有限生成射影複体のホモトピー圏の安定理論

名古屋大学大学院 多元数理科学研究科
大竹 優也 (Yuya OTAKE) *

概要

ネーター環上の有限生成加群の圏の安定理論（安定加群論）は、今日まで環の表現論において重要な役割を果たしてきた。近年、有限生成射影加群からなる複体のなすホモトピー圏のある種の安定圏に対し、類似の理論（安定複体論）が成立することが見出された。この講演では、加群に対して定義される Gorenstein 射影性等のホモロジカルな概念の複体への拡張を与え、安定複体論からどのように安定加群論が回復されるかをみる。

1　導入

以下、R を両側ネーター環とし、有限生成右 R 加群の圏を $\operatorname{mod} R$ で表す。前世紀半ば、環論にホモロジー代数の理論が導入され革命を齎して以来、加群圏の構造解析が環論の主要な研究手法の一つとなっている。環の表現論において Ext や Tor などの導来関手たちの振る舞いが枢要だが、これらを調べる上では加群の射影因子の差は無視することができる。この視点に立ち、1969 年、Auslander–Bridger [ABr] は、圏 $\operatorname{mod} R$ の射影安定化 $\underline{\operatorname{mod}} R$ の理論（安定加群論）を構築した。安定圏上では、加群のシジジー（syzygy）をとる操作がシジジー関手 $\Omega : \underline{\operatorname{mod}} R \to \underline{\operatorname{mod}} R$ として、転置（transpose）をとる操作が転置関手 $\operatorname{Tr} : \underline{\operatorname{mod}} R \xrightarrow{\sim} \underline{\operatorname{mod}} R^{\mathrm{op}}$ として実現され、これらの関手たちの解析は有限次元多元環の表現論 [ARS, ASS] や可換 Cohen–Macaulay 表現論 [LW, Y1] において主要な地位を占めてきた。次節で、安定加群論において導入された加群の射影性（resp. 射影次元）の Gorenstein 類似である Gorenstein 射影性（resp. Gorenstein 次元）に焦点を絞りその概要を述べる。

ごく近年、上述した安定加群論の複体への拡張として安定複体論 [Y2] が構築された。有限生成射影右 R 加群のなす $\operatorname{mod} R$ の部分圏を $\operatorname{proj} R$ で表すことにする。吉野 [Y2] は、$\operatorname{proj} R$ 上の複体のホモトピー圏 $\mathcal{K}(\operatorname{proj} R)$ の、R の加法閉包 $\operatorname{Add} R$ による安定化 $\underline{\mathcal{K}(\operatorname{proj} R)}$ に対し、Auslander–Bridger の安定加群論に対応する理論（安定複体論）が存在することを見出した。ホモトピー圏 $\mathcal{K}(\operatorname{proj} R)$ は三角圏の構造を有する。故に安定複体論におけるシジジーは $\operatorname{Add} R$ による右近似の写像錐（mapping cone）を用いて定義され、転置は R 双対が引き起こす自己同値が定める。$\mathcal{K}(\operatorname{proj} R)$ の対象に対しても、加群の場合 [Aus] と同様に Auslander 型長完全列が存在するため、これを基に Gorenstein 射影性や Gorenstein 次元を定義することができる [O]。このレポートの主目的は、安定複体論 [Y2] の基本事項と Gorenstein 次元有限複体に対する近似定理 [O] を紹介することである。

* E-mail:m21012v@math.nagoya-u.ac.jp

2　加群の Gorenstein 次元

有限生成右 R 加群 M に対し、$M^* = \mathrm{Hom}_R(M,R)$ と定める。これは M の R 双対と呼ばれ、有限生成右 R^{op} 加群となる。有限生成射影表示 $P_1 \xrightarrow{\partial} P_0 \to M \to 0$ をとったとき、∂ の R 双対の余核を $\mathrm{Tr}\, M$ と書き、故に完全列 $P_0^* \to P_1^* \to \mathrm{Tr}\, M \to 0$ が存在する。加群 $\mathrm{Tr}\, M$ は加群 M の**転置**と呼ばれ、（有限）射影表示の取り方に依らず射影因子の差を除き一意的に定まる。

