測度距離空間のオブザーバブル直径と正の測度を持つ点の存在

東北大学　大学院理学研究科　数学専攻
大島 駿 (Shun OSHIMA) *

概要

測度距離空間とは Borel 測度を持つ距離空間であり, リーマン多様体の列の極限を考える際に定義された概念である. 現在, 測度距離空間の定義はいくつか存在するが, その中の一つに Gromov によって考えられた確率測度を持つ測度距離空間がある. その測度距離空間の理論の中では部分直径やオブザーバブル直径という不変量がよく用いられるが, 例えばオブザーバブル直径が 0 に収束することは空間列が一点空間に集中と呼ばれる収束をすることを意味しており, この収束は高次元球面の測度集中現象などの研究に由来している. 今回はこれらの不変量が 0 になるための必要十分条件について新たに得られた結果を発表する.

1　導入

測度距離空間 (X, d_X, μ_X) とは距離空間 (X, d_X) と X 上の Borel 測度 μ_X からなる三つ組であり, リーマン計量から定まる距離 (リーマン距離) と体積測度を持つリーマン多様体の一般化として定義された. この概念はリーマン多様体の列の収束を考える際にその極限がリーマン多様体になるとは限らないということから定式化された. この測度距離空間はリーマン多様体の持つ性質を良く引き継いでおり, 例えば, 測度距離空間上の Sobolev 空間の理論や, リッチ曲率が下に有界であるという条件を測度距離空間上に定式化した曲率次元条件に関する理論など, リーマン幾何学の一つの研究対象として近年よく研究がなされている ([1], [4], [7]).

現在, 測度距離空間の定義はいくつか存在するが, その中の一つに Gromov [2] によって考えられた μ_X が確率測度であるような測度距離空間 (mm-空間と呼ばれる) がある. mm-空間の理論では, $\square$ 収束や集中という空間列の収束を主に扱っており, 特に集中は「測度の集中現象」に由来する収束で, 現在知られている測度距離空間の収束の中で最も弱い収束であることが知られている. ここで, 測度の集中現象とは高次元空間において見られる測度が大きく偏る現象のことであり, Lévy [5] や Milman [6] によって発見, 定式化された. この現象は関数を用いた表現で「任意の 1-Lipschitz 関数が測度的に定数関数, つまり 1 点空間上の 1-Lipschitz 関数に近い」という事も出来る. これを高次元空間が 1 点空間に近いと解釈し直すことで考えられた収束が集中である. Gromov の理論の中で, 測度の集中現象が見られる空間は Lévy 族と呼ばれ, オブザーバブル直径を用いて定義される.

* E-mail : shun.oshima.s3@dc.tohoku.ac.jp

2 測度距離空間のオブザーバブル直径

この節では, 測度距離空間 (特に mm-空間) やオブザーバブル直径に関連する基本的な定義や性質を述べる. 以降, $\mathcal{P}(X)$ を位相空間 X 上の Borel 確率測度全体とする.

定義 2.1 (Prokhorov 距離)**.** (X, d_X) を距離空間とする. このとき, $d_P : \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) \to [0, \infty)$ を

$$d_P(\mu, \nu) := \inf\{\varepsilon \geq 0 \mid \text{任意の Borel 集合 } A \subset X \text{ に対し}, \mu(N_\varepsilon(A)) \geq \nu(A) - \varepsilon \text{ が成立する }\}$$

と定める. (ただし, $N_\varepsilon(A) := \{x \in X \mid d_X(x, a) < \varepsilon$ となるような $a \in A$ が存在する $\}$ とする.) この d_P を $\mathcal{P}(X)$ 上の **Prokhorov 距離**という.

定義 2.2 (mm-空間)**.** (X, d_X, μ_X) が **mm-空間**であるとは, (X, d_X) が完備かつ可分な距離空間で, $\mu_X \in \mathcal{P}(X)$ を満たすことをいう.

以降は, mm-空間 (X, d_X, μ_X) を単に X と表記する.

定義 2.3. mm-空間の点 $x \in X$ が $\mu_X(\{x\}) > 0$ を満たすとき, x を**アトム**という.

