On finiteness of the geodesics joining a pair of points in curve complexes

奈良女子大学　大学院人間文化総合科学研究科　数物科学専攻
大家佳奈子 (Kanako OIE) *

概 要

S を種数 g, 境界成分 c 個, p 個の puncture をもつ向き付け可能曲面とする. 本稿では以下の結果について紹介する.
1. "$g = 1, c + p \geq 3$" または "$g \geq 2, c + p \geq 1$" のとき S の curve complex 上の 2 点 a_0, a_2 で次のようなものが存在する:$d_S(a_0, a_2) = 2$, a_0 と a_2 を結ぶ curve complex 内の geodesic の個数は丁度 2 個である.
2. "$g = 2, c + p \geq 1$" または "$g \geq 3$" のとき S の curve complex 上の 2 点 a_0, a_2 で次のようなものが存在する:$d_S(a_0, a_2) = 2$, a_0 と a_2 を結ぶ curve complex 内の geodesic の個数は丁度 3 個である.

1　導入

Curve complex は Riemann 面 の Teichmüller 空間 を研究していた Harvey によって最初に導入され [3], 今も多くの研究者によって研究されている. 特に Masur-Minsky は, curve complex 内の geodesic がもつ特定の幾何的性質を用いて定義された, curve complex の δ-hyperbolicity について示した [7]. この結果は, ending lamination conjecture の解決 [8, 2] など, 重要な帰結をもたらした.

2012 年に Birman-Menasco は, curve complex 内における行き止まり（dead ends）を持つ geodesic の存在を示した [1]. 彼らの論文では, そのような例は「明らかに見逃されていたもの」であると述べている. そのため, curve complex の geodesic がもつ定性的な性質の調査は意味深いものと思われる.

これに関して, Ido-Jang-Kobayashi は curve complex 内の 2 点でそれらを結ぶ geodesic が 1 つしかないものが存在することを示している [5, 6]. 一方容易にわかるように curve complex 内の 2 点でそれらを結ぶ geodesic が無限個存在するようなものがある. したがって, 以下の問題を考えることは妥当である.

Question. Curve complex 内の 2 点でそれらを結ぶ全ての geodesic の個数は 1 よりも大きな有限の数となるようなものは存在するか?

本稿では, 上記の問いに対する肯定的な回答を記述する. 実際, 主結果は以下の通りである.
S は種数 g, 境界成分 c 個, p 個の puncture をもつ向き付け可能曲面とする (図 1).

Theorem 1. "$g = 1, c + p \geq 3$" または "$g \geq 2, c + p \geq 1$" のとき S の curve complex 上の 2 点 a_0, a_2 で次のようなものが存在する:$d_S(a_0, a_2) = 2$, a_0 と a_2 を結ぶ curve complex 内の geodesic の個数は丁度 2 個である.

*E-mail:wak_oie@cc.nara-wu.ac.jp

Theorem 2. “$g = 2, c + p \geq 1$” または “$g \geq 3$” のとき S の curve complex 上の 2 点 a_0, a_2 で次のようなものが存在する:$d_S(a_0, a_2) = 2$, a_0 と a_2 を結ぶ curve complex 内の geodesic の個数は丁度 3 個である.

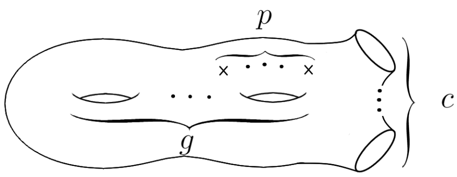

図 1: Surface S

以下ではこの結果に関する基本的な用語の定義, 証明に用いた概念および証明の概略を紹介する.

2 準備

2.1 Curve complex

この節では, S の curve complex について紹介する.

Definition 1. S が *sporadic* であるとは, “$g = 0$, $c + p \leq 4$ ” 又は “$g = 1$, $c + p \leq 1$ ” が成り立つときにいう. また S が sporadic でないとき, S は *non-sporadic* であるという.

Definition 2. S 内の simple closed curve α について “α は高々1 点の puncture を含む S 内の disk を bound する” 又は
“α は ∂S のある component に parallel である” とき α は *inessential* であるという.
また α が inessential でないとき α は *essential* であると言う.

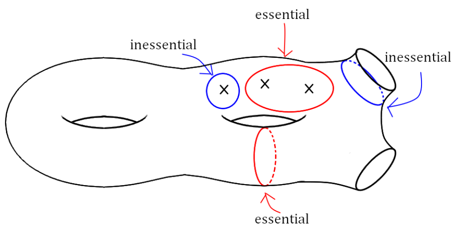

図 2: Essential curve の例

Definition 3. S が essential simple closed curve を含まないとき, S は *simple* であるという. また S が simple でないとき, S は *non-simple* であるという.