自然な準同型 $\varphi_M : M \to M^{**}$ が $x \in M$ と $f \in M^*$ に対し $\varphi_M(x)(f) = f(x)$ により定まるが、次の Auslander 完全列（あるいは Auslander–Bridger 完全列）が基本的である。

定理 2.1 (**[Aus, ABr]**)**.** 自然な準同型 $\varphi_M : M \to M^{**}$ に対し、完全列

$$0 \to \mathrm{Ext}^1_{R^{\mathrm{op}}}(\mathrm{Tr}\, M, R) \to M \xrightarrow{\varphi_M} M^{**} \to \mathrm{Ext}^2_{R^{\mathrm{op}}}(\mathrm{Tr}\, M, R) \to 0$$

が存在する。

有限生成右 R 加群 M に対し、自然な写像 $\varphi_M : M \to M^{**}$ が単射であるとき M は**捩れなし**（torsionless）であるといい、φ_M が全単射であるとき M は**反射的**（reflexive）であるという。Auslander 完全列（2.1）により、M が捩れなし（resp. 反射的）であることと $\mathrm{Ext}^1(\mathrm{Tr}\, M, R) = 0$（resp. $\mathrm{Ext}^{1,2}(\mathrm{Tr}\, M, R) = 0$）であることは同値である。この定義を自然に拡張することにより、Auslander–Bridger [ABr] は加群の高次捩れ自由性を導入した[*1]。

定義 2.2 (**[ABr]**)**.** 有限生成右 R 加群 M と非負整数 $n \geq 0$ に対し、M が n-**捩れ自由**（n-torsionfree）であるとは、$\mathrm{Ext}^i_{R^{\mathrm{op}}}(\mathrm{Tr}\, M, R) = 0$ が任意の $1 \leq i \leq n$ に対して成り立つことをさす。

高次捩れ自由加群は次のような特徴付けを持つ「良い」加群である；有限生成右 R 加群 M が n-捩れ自由加群であるための必要十分条件は、各 P_i が有限生成射影加群でるような完全列 $0 \to M \to P_{n-1} \to \cdots \to P_1 \to P_0$ が存在して、その R 双対 $P_0^* \to P_1^* \to \cdots \to P_{n-1}^* \to M^* \to 0$ もまた完全列となることである。このように n-捩れ自由加群が持つ R 双対に関する高い対称性を両側に無限遠まで延ばすことにより Gorenstein 射影性が定義される。

定義 2.3 (**[ABr]**)**.** 有限生成右 R 加群 M が **G 次元 0** をもつ（あるいは **Gorenstein 射影的**、あるいは**全反射的**である）とは、$\mathrm{Ext}^i_R(M,R) = 0$ と $\mathrm{Ext}^i_{R^{\mathrm{op}}}(\mathrm{Tr}\, M, R) = 0$ が任意の $i > 0$ で成り立つことをさす。

Gorenstein 射影加群 M は**完全分解**（complete resolution）をもつ。すなわち有限生成射影加群からなる左右に無限に延びる完全列 $\cdots \to P_2 \to P_1 \to P_0 \to P_{-1} \to P_{-2} \to \cdots$ が存在して、準同型 $P_1 \to P_0$ の余核が M となり、また R 双対複体 $\cdots \to P_{-2}^* \to P_{-1}^* \to P_0^* \to P_1^* \to P_2^* \to \cdots$ もまた完全列となる。この事実からも Gorenstein 射影加群が R 双対に関して究極的に高い対称性を有することが見て取れる。