定義 2.4 (Lipschitz 順序)**.** mm-空間 X が mm-空間 Y を**支配する** ($Y \prec X$ または $X \succ Y$) とは, ある 1-Lipschitz 写像 $f : \operatorname{supp} \mu_X \to \operatorname{supp} \mu_Y$ が $f_* \mu_X = \mu_Y$ を満たすことをいい, この二項関係 $\prec$ を **Lipschitz 順序**という.

定義 2.5 (mm-同型)**.** 2 つの mm-空間 X, Y が **mm-同型**であるとは, ある等長写像 $f : \operatorname{supp} \mu_X \to \operatorname{supp} \mu_Y$ が存在して, $f_* \mu_X = \mu_Y$ を満たすことをいう. また, mm-空間の同型類全体を $\mathcal{X}$ と書く.

定義 2.6. (部分直径, オブザーバブル直径)
X を mm-空間とし, $\alpha \in (0, 1)$ とする. このとき,

$$\operatorname{diam}(X; \alpha) = \operatorname{diam}(\mu_X; \alpha) := \inf\{\operatorname{diam} A \mid A \text{ は } \mu_X(A) \geq \alpha \text{ を満たす Borel 集合 }\}$$

と定め, X の α**-部分直径**という. そして,

$$\operatorname{ObsDiam}(X; \alpha) := \sup\{\operatorname{diam}(f_* \mu_X; \alpha) \mid f \in \mathcal{L}ip_1(X)\}$$

$$\operatorname{ObsDiam}(X) := \inf_{\kappa > 0} \max\{\kappa, \operatorname{ObsDiam}(X; 1 - \kappa)\}$$

と定め, これを X の α**-オブザーバブル直径**, **オブザーバブル直径**という. ただし, $\mathcal{L}ip_1(X)$ は X 上の 1-Lipschitz 関数全体の集合である.

命題 2.7 ([8], 命題 2.18)**.** mm-空間 X, Y と $\alpha \in (0, 1)$ に対し, 以下が成立する.

(1) $X \prec Y$ ならば $\operatorname{diam}(X; \alpha) \leq \operatorname{diam}(Y; \alpha)$
(2) $\operatorname{ObsDiam}(X; \alpha) \leq \operatorname{diam}(X; \alpha)$
(3) $X \prec Y$ ならば $\operatorname{ObsDiam}(X; \alpha) \leq \operatorname{ObsDiam}(Y; \alpha)$

定義 2.8. (Lévy 族)
mm-空間の列 $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が **Lévy 族**であるとは, 任意の $\alpha \in (0,1)$ に対し,

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{ObsDiam}(X_n;\alpha) = 0$$

が成立すること, あるいは同値なことだが

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{ObsDiam}(X_n) = 0$$

が成立することをいう.

例 2.9. $S^n(r_n)$ を正規化された体積測度を持つ半径 r_n の n 次元球面とするとき,

$$\{S^n(r_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ が Lévy 族である } \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{r_n}{\sqrt{n}} = 0$$

が成立する. 特に, n 次元単位球面の列は Lévy 族である.

ここで $I := [0,1)$ とし, I は Lebesgue 測度 $\mathcal{L}^1$ によって確率測度空間となる.

定義 2.10 (パラメータ)**.** X を mm-空間とする. Borel 写像 $\varphi : I \to X$ が $\varphi_*\mathcal{L}^1 = \mu_X$ を満たすとき, φ は X **のパラメータ**であるという.

命題 2.11 ([8], 補題 4.2)**.** 任意の mm-空間 X に対し, X のパラメータが存在する.

定義 2.12 (ボックス距離)**.** mm-空間 X, Y に対し,

(1) $\mathcal{L}^1(\tilde{I}) \geq 1 - \varepsilon$
(2) 任意の $s, t \in \tilde{I}$ に対し, $|d_X(\varphi(s), \varphi(t)) - d_Y(\psi(s), \psi(t))| \leq \varepsilon$

を満たす Borel 集合 $\tilde{I} \subset I$, X のパラメータ φ, Y のパラメータ ψ が存在するような $\varepsilon > 0$ の下限を $\square(X, Y)$ と書き, これを X **と** Y **のボックス距離**という. そして $\square$ を単にボックス距離という.