図 3 ではすべての sporadic surfaces が描かれている. 定義から S が simple であるならば sporadic であることは容易にわかる. また, 図 3 から S が sporadic かつ non-simple である場合, “$g = 1$, $c + p \leq 1$” または “$g = 0$, $c + p = 4$” となることもわかる.

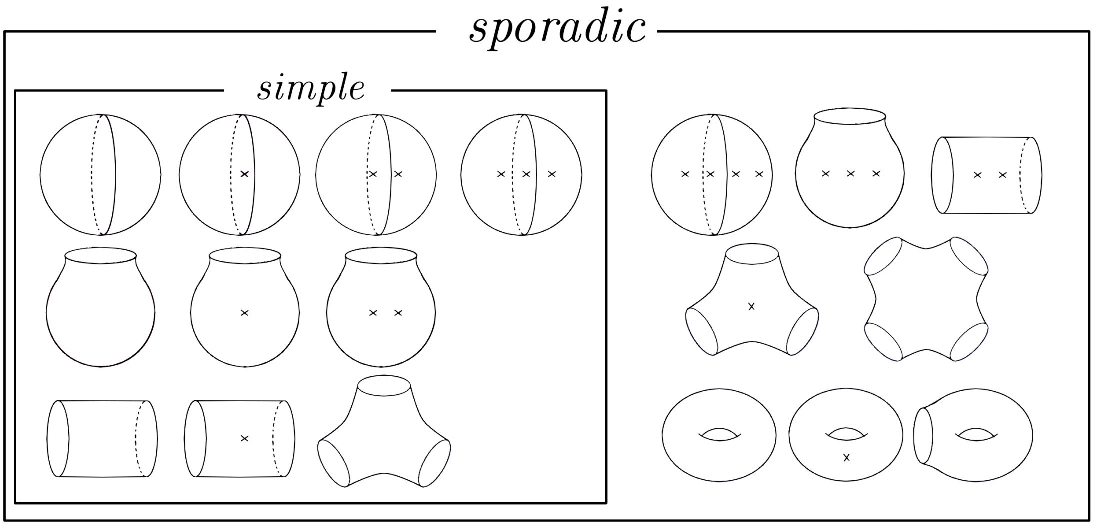

図 3: Sporadic surface

Definition 4. S は non-sporadic とする．以下で定義される simplicial complex を S の *curve complex* といい, $\mathcal{C}(S)$ で表す.

$\mathcal{C}^{(0)}(S)$：S 上の essential simple closed curves の isotopy 類の集合,

$\mathcal{C}^{(0)}(S)$ の $n+1$ 個の 0-simplex が S 上の disjoint curves で実現されるとき，それらは n-simplex を張る。

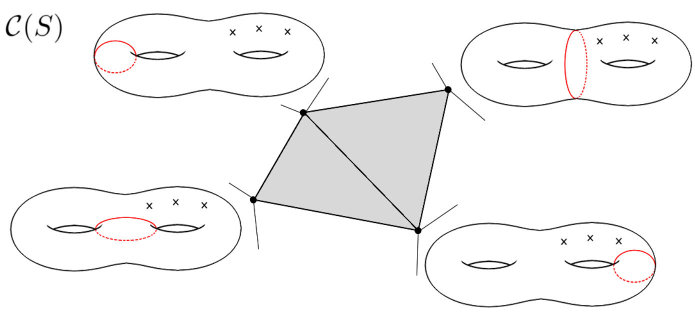

図 4: $g=2$, $c=0$, $p=3$ のときの S の curve complex $\mathcal{C}(S)$.

Remark. $\mathcal{C}(S)$ は 局所的に無限な simplicial complex である.

尚, S が sporadic かつ non-simple のときも curve complex は定義できるが本稿では省略する.

Definition 5. $\mathcal{C}^{(0)}(S)$ の 2 点 a, b に対して a と b を結ぶ simplicial path を $[a_0 = a, a_1, \ldots, a_n = b]$ と表すことにする．$\mathcal{C}^{(0)}(S)$ に単体的距離を導入することにより $\mathcal{C}^{(0)}(S)$ は距離空間になる．以下この距離を d_S と書くことにする.