[*1] 通常、可換環 R 上の有限生成加群 M について、自然な写像 $M \to M \otimes_R Q(R)$ が単射であるとき、M は**捩れ自由**（torsionfree）であるという。ここで、$Q(R)$ は R の全商環である。この定義のもと、R が整域であるときには、M が捩れ自由であることと捩れなしであることは同値となる。

Gorenstein 射影性を用いた可換環の Gorenstein 性の特徴付けについて述べる。可換環のホモロジー代数の基本定理である Serre の定理は「Krull 次元 d の可換ネーター局所環 R が正則（=非特異）であるための必要十分条件は、任意の $M \in \operatorname{mod} R$ に対しその d 次シジジー $\Omega^d M$ が射影的であることである」と述べることができる。後者の条件は、加群 M の射影次元が d 以下、すなわち完全列

$$0 \to P_d \to P_{d-1} \to \cdots \to P_0 \to M \to 0$$

であって、各 P_i が有限生成射影加群であるものが存在することの言い換えである。ところで、可換ネーター環に対する次のヒエラルキーは広く知られている。

$$\text{正則} \Longrightarrow \text{完全交差} \Longrightarrow \text{Gorenstein} \Longrightarrow \text{Cohen–Macaulay} \Longrightarrow \text{Buchsbaum} \Longrightarrow \cdots$$

Gorenstein 環は、非特異とは限らないものの極めて高い対称性を有する優れた可換環のクラスである。Auslander–Bridger [ABr] は、上述した加群の Gorenstein 射影性を用いることにより、Serre による正則局所環の特徴付けの Gorenstein 類似が与えられることを見出した。

定理 2.4 ([**ABr**])**.** Krull 次元 d の可換ネーター局所環 R に対し、次は同値。

- 環 R は Gorenstein。
- 任意の $M \in \operatorname{mod} R$ に対し、M の Gorenstein 次元は d 以下、すなわち $\Omega^d M$ が Gorenstein 射影的。

彼らの研究に動機づけられ、可換環上の加群に対し完全交差次元や CM 次元といった新たなホモロジカル次元が導入され、可換環論に新たな地平線を齎している。他方、従来のホモロジー代数の Gorenstein 類似を追求する Gorenstein ホモロジー代数もまた彼らの仕事を端緒として生まれ、環の表現論の潮流を成している。さて、Gorenstein 次元の有限性は射影次元の場合と同様に、Gorenstein 射影加群による有限右分解の存在により特徴づけられる。ここで Gorenstein 次元が有限な加群の構造を考えたとき、Auslander–Buchweitz 理論の帰結として実は次の近似定理が成り立つことが知られている。

定理 2.5 ([**ABu**])**.** 有限生成右 R 加群に対し次は同値。

- 加群 M の Gorenstein 次元は有限。
- 有限生成右 R 加群の短完全列 $0 \to Y_M \to X_M \to M \to 0$ が存在して、Y_M の射影次元は有限で、X_M は Gorenstein 射影的である。

このように Gorenstein 次元有限な加群の理解は Gorenstein 射影加群と射影次元有限加群の理解に（ある意味で）帰着されるのであって、定理 2.4 と併せると、可換 Gorenstein 環上のいかなる有限生成加群も、Gorenstein 射影加群と射影次元有限加群の貼り合わせで得られることになる。

3　安定複体論と主結果

引き続き R を両側ネーター環とする。有限生成射影加群からなる複体の圏のホモトピー圏 $\mathcal{K}(\mathsf{proj}\, R)$（すなわち、$\mathsf{proj}\, R$ 上の複体圏のヌル複体たちによるイデアル商）に対し吉野 [Y2] により

構築された安定複体論と [O] の主結果の一つを紹介する。

定義 3.1 ([**Y2**]). ホモトピー圏 $\mathcal{K}(\mathsf{proj}\,R)$ の充満部分圏 $\mathrm{Add}\,R$ を、$R = (\cdots \to 0 \to R \to 0 \to \cdots)$ を含み、同型、シフト、直和因子、直和[*2]で閉じた充満部分圏の中で最小のものとする。

