

有向閉曲面 Σ_g 上の有向 T^2 バンドルの分類

北海道大学大学院理学院数学専攻
野田一成 (Issei NODA)

2024.3

概要

ファイバーバンドルの同型類について、基本となるのは S^1 バンドルであり、有向 S^1 バンドルの同型類はオイラー類と一対一に対応する。今回は有向 T^2 バンドル、特に底空間を有向閉曲面 Σ_g 上のバンドルを考える。本講演では、主定理である「任意の Σ_g 上の有向 T^2 バンドルは g 個の T^2 上の有向 T^2 バンドルのファイバー連結和と同型である。」に触れる前に、先行研究である Sakamoto-Fukuhara(1983) に触れつつ、主定理の証明の鍵である道具「チャート」について書かれている S.Kamada(2007) を紹介する。その後、チャートを用いた主定理の証明のスケッチを少し説明する。本研究は北海道大学の粕谷直彦氏との共同研究である。

1 序文

底空間とファイバーに出てくる T^2 を区別するためこの講演では底空間をすべて Σ_g の形で表し、バンドルについては明示がない限り有向であるとする。 Σ_g 上の T^2 バンドルの同型類はモノドロミー ρ とオイラー類 e によって決定される。 $g=0$ のとき、つまり S^2 上の T^2 バンドルに対して、モノドロミー $\rho: \pi_1(S^2) \rightarrow \mathrm{SL}(2; \mathbb{Z})$ を考えると $\pi_1(S^2)=0$ よりモノドロミーが自明なものしか存在しない。したがって、 S^2 上の T^2 バンドルの同型類はオイラー類 $e \in H^2(S^2) \simeq \mathbb{Z}$ によって決まる。 $g=1$ のとき、つまり Σ_1 上の T^2 バンドルの同型類については、[S-F] にて解決済みである。(詳細は Theorem 5 を参照) さらに、一般の種数 g について私たちは次のことを証明した。

Theorem 1 (主定理). 任意の Σ_g 上の有向 T^2 バンドルは g 個の T^2 上の有向 T^2 バンドルのファイバー連結和と同型である。

一般に、 g 個の Σ_1 上の T^2 バンドルをファイバー連結和することで Σ_g 上の T^2 バンドルを得ることができる。しかし、この逆、つまり任意の Σ_g 上の T^2 バンドルが g 個の Σ_1 上の T^2 バンドルに分解できるかどうかは非自明であり、この非自明さというのはモノドロミーが E_2 であるような Σ_g 上の分離曲線をとることができるかにあった。一般にファイバー連結和という操作はwell-definedではない。貼り合わせの際に写像類群 $\pi_0(\mathrm{Diff}_+(T^2)) \simeq \mathrm{SL}(2; \mathbb{Z})$ の元の分だけずれることに起因している。だが貼り合わせの元として $E_2 \in \mathrm{SL}(2; \mathbb{Z})$ を取ることが出来るのならばファイバー連結和という操作はwell-definedになる。そして上のモノドロミーに関して次を証明した。

Theorem 2. $g \geq 1$ とする。任意の表現 $\rho: \pi_1(\Sigma_g) \rightarrow \mathrm{SL}(2; \mathbb{Z})$ に対し、

$$\pi_1(\Sigma_g) = \langle \alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_g, \beta_g \mid [\alpha_1, \beta_1] \cdots [\alpha_g, \beta_g] = 1 \rangle$$

となる生成系 $\{\alpha_i, \beta_i\}_{1 \leq i \leq g}$ が存在して、すべての i について $\rho(\alpha_i) = \pm E_2$ が成立する。

この Theorem 2 の証明には「チャート」と呼ばれる道具が重要な役割を担っている。証明では、本来はモノド

ロミー $\rho: \pi_1(\Sigma_g) \rightarrow \mathrm{SL}(2; \mathbb{Z})$ について議論するべきだが、自然な射影 $\pi: \mathrm{SL}(2; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathrm{PSL}(2; \mathbb{Z})$ との合成によって得られる準同型 $\pi \circ \rho: \pi_1(\Sigma_g) \rightarrow \mathrm{PSL}(2; \mathbb{Z})$ に着目する。 $\mathrm{PSL}(2; \mathbb{Z}) = \langle a, b \mid a^2, b^3 \rangle$ であるから、 $\pi \circ \rho$ にチャートを用いてこの定理が導かれる。そして Theorem 2 によって Theorem 1 が成り立つことが分かる。

2 有向 T^2 バンドル

2.1 T^2 バンドルのモノドロミー及びオイラー類

$\xi: M^4 \rightarrow B$ を連結底空間 B 上の T^2 バンドルとする。 B 上の基点 b_0 をとり、 $F_0 := \xi^{-1}(b_0)$ とする。また同じ向きを保つ微分同相写像 $\Phi: T^2 \rightarrow F_0$ によって F_0 と T^2 を同一視する。

ここで $I: [0, 1] \rightarrow B$ を $I(0) = I(1) = b_0$ を満たす loop とする。 $\xi: M^4 \rightarrow B$ の引き戻し $I^*\xi$ は $[0, 1]$ 上の自明束であるので、写像 $\phi: [0, 1] \times T^2 \rightarrow M^4$ で次を満たすものがある。

- (1) $\xi(\phi(t, p)) = I(t)$
- (2) $\phi_t(p) := \phi(t, p)$ によって定義される写像 $\phi_t: T^2 \rightarrow F_t (= \xi^{-1}(I(t)))$ は向きを保つ微分同相写像である。
- (3) $\phi_0 = \Phi: T^2 \rightarrow F_0$