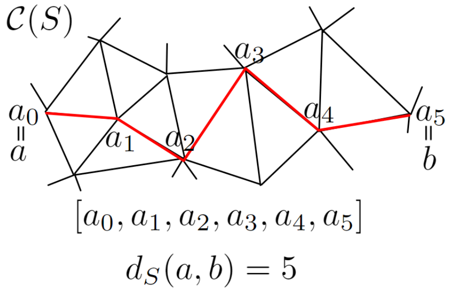

図 5: a と b を結ぶ path

Definition 6. $\mathcal{C}(S)$ 内の path $[a_0, a_1, \ldots, a_n]$ が $d_S(a_0, a_n)$ を実現している時, $[a_0, a_1, \ldots, a_n]$ は $\mathcal{C}(S)$ 内の *geodesic* であるという.

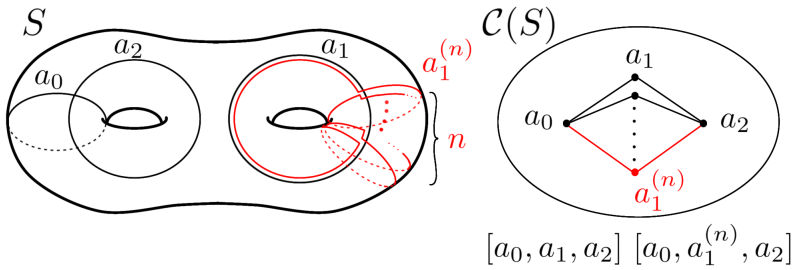

図 6: a_0 と a_2 を結ぶ geodesic

2.2 Subsurface projection

この節では, 主結果の証明に用いられる subsurface projection について紹介する.

Definition 7. S の subsurface X が S の *essential subsurface* であるとは, ∂X の各 component が S で essential であるときにいう.

X を S の essential subsurface とする. 以下では $\ell \in \mathcal{C}^{(0)}(S)$ に対して ℓ と ∂X の交点の数は ℓ の S における isotopy 類の中で最小であるとする.

Definition 8. $\ell \cap X \neq \emptyset$ であるとき ℓ は X を *cut* する という. また $\ell \cap X = \emptyset$ であるとき ℓ は X を *miss* する という.

X を S の essential な subsurface で non-simple なものとする. また $\ell \in \mathcal{C}^{(0)}(S)$ は X を cut するとする. このとき $\mathcal{C}^{(0)}(S)$ から $\mathcal{C}^{(0)}(X)$ の power set への写像 π_X を *subsurface projection* とよび, 次のように定義する.

$\ell \cap X$ の component を α_i $(i = 1, \ldots, n)$ とする. いま $\partial X \cup \alpha_i$ の X における regular neighborhood の boundary component のうち "∂X に含まれないもので X で essential であるもの" を元とする集合を $\pi_0(\alpha_i)$ とかくことにする. このとき:

$$\pi_X(\ell) := \bigcup_{i=1}^{n} \pi_0(\alpha_i).$$

Example. $g = 2$, $c = 0$, $p = 2$ とする．また X は S の essential subsurface であり，ℓ は $\mathcal{C}^0(S)$ の元であるとする (図 7(a))．いま $\ell \cap X = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ である．(図 7(b).) このとき，$\pi_0(\alpha_1)$(resp. $\pi_0(\alpha_2)$) は 2 つの元 m_1 と m_2(resp. n_1 と n_2) から成る．(図 7(c).) この m_1, m_2, n_1, n_2 は互いに異なる $\mathcal{C}^0(X)$ の元となる．したがって $\pi_X(\ell) = \pi_0(\alpha_1) \cup \pi_0(\alpha_2) = \{m_1, m_2, n_1, n_2\}$ となる．(図 8)