定義 3.2 ([**Y2**]). ホモトピー圏 $\mathcal{K}(\mathsf{proj}\,R)$ の充満部分圏 $\mathrm{Add}\,R$ によるイデアル商を $\underline{\mathcal{K}(\mathsf{proj}\,R)}$ と書く。

部分圏 $\mathrm{Add}\,R$ は $\mathcal{K}(\mathsf{proj}\,R)$ の関手的有限部分圏であることが分かるので、次のようにシジジーとコシジジーを定義することが可能となる。詳細は述べられないが、これらが随伴対をなすことが後に述べる定理 3.9 や定理 3.11 の証明において本質的な役割を果たす。

定義-定理 3.3 ([**Y2**]). 対象 $X \in \mathcal{K}(\mathsf{proj}\,R)$ に対し、その右 $\mathrm{Add}\,R$ 近似 $p : P \to X$ (resp. 左 $\mathrm{Add}\,R$ 近似 $q : X \to Q$)をとり、その余写像錐(resp. 写像錐)を ΩX (resp. $\Omega^- X$)と書く。よって $\mathcal{K}(\mathsf{proj}\,R)$ 内に特三角 $\Omega X \to P \to X \to \Omega X[1]$ (resp. $X \to Q \to \Omega^- X \to X[1]$) が存在する。この対応によりシジジー関手 $\Omega : \underline{\mathcal{K}(\mathsf{proj}\,R)} \to \underline{\mathcal{K}(\mathsf{proj}\,R)}$ (resp. コシジジー関手 $\Omega^- : \underline{\mathcal{K}(\mathsf{proj}\,R)} \to \underline{\mathcal{K}(\mathsf{proj}\,R)}$) が定まる。このとき関手の対 (Ω^-, Ω) は随伴対をなす、すなわち関手的同型

$$\mathrm{Hom}_{\underline{\mathcal{K}(\mathsf{proj}\,R)}}(\Omega^- X, Y) \cong \mathrm{Hom}_{\underline{\mathcal{K}(\mathsf{proj}\,R)}}(X, \Omega Y)$$

が $X, Y \in \underline{\mathcal{K}(\mathsf{proj}\,R)}$ に対し成立する。

ホモトピー圏 $\mathcal{K}(\mathsf{proj}\,R)$ 内の任意の特三角 $X \to Y \to Z \to X[1]$ に対し、コホモロジーの長完全列

$$\cdots \to H^{i-1}(Z) \to H^i(X) \to H^i(Y) \to H^i(Z) \to H^{i+1}(X) \to \cdots$$

が延びる。他方、上のシジジーの定義を顧みると、複体 $X \in \mathcal{K}(\mathsf{proj}\,R)$ の右 $\mathrm{Add}\,R$ 近似 $P \to X$ に対しコホモロジーの間の準同型 $H^i(P) \to H^i(X)$ は任意の整数 i で全射であることが分かる(逆も成立する)。すなわちシジジーの特三角 $\Omega X \to P \to X \to \Omega X[1]$ に対し、コホモロジーの長完全列は短完全列 $0 \to H^i(\Omega X) \to H^i(P) \to H^i(X) \to 0$ に分解する。安定複体論において短完全列の役割を果たすのは、$\mathcal{K}(\mathsf{proj}\,R)$ 内の特三角であって、コホモロジーの長完全列が上のように短完全列に分かれるものたちである。

定義 3.4 ([**O**]). ホモトピー圏 $\mathcal{K}(\mathsf{proj}\,R)$ 内の特三角 $X \to Y \to Z \to X[1]$ が**幽霊特三角**(ghost triangle)であるとは、コホモロジーの長完全列が任意の整数 i に対し短完全列 $0 \to H^i(X) \to H^i(Y) \to H^i(Z) \to 0$ に分解することをいう。