定義 2.13 (Ky Fan 距離)**.** I 上の Borel 可測関数 $f, g : I \to \mathbb{R}$ に対し, d_{KF} を

$$d_{\mathrm{KF}}(f,g) := \inf\left\{\varepsilon > 0 \mid \mathcal{L}^1(\{x \in I \mid |f(x) - g(x)| > \varepsilon\}) \leq \varepsilon\right\}$$

と定めるとき, この d_{KF} を **Ky Fan 距離**という.

mm-空間 X と X のパラメータ φ に対して, $\varphi^*\mathcal{L}ip_1(X) := \{f \circ \varphi \mid f \in \mathcal{L}ip_1(X)\}$ と定める.

定義 2.14 (オブザーバブル距離)**.** mm-空間 X, Y に対し, X **と** Y **のオブザーバブル距離** $d_{\mathrm{conc}}(X, Y)$ を

$$d_{\mathrm{conc}}(X,Y) := \inf_{\varphi,\psi} d_H^{\mathrm{KF}}\left(\varphi^*\mathcal{L}ip_1(X), \psi^*\mathcal{L}ip_1(Y)\right)$$

と定める. ただし, d_H^{KF} は d_{KF} に関する Hausdorff 距離であり, φ, ψ はそれぞれ X, Y のパラメータ全体を動くものとする. このとき d_{conc} を単にオブザーバブル距離という.

命題 2.15 ([8], 定理 4.10, 定理 4.14, 定理 5.16)**.** $\square$, d_{conc} はどちらも $\mathcal{X}$ 上の距離であり, 特に, $(\mathcal{X}, \square)$ は完備距離空間である.

定義 2.16 ($\square$ 収束, 集中)**.** mm-空間の列 $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ がある mm-空間 Y に $\mathcal{X}$ 上の距離 $\square$ (resp. d_{conc}) について収束するとき, X_n が Y に $\square$ **収束する** (resp. **集中する**) といい, $X_n \xrightarrow{\square} Y$ (resp. $X_n \xrightarrow{\mathrm{conc}} Y$) と書く.

命題 2.17 ([8], 命題 5.5)**.** 任意の mm-空間 X, Y に対し $d_{\mathrm{conc}}(X,Y) \le \square(X,Y)$ が成立する. 特に mm-空間の列 $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が mm-空間 Y に $\square$ 収束しているとき, $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は Y に集中している.

定義 2.18 (ε-mm-同型写像)**.** X, Y を mm-空間とする. $\varepsilon \ge 0$ に対し, Borel 写像 $f : X \to Y$ が ε-mm-同型写像であるとは, ある Borel 集合 $X_0 \subset X$ が存在して以下を満たすことをいう.

(1) $\mu_X(X_0) \ge 1 - \varepsilon$
(2) 任意の $x, y \in X_0$ に対し, $|d_X(x,y) - d_Y(f(x), f(y))| \le \varepsilon$
(3) $d_P(f_*\mu_X, \mu_Y) \le \varepsilon$

命題 2.19 ([8], 補題 4.22)**.** mm-空間 X, Y と $\varepsilon \ge 0$ に対し, 以下が成立する.

(1) ε-mm-同型写像 $f : X \to Y$ が存在するなら, $\square(X,Y) \le 3\varepsilon$
(2) $\square(X,Y) < \varepsilon$ なら, 3ε-mm-同型写像 $f : X \to Y$ が存在する.

命題 2.20. ([8], 命題 5.7, 系 5.8)
X を mm-空間とし, $*$ を 1 点からなる mm-空間, つまり $* := (\{*\}, d_*, \delta_*)$ とするとき

$$d_{\mathrm{conc}}(X, *) \le \mathrm{ObsDiam}(X) \le 2\, d_{\mathrm{conc}}(X, *)$$

が成立する. 特に, mm-空間の列 $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ について, $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が Lévy 族であることと $X_n \xrightarrow{\mathrm{conc}} *$ が同値である.