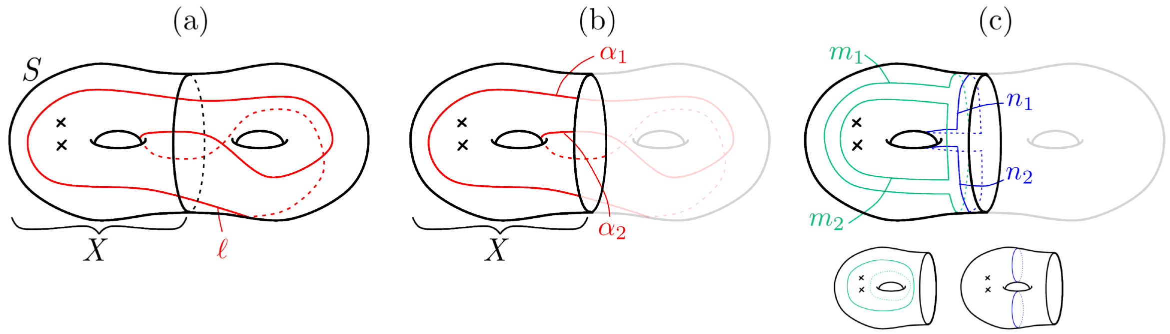

図 7: π_X の具体例

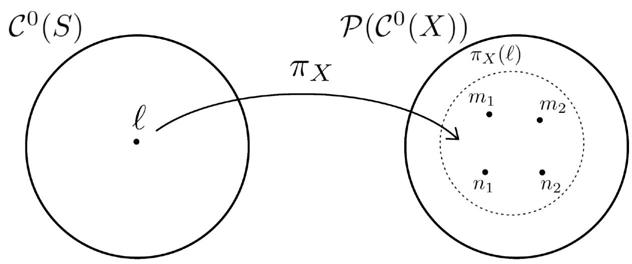

図 8: π_X による ℓ の像

Subsurface projection に関して知られている事実を 2 つ紹介する．

Lemma 1 (Lemma 2.1 [4])**.** X は S の non-simple で essential な subsurface とする．$[\ell_0, \ell_1, \ldots, \ell_n]$ を $\mathcal{C}(S)$ の path ですべての ℓ_i が X を cut しているものとする．この時，
$\mathrm{diam}_X(\pi_X(\ell_0), \pi_X(\ell_n)) \leq 2n$(図 9.)

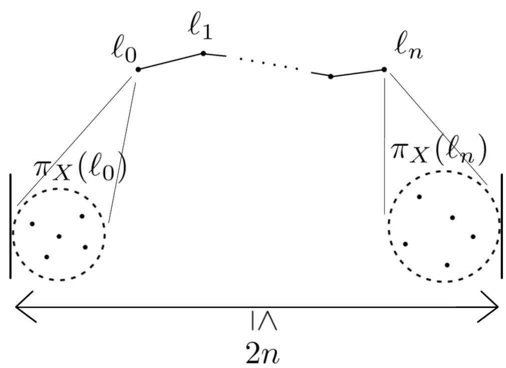

図 9: Lemma 1 の例

Lemma 2 (Lemma 2.3 [6])**.** $\alpha, \beta \in \mathcal{C}^{(0)}(S)$ とし, α と β は X を cut するものとする. この時, $\forall k \in \mathbb{N}, \exists h : S \to S$ s. t. $h|_{S\setminus X} = id_{S\setminus X}, \mathrm{diam}_X(\pi_X(\alpha), \pi_X(h(\beta)) > k$.

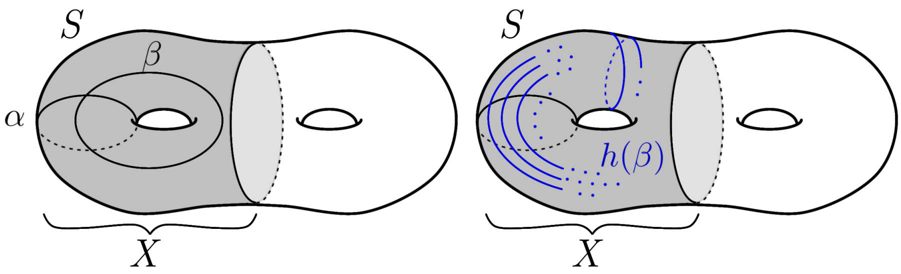

図 10: Lemma 2 の例

3 証明の概略

この章では, Theorem 1 の証明の概略を紹介する. 尚, Theorem 2 の証明も同様の議論により与えられるが本稿では省略する.

Theorem 1 の証明の概略. いま S には互いに disjoint な essential simple closed curves $a_1^{(1)}, a_1^{(2)}$ で, $a_1^{(1)} \cup a_1^{(2)}$ は S を P と X に分けるようなものが存在する. ここで $P \cong$ (annulus with a puncture) または (pants with no puncture).