特三角 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \to X[1]$ が幽霊特三角であるための必要十分条件は、任意の i に対し $H^i(g) : H^i(Y) \to H^i(Z)$ が全射である(g がコホモロジー的全射)ことであり、これは任意の i に対し $H^i(f) : H^i(X) \to H^i(Y)$ が単射である(f がコホモロジー的単射)ことといっても同じである。

[*2] $\mathcal{K}(\mathsf{proj}\,R)$ の対象の無限族の直和は、必ずしも $\mathcal{K}(\mathsf{proj}\,R)$ 内で存在するとは限らない。よってここでは、$\mathcal{K}(\mathsf{proj}\,R)$ の充満部分圏 $\mathcal{X}$ が、任意の $\mathcal{X}$ の対象の族 $\{X_i\}_{i \in I}$ に対して、その直和 $\coprod_{i \in I} X_i$ が $\mathcal{K}(\mathsf{proj}\,R)$ 内で存在すれば $\coprod_{i \in I} X_i \in \mathcal{X}$ を満たすとき、$\mathcal{X}$ は直和で閉じるといっている。

例 3.5 ([**Y2**])**.** 有限生成 R 加群 M とその有限生成射影分解 $\cdots \to P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \to 0$ をとる。複体 $X = (\cdots \to 0 \to P_1 \to P_0 \to 0 \to \cdots) \in \mathcal{K}(\mathsf{proj}\, R)$ のシジジーとコシジジーを計算してみる。複体 $P = (\cdots \to 0 \to P_2 \xrightarrow{0} P_0 \to 0 \to \cdots) \in \mathcal{K}(\mathsf{proj}\, R)$ と複体射

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[d, "p"] & = & (& \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & P_2 \arrow[r, "0"] \arrow[d, "d_2"] & P_0 \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots &) \\
X & = & (& \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & P_1 \arrow[r, "d_1"] & P_0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots &)
\end{tikzcd}$$

を考えると、$P \in \operatorname{Add} R$ であって、$p : P \to X$ はコホモロジー的全射である。よって p は X の右 $\operatorname{Add} R$ 近似であって、X のシジジーが

$$\begin{aligned}
\Omega X &= (\cdots \to 0 \to P_2 \xrightarrow{\binom{0}{d_2}} P_0 \oplus P_1 \xrightarrow{(1,0)} P_0 \to 0 \to \cdots) \\
&\cong (\cdots \to 0 \to P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \to 0 \to \cdots) \text{ in } \mathcal{K}(\mathsf{proj}\, R)
\end{aligned}$$

と計算できる。他方 $\operatorname{Tr} M$ の有限生成射影分解を $\cdots \to Q_2 \to Q_1 \to P_0^* \to P_1^* \to \operatorname{Tr} M \to 0$ ととれば、X のコシジジーも同様に計算でき、$\Omega^- X = (\cdots \to 0 \to P_0 \to Q_1^* \to 0 \to \cdots)$ となる。

加群の R 双対に関する Auslander 完全列（定理 2.1）の複体版を考える。複体 $X \in \mathcal{K}(\mathsf{proj}\, R)$ と整数 i に対し、自然な準同型 $\gamma_X^i : H^i(X) \to H^{-i}(X^*)^*$ が $\overline{f} \in H^{-i}(X^*)$ と $\overline{x} \in H^i(X)$ に対し $\gamma_X^i(\overline{x})(\overline{f}) = f(x)$ とすることにより定まる。複体に対する Auslander 型の完全列は、加群のときのように４項では終わらず、次のように無限に続いていく。

定理 3.6 ([**Y2, O**])**.** 複体 $X \in \mathcal{K}(\mathsf{proj}\, R)$ と整数 i、そして自然な準同型 $\gamma_X^i : H^i(X) \to H^{-i}(X^*)^*$ に対し、次の長完全列が存在する。

$$\begin{aligned}
0 \longrightarrow \operatorname{Ext}^1(\operatorname{Tr} C^i(X), R) &\longrightarrow H^i(X) \xrightarrow{\gamma_X^i} H^{-i}(X^*)^* \longrightarrow \operatorname{Ext}^2(\operatorname{Tr} C^i(X), R) \\
&\longrightarrow \operatorname{Ext}^1(\operatorname{Tr} C^{i+1}(X), R) \longrightarrow \operatorname{Ext}^1(H^{-i}(X^*), R) \longrightarrow \cdots
\end{aligned}$$