命題 2.21 ([8], 4.4 節)**.** X を mm-空間とする. このとき, 任意の $N \in \mathbb{N}$ に対し, ある $\mu_N \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ が存在して,

$$X_1 \prec X_2 \prec \cdots \prec X_N \prec \cdots \prec X \quad \text{かつ} \quad X_N \xrightarrow{\square} X \quad (N \to \infty)$$

を満たす. ただし, $X_N := (\mathbb{R}^N, \|\cdot\|_\infty, \mu_N)$ である.

3 多変数オブザーバブル直径

次に, 今回の研究で新たに定義した "α を多変数化したオブザーバブル直径" について定義や性質を述べる. また, この節では $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ とし, $n = \infty$ の時は, $\{1, \ldots, n\} = \mathbb{N}$ であると約束する.

定義 3.1. mm-空間 X と, $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in (0,1)^n$ に対し, X の **$\boldsymbol{\alpha}$-部分直径** $\mathrm{diam}(X; \boldsymbol{\alpha}), \underline{\mathrm{diam}}(X; \boldsymbol{\alpha})$

と **$\boldsymbol{\alpha}$-オブザーバブル直径** $\underline{\mathrm{ObsDiam}}(X;\boldsymbol{\alpha})$ を以下のように定義する.

$$
\begin{aligned}
D_X(\boldsymbol{\alpha}) &:= \left\{ \{A_i\}_{i=1}^n \;\middle|\; \begin{array}{l} \{A_i\}_{i=1}^n \text{ は } X \text{ の disjoint な Borel 集合族} \\ \mu_X(A_i) \geq \alpha_i \qquad (\forall i \in \{1,\ldots,n\}) \end{array} \right\} \\
\mathrm{diam}(X;\boldsymbol{\alpha}) &:= \begin{cases} \inf\left\{ \sup_{1\leq i\leq n} \mathrm{diam}\, A_i \;\middle|\; \{A_i\}_{i=1}^n \in D_X(\boldsymbol{\alpha}) \right\} & (D_X(\boldsymbol{\alpha}) \neq \emptyset) \\ \infty & (D_X(\boldsymbol{\alpha}) = \emptyset) \end{cases} \\
\underline{\mathrm{diam}}(X;\boldsymbol{\alpha}) &:= \inf_{Y \succ X} \mathrm{diam}(Y;\boldsymbol{\alpha}) \\
\underline{\mathrm{ObsDiam}}(X;\boldsymbol{\alpha}) &:= \sup_{f \in \mathcal{L}ip_1(X)} \underline{\mathrm{diam}}((\mathbb{R}, f_*\mu_X);\boldsymbol{\alpha})
\end{aligned}
$$

命題 3.2. mm-空間 X, Y と $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in (0,\infty)^n$ に対し, 以下が成立する.

(1) $X \prec Y$ ならば $\underline{\mathrm{diam}}(X;\boldsymbol{\alpha}) \leq \underline{\mathrm{diam}}(Y;\boldsymbol{\alpha})$
(2) $\underline{\mathrm{ObsDiam}}(X;\boldsymbol{\alpha}) \leq \underline{\mathrm{diam}}(X;\boldsymbol{\alpha})$
(3) $X \prec Y$ ならば $\underline{\mathrm{ObsDiam}}(X;\boldsymbol{\alpha}) \leq \underline{\mathrm{ObsDiam}}(Y;\boldsymbol{\alpha})$

注意 3.3. $\underline{\mathrm{diam}}(X;\boldsymbol{\alpha})$ や $\underline{\mathrm{ObsDiam}}(X;\boldsymbol{\alpha})$ は多変数化に際して性質の良い不変量となる様に定義したものである. 実際, 上で定義した $\mathrm{diam}(X;\boldsymbol{\alpha})$ は $n=1$ の場合, $\mathrm{diam}(X;\boldsymbol{\alpha}) = \underline{\mathrm{diam}}(X;\boldsymbol{\alpha})$ となるが, $n \geq 2$ の時に命題 3.2 のような性質が成立しない場合がある. さらに, $n \geq 2$ のときの $\mathrm{ObsDiam}(X;\boldsymbol{\alpha})$ を $n=1$ の場合と同じように

$$\mathrm{ObsDiam}(X;\boldsymbol{\alpha}) := \sup_{f \in \mathcal{L}ip_1(X)} \mathrm{diam}((\mathbb{R}, f_*\mu_X);\boldsymbol{\alpha})$$

と定めると, f を定数関数とすることで $\mathrm{ObsDiam}(X;\boldsymbol{\alpha}) = \infty$ が常に成立してしまい, 考える意味のある量とはならない.