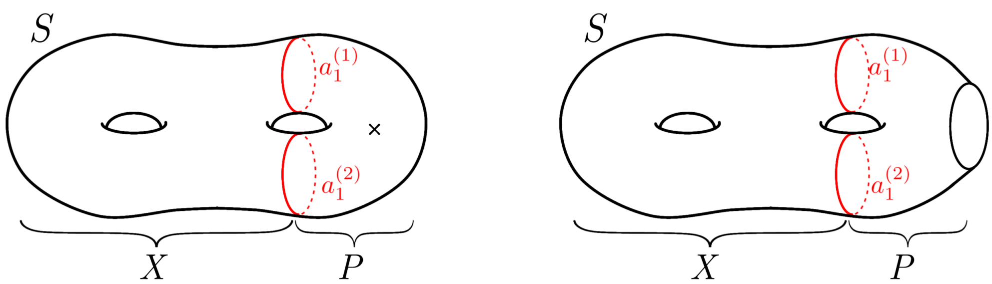

図 11: S を P と X に分ける $a_1^{(1)}$, $a_1^{(2)}$ の例

Theorem 1. の仮定より, X は non-simple である. 従って, X 内には essential simple closed curves が存在する. その中から 2 つを選び, それらを a_0, a_2' とする. Lemma 2. により, $\exists h : S \to S$ s.t. $h|_P = id_P, \mathrm{diam}_X(\pi_X(a_0), \pi_X(h(a_2'))) > 4$.

ここで $a_2 = h(a_2')$ とすればよい.

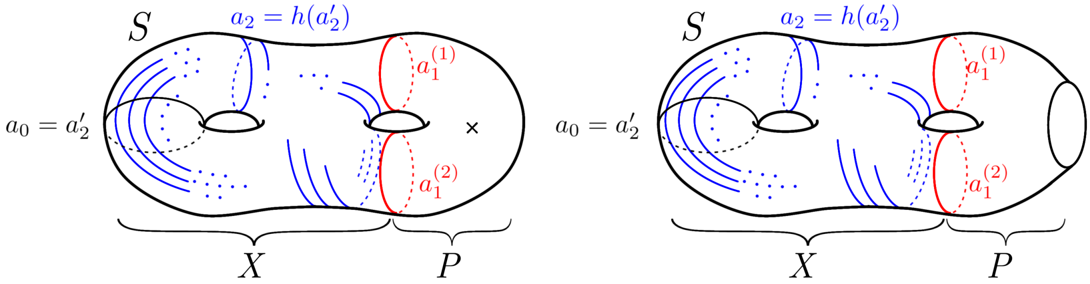

図 12: $h(a_2')$ の例

このとき a_0, a_2 は Theorem 1. の結論をみたすことを示す.

Claim 1. $[a_0, a_1^{(i)}, a_2] (i = 1, 2)$ は $\mathcal{C}(S)$ 内の geodesic である.

Claim 2. a_0 と a_2 を結ぶ geodesic は $\{[a_0, a_1^{(i)}, a_2]\}_{i=1,2}$ のいずれかである.

Proof. a_0 と a_2 を結ぶ geodesic でこれ以外のものが存在したとする, 即ち「$a_1 \neq a_1^{(1)}, a_1^{(2)}$ s.t. $[a_0, a_1, a_2]$ が $\mathcal{C}(S)$ 内の geodesic 」とする. このとき, P は simple であり, S 内の essential simple closed curves で P に含まれるものは $a_1^{(1)}$ か $a_1^{(2)}$ に isotopic になるので, a_1 は X を cut する. したがって Lemma 1. より,

$$\mathrm{diam}_X(\pi_X(a_0), \pi_X(a_2)) \leq 4$$

一方,

$$\mathrm{diam}_X(\pi_X(a_0), \pi_X(a_2)) > 4,$$

矛盾. □

Theorem 1. の証明終わり.

□

参考文献

[1] J. Birman and W. Menasco, The curve complex has dead ends, Geom. Dedicata 177(2015), 71–74.

[2] J. Brock, R.Canary and Y. Minsky, “The classification of Kleinian surface groups II: the ending lamination conjecture,” Ann. of Math. 176(2012), 1–149.

[3] W. J. Harvey, Boundary structure of the modular group, Riemann Sur-faces and Related Topics: Proceedings of the 1978 Stony Brook Conference (I. Kra, B. Maskit, eds.), Ann. of Math. Stud. 97, Princeton (1981), 245–251.

[4] A. Ido, Y. Jang and T. Kobayashi, Heegaard splittings of distance exactly n, Algebr. Geom. Topol., 14(2014), 1395–1411.

[5] A. Ido, Y. Jang, and T. Kobayashi, On keen Heegaard splittings, Adv. Stud. Pure Math., 78(2018), 293–311.

[6] A. Ido, Y. Jang, and T. Kobayashi, On keen bridge splittings of links, preprint.

[7] H. Masur, and Y. Minsky, Geometry of the complex of curves. I. Hyperbolicity, Invent. Math., 138(1999), 103–149.

[8] Y.N. Minsky, The classification of Kleinian surface groups I: models and bounds, Ann. of Math. 171(2010), 1–107.