複体 $X \in \mathcal{K}(\mathsf{proj}\, R)$ の捩れなし性（resp. 反射性）を、自然な準同型 $\gamma_X^i : H^i(X) \to H^{-i}(X^*)^*$ が任意の i で単射（resp. 全単射）であることに定義することは自然に思える。さらにこれらの概念は、上の完全列により以下のように自然に高次化される。

定義 3.7. [**O**]] X を $\mathcal{K}(\mathsf{proj}\, R)$ の対象とし、n を非負整数とする。

- 複体 X が **n-捩れ自由**であるとは、$\operatorname{Ext}^i_{R^{\mathrm{op}}}(\operatorname{Tr} C^j(X), R) = 0$ が任意の $1 \le i \le n$ と任意の整数 j に対し成り立つことをさす。
- 複体 X が **Gorenstein 射影的**であるとは、$\operatorname{Ext}^i_R(C^j(X), R) = 0$ と $\operatorname{Ext}^i_{R^{\mathrm{op}}}(\operatorname{Tr} C^j(X), R) = 0$ が任意の $i > 0$ と任意の整数 j に対し成り立つことをさす。

例 3.8. 有限生成右 R 加群 M に対し、例 3.5 の複体 $X = (\cdots \to 0 \to P_1 \to P_0 \to 0 \to \cdots) \in \mathcal{K}(\mathsf{proj}\, R)$ を考える。このとき、X が n-捩れ自由（resp. Gorenstein 射影的）であることと、M が n-捩れ自由（resp. Gorenstein 射影的）であることは同値である。したがって、複体の n-捩れ自由性や Gorenstein 射影性は、加群に対するそれらの自然な類似である。

幽霊特三角を用いて、n-振れ自由性や Gorenstein 射影性が次のように特徴づけられる。加群の場合の特徴づけと比較されたい。

定理 3.9 ([**O**]). 複体 $X \in \mathcal{K}(\mathsf{proj}\, R)$ と非負整数 n に対し、次が成立する。

(1) 複体 X が n-振れ自由であるための必要十分条件は、n 個の $\mathcal{K}(\mathsf{proj}\, R)$ 内の幽霊特三角 $X_i \to P_{i-1} \to X_{i-1} \to X_i[1]$（$1 \le i \le n$）が存在して、任意の $1 \le i \le n$ で $P_{i-1} \in \operatorname{Add} R$ かつ R 双対 $X_{i-1}^* \to P_{i-1}^* \to X_i^* \to X_{i-1}^*[1]$ も幽霊特三角で、さらに $\mathcal{K}(\mathsf{proj}\, R)$ の対象として $X \cong X_n$ である。
(2) 複体 X が Gorenstein 射影的であるための必要十分条件は、任意の整数 i に対し $\mathcal{K}(\mathsf{proj}\, R)$ 内の幽霊特三角 $X_i \to P_{i-1} \to X_{i-1} \to X_i[1]$ が存在して、任意の i で $P_{i-1} \in \operatorname{Add} R$ かつ R 双対 $X_{i-1}^* \to P_{i-1}^* \to X_i^* \to X_{i-1}^*[1]$ も幽霊特三角で、さらに $\mathcal{K}(\mathsf{proj}\, R)$ の対象として $X \cong X_0$ である。