命題 3.4. mm-空間 X と $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in (0,1)^n$ に対し, 以下は同値.

(1) $\mathrm{diam}(X;\boldsymbol{\alpha}) = 0$
(2) 互いに異なる点 $\{x_i\}_{i=1}^n \subset X$ が存在して, 任意の $i \in \{1,\ldots,n\}$ に対し, $\mu_X(\{x_i\}) \geq \alpha_i$ となる.

4 主定理

講演者は α-部分直径や α-オブザーバブル直径が 0 であることの必要十分条件が mm-空間にアトムが存在することと同値であるという次の定理を新たに得た.

定理 4.1. mm-空間 X と $\alpha \in (0,1)$ に対し, 以下は同値.

(1) ある点 $x \in X$ が存在して, $\mu_X(\{x\}) \geq \alpha$ となる.
(2) $\mathrm{diam}(X;\alpha) = 0$
(3) $\mathrm{ObsDiam}(X;\alpha) = 0$

この定理の (1) と (2) の同値性は既に知られていた [3] が, (3) との同値性 (特に (3) $\Rightarrow$ (2)) に関しては新規の結果である.

さらに, この定理を次のように多変数の $\boldsymbol{\alpha}$-部分直径や $\boldsymbol{\alpha}$-オブザーバブル直径の場合にも拡張した.

定理 4.2. mm-空間 X と $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in (0,1)^n$ に対し, 以下は同値.

(1) X を支配する mm-空間 Y と, 互いに異なる点 $\{y_i\}_{i=1}^n \subset Y$ が存在して, 任意の $i \in \{1, \ldots, n\}$ に対し, $\mu_Y(\{y_i\}) \geq \alpha_i$ となる.

(2) ある $x_1, \ldots, x_n \in X$ が存在して, 任意の $I \subset \{1, \ldots, n\}$ に対し, $\mu_X(\{x_i \mid i \in I\}) \geq \sum_{i \in I} \alpha_i$ となる.

(3) $\underline{\mathrm{diam}}(X; \boldsymbol{\alpha}) = 0$

(4) $\underline{\mathrm{ObsDiam}}(X; \boldsymbol{\alpha}) = 0$

5 主定理の証明の概略

定理 4.1 は定理 4.2 から直ちに従うので, 定理 4.2 についての証明の概略を述べる.

まず, (1) $\Rightarrow$ (3) や, (3) $\Rightarrow$ (4) は命題 3.2 や命題 3.4 から簡単に示せ, (3) $\Rightarrow$ (2) は命題 3.4 の証明と近い議論で同様に証明できる.

(2) $\Rightarrow$ (1) については, (2) を仮定すると,

$$\nu_X := \mu_X - \sum_{i=1}^n \alpha_i \delta_{x_i}$$

が有限測度となる. そして, $i = 0, 1, \ldots, n$ に対し,

$$X_i := \begin{cases} X & (i = 0) \\ \{x_i\} & (i \geq 1) \end{cases}$$

$$Y := \bigcup_{i=0}^n (X_i \times \{i\}) \subset X \times \mathbb{Z}$$

$$\mu_Y := \nu_X \otimes \delta_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i \delta_{(x_i, i)}$$

と定めると, (Y, d_Y, μ_Y) は mm-空間であり, (ただし, d_Y は $X \times \mathbb{Z}$ 上の直積距離から誘導される距離である.) (1) の条件を満たす.

(4) $\Rightarrow$ (2) は, まず $X = (\mathbb{R}^N, \|\cdot\|_\infty, \mu)$ の場合において証明する. そのためには, 以下の補題が重要である.

補題 5.1. $N \in \mathbb{N}$ とし, μ を $\mathbb{R}^N$ 上の Borel 確率測度とする. このとき, ある 1-Lipschitz 関数 $f : (\mathbb{R}^N, \|\cdot\|_\infty) \to \mathbb{R}$ が存在して以下を満たす.

