z}^2] = m^2 - 2A_1 Cmr + A_1 r^2 \tag{2}$$
$$E[\tilde{Z}^3] = m^3 - 3A_1 Cm^2 r + 3A_1 mr^2 - A_2 Cr^3 \tag{3}$$

となる. (1),(2) 式から C, r を求めると

$$C = \frac{m}{A_1 r} \quad , \quad r = \sqrt{\frac{m^2 + \hat{m}_2}{A_1}}$$

となる. ただし, A_1, A_2 はそれぞれ

$$A_1 = 1 - \sqrt{1 - |a^2|} \quad , \quad A_2 = 1 - \sqrt{1 - |a^2|}\left(1 + \frac{|a|^2}{2}\right)$$

である.

また, (3) 式をカルダノの公式を用いて m について解くと, 非負実数解の 1 つは

$$m = -\sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{B}$$

となる. ただし,

$$A = \frac{3\sqrt{3}q + \sqrt{27q^2 + 4p^3}}{6\sqrt{3}} \quad , \quad B = \frac{3\sqrt{3}q - \sqrt{27q^2 + 4p^3}}{6\sqrt{3}} \quad ,$$
$$p = \frac{3A_1^2 \hat{m}_2 - A_2 \hat{m}_2}{A_1^2 - A_2} \quad , \quad q = \frac{-A_1^2 \hat{m}_3}{A_1^2 - A_2}$$

である.

2 主結果

拡張した今野分布に従うノイズ w について, サンプル $(\hat{x_1}, \hat{x_2}, ..., \hat{x_N})$ の下でモーメント母数推定法より推定されるパラメータを用いる場合, 以下が成り立つ.

$$w \sim QN\left(\sqrt{\frac{(-\sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{B})^2 + \hat{m}_2}{A_1}} \quad , \quad -\sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{B} \quad , \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \quad , \quad \frac{-\sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{B}}{A_1 r}\right)$$

本研究では種々の時系列データに対し, これが一次トレンドモデルに従うと仮定した上でノイズ w が正規分布 (ランダムウォーク), アダマールウォークの場合の拡張した今野分布 (量子ウォーク) に従うそれぞれの場合を比較した.

参考文献

[1] Konno, N. (2002). Quantum random walks in one dimension, *Quantum Inf. Process.*, **1**, 345-354

[2] Konno, K. (2005). A new type of limit theorems for the one-dimensional quantum random walk, *J. Math. Soc. Jpn.,* **57**, 1179-1195