我々の文脈における複体の射影次元や Gorenstein 次元も幽霊特三角による右近似の長さの下限により与えられる。

定義 3.10 ([**O**]). 複体 $X \in \mathcal{K}(\mathsf{proj}\, R)$ の**射影次元**（resp. **Gorenstein 次元**）を、n 個の幽霊特三角 $X_i \to A_{i-1} \to X_{i-1} \to X_i[1]$（$1 \le i \le n$）が存在し、各 $A_0, \cdots, A_{n-1}, X_n$ が $\operatorname{Add} R$ の対象（resp. Gorenstein 射影的）で、$\mathcal{K}(\mathsf{proj}\, R)$ の対象として $X \cong X_0$ となるような、非負整数 n たちの下限で定義する。

Gorenstein 次元有限な複体の構造について、Auslander–Buchweitz 近似定理の複体版が以下のように述べられる。

定理 3.11 ([**O**]). 複体 $X \in \mathcal{K}(\mathsf{proj}\, R)$ に対し、以下は同値となる。

- 複体 X の Gorenstein 次元は有限。
- $\mathcal{K}(\mathsf{proj}\, R)$ 内の幽霊特三角 $Y \to G \to X \to Y[1]$ が存在して、Y の射影次元は有限で、G は Gorenstein 射影的である。

加群に対する Auslander–Buchweitz 近似定理は、上の定理からしたがう。実際、有限生成加群 M が有限な Gorenstein 次元を持つと仮定して、例 3.5 の複体 $X = (\cdots \to 0 \to P_1 \to P_0 \to 0 \to \cdots)$ を考える。このとき例 3.8 により X は $\mathcal{K}(\mathsf{proj}\, R)$ の対象として有限な Gorenstein 次元を持ち、上の定理により $\mathcal{K}(\mathsf{proj}\, R)$ 内の幽霊三角 $Y \to G \to X \to Y[1]$ であって Y の射影次元が有限かつ G が Gorenstein 射影的であるものが存在する。0 次コホモロジーをとって短完全列 $0 \to H^0(Y) \to H^0(G) \to H^0(X) \to 0$ を得る。加群 $H^0(Y)$ は射影次元有限で $H^0(G)$ は Gorenstein 射影的なので、この短完全列は加群 $M \cong H^0(X)$ の Auslander–Buchweitz 近似を与えている。

参考文献

[Aus] M. Auslander, Coherent functors, *Proc. Conf. Categorical Algebra (La Jolla, Calif.,* *1965)*, 189–231, *Springer, New York*, 1966.

[ABr] M. Auslander; M. Bridger, Stable module theory, Memoirs of the American Mathematical Society **94**, *American Mathematical Society, Providence, R.I.*, 1969.

[ABu] M. Auslander; R.-O. Buchweitz, The homological theory of maximal Cohen–Macaulay approximations, Colloque en l'honneur de Pierre Samuel (Orsay, 1987), *Mém. Soc. Math. France (N.S.)* **38** (1989), 5–37.

[ARS] M. Auslander, I. Reiten, S.O. Smalø, Representation theory of Artin algebras, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, **36**, *Cambridge University Press, Cambridge*, 1995.

[ASS] I. Assem; D. Simson; A. Skowroński, Elements of the representation theory of associative algebras. Vol. 1. Techniques of representation theory, London Mathematical Society Student Texts, **65**, *Cambridge University Press, Cambridge*, 2006.

[LW] G. J. Leuschke; R. Wiegand, Cohen–Macaulay Representations, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 181, *American Mathematical Society, Providence, RI*, 2012.

[O] Y. Otake, On Auslander–Bridger–Yoshino theory for complexes of finitely generated projective modules, preprint (2023), `arXiv:2311.12173`.

[Y1] Y. Yoshino, Cohen–Macaulay modules over Cohen–Macaulay rings, revised edition, London Math. Soc. Lecture Note Ser. **146**, *Cambridge University Press, Cambridge*, 1990.

[Y2] Y. Yoshino, Homotopy categories of unbounded complexes of projective modules, *J. Lond. Math. Soc. (2)* **105** (2022), no. 1, 100–153.