- $f_*\mu(\{b\}) > 0$ を満たす任意の $b \in \mathbb{R}$ に対し, ある一意的な $x \in f^{-1}(\{b\})$ が存在して, $\mu(\{x\}) = f_*\mu(\{b\})$ となる.

この補題 5.1 から, $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ に対し, ある $f : (\mathbb{R}^N, \|\cdot\|_\infty) \to \mathbb{R}$ が取れる. (4) を仮定すると, $\underline{\mathrm{diam}}((\mathbb{R}, f_*\mu); \boldsymbol{\alpha}) = 0$ がわかるから, (3) $\Rightarrow$ (2) と合わせて, ある $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ が存在して, 任意の $I \subset \{1, \ldots, n\}$ に対し, $f_*\mu(\{b_i \mid i \in I\}) \geq \sum_{i \in I} \alpha_i$ となる. そして, f の性質から, 各 $b_i \in \mathbb{R}$ に対し, $x_i \in f^{-1}(\{b_i\})$ が取れて, この $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^N$ が (2) の条件を満たす. 次に, 一般の X の場合に証明する. 命題 2.21 より, 任意の $N \in \mathbb{N}$ に対し, ある $\mu_N \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ が存在して,

$$X_1 \prec X_2 \prec \cdots \prec X_N \prec \cdots \prec X \quad \text{かつ} \quad X_N \xrightarrow{\square} X \quad (N \to \infty)$$

を満たす. ここで, $X_N = (\mathbb{R}^N, \|\cdot\|_\infty, \mu_N)$ であるから, $X = \mathbb{R}^N$ の場合の (4) $\Rightarrow$ (2) と

$$\underline{\mathrm{ObsDiam}}(X_N; \boldsymbol{\alpha}) \leq \underline{\mathrm{ObsDiam}}(X; \boldsymbol{\alpha}) = 0$$

より, ある $x_{1,N}, \ldots, x_{n,N} \in X_N$ が取れ, さらに, $X_N \xrightarrow{\square} X$ と命題 2.19 より, ある $\varepsilon_N \searrow 0$ と ε_N-mm-同型写像 $f_N : X_N \to X$ が取れる. このとき, 各 $i = 1, \ldots, n$ に対し, $\{f_N(x_{i,N})\}_{N \in \mathbb{N}} \subset X$ の (収束部分列の) $N \to \infty$ における極限 $x_i \in X$ を考えると (2) を満たすことが示せる.

参考文献

[1] L. Ambrosio, N. Gigli, and G. Savaré, *Calculus and heat flow in metric measure spaces and applications to spaces with Ricci bounds from below*, Inventiones mathematicae, 195(2), 289-391, 2014.

[2] M. Gromov, *Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces*, Reprint of the 2001 English edition, Modern Birkhäuser Classics, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2007.

[3] D. Kazukawa, H. Nakajima, and T. Shioya, *Principal bundle structure of the space of metric measure spaces*, preprint arXiv:2304.06880, 2023.

[4] D. Kazukawa, R. Ozawa, and N. Suzuki, *Stabilities of rough curvature dimension condition*, Journal of the Mathematical Society of Japan, 72(2), 541-567, 2020.

[5] P. Lévy, *Problèmes concrets d'analyse fonctionnelle. Avec un complément sur les fonctionnelles analytiques par F. Pellegrino*, Gauthier-Villars, Paris, 1951 (French). 2d ed.

[6] V. D. Milman, *The heritage of P. Lévy in geometrical functional analysis*, Astérisque 157–158, 1988, 273–301. Colloque Paul Lévy sur les Processus Stochastiques (Palaiseau, 1987).

[7] S. Oshima, *Stability of curvature-dimension condition for negative dimensions under concentration topology*, The Journal of Geometric Analysis, 33(12), 377, 2023.

[8] T. Shioya, *Metric measure geometry. Gromov's theory of convergence and concentration of metrics and measures*, IRMA Lectures in Mathematics and Theoretical Physics, vol.25, EMS Publishing House, Zürich, 2016.