$F_0 = F_1$ より、微分同相写像 $\Phi^{-1} \circ \phi_1: T^2 \rightarrow T^2$ が得られる。 $\Phi^{-1} \circ \phi_1$ のアイソトピー類 $[\Phi^{-1} \circ \phi_1] (\in \mathcal{M}_1)$ は I のホモトピー類 $\{I\}$ と Φ によって決定される。この類 $[\Phi^{-1} \circ \phi_1]$ を $\{I\}$ と Φ に関連するモノドロミーという。今、局所自明化 $\Phi: T^2 \rightarrow F_0$ を固定する。 $\{I\}$ を $[\Phi^{-1} \circ \phi_1]$ に送ることによって写像 $\rho: \pi_1(B, b_0) \rightarrow \mathcal{M}_1 = \pi_0(\mathrm{Diff}_+ T^2) \simeq \mathrm{SL}(2; \mathbb{Z})$ が得られる。加えて、 \mathcal{M}_1 の群構造 $*$ を $*(a, b) \rightarrow b \circ a$ とする。このとき、 ρ は準同型となる。

また e とは、cross section の存在のための障害であり

$$e \in H^2(\Sigma_g; \tilde{\pi}_1(T^2))$$

である。ここで $\tilde{\pi}_1(T^2)$ は T^2 上の局所系であり、cross section の存在のための障害であることからオイラー類と識別しても誤解はない。

2.2 T^2 上の T^2 バンドルの分類

この章は [S-F] を参考にしている。

一般に Σ_1 上の T^2 バンドルはモノドロミー $A, B \in \mathrm{SL}(2; \mathbb{Z})$ とオイラー類 $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$ を用いて考察することができる。 $A, B \in \mathrm{SL}(2; \mathbb{Z})$, $m, n \in \mathbb{Z}$ をとる。ただし A, B は準同型写像 $\rho: \pi_1(\Sigma_1) \rightarrow \mathrm{SL}(2; \mathbb{Z})$ から決まるものなので $AB = BA$ をみたく、 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ に対して、 Σ_1 の点を $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ とおく。 Σ_1 上の T^2 束を $M(A, B; 0, 0) \rightarrow \Sigma_1$ とおき、 $M(A, B; 0, 0)$ を次のように構成する。

$$F = T^2, S = \Sigma_1 \text{ とし, } M(A, B; 0, 0) = F \times \mathbb{R}^2 / \sim$$

ただし、 \sim は

$$\begin{aligned} \left(\begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix}, \begin{pmatrix} x+1 \\ y \end{pmatrix} \right) &\sim \left(\begin{bmatrix} A & \\ & t \end{bmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right), \\ \left(\begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y+1 \end{pmatrix} \right) &\sim \left(\begin{bmatrix} B & \\ & t \end{bmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

である。 $M_0 = M(A, B; 0, 0)$ とおき、

$$\left(\begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) \text{ を } \left[\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right] \text{ もしくは } \begin{bmatrix} s, x \\ t, y \end{bmatrix}$$

によって表す。

また D を S での中心 $\begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$, 半径 ε の十分小さい円板とする。

$$M(A, B; m, n) = (M_0 - \pi^{-1}(\text{Int}D)) \cup_h (F \times D)$$

ただし $F \times \partial D$ は $\pi^{-1}(\partial D)$ と同相写像 $h: \pi^{-1}(\partial D) \rightarrow F \times \partial D$:

$$h\left(\left[\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}, \varepsilon(\theta)\right]\right) = \left(\left[\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} + (\theta/2\pi) \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}\right], [\varepsilon(\theta)]\right)$$

によって貼り合わせをする。ここで $\varepsilon(\theta) = \begin{pmatrix} 1/2 + \varepsilon \cos\theta \\ 1/2 + \varepsilon \sin\theta \end{pmatrix}$ である。 $\pi: M(A, B; m, n) \rightarrow S$ を

$$\begin{aligned} \pi \begin{bmatrix} s, x \\ t, y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{if } \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \notin D, \\ \pi \left(\begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) &= \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{if } \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in D \end{aligned}$$

と定義する。これは Σ_1 上の T^2 バンドルである。

Proposition 3 (典型的な T^2 上の T^2 バンドルの同型). $AB = BA, A'B' = B'A'$ を満たす $A, B, A', B' \in \text{SL}(2; \mathbb{Z})$ とする。 $\alpha, \beta, \sigma, \tau$ と $\alpha', \beta', \sigma', \tau'$ がそれぞれ $\pi_1(M^4), \pi_1(M'^4)$ の標準的な生成元とする。ただし $M^4 = M(A, B; m, n), M'^4 = M'(A', B'; m', n')$ とする。

(1) $A' = A^p B^r, B' = A^q B^s$ となるような $P = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \in \text{SL}(2; \mathbb{Z})$ があり $\begin{pmatrix} m' \\ n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$ とする。このときバンドル同型 $f: M' \rightarrow M$ が存在し次を満たす。

$f_*(\sigma') = \sigma, f_*(\tau') = \tau, f_*(\alpha') = \bar{\alpha}^p \bar{\beta}^r, f_*(\beta') = \bar{\alpha}^q \bar{\beta}^s$. ただし $\bar{f}_*: \pi_1(\Sigma_1) \rightarrow \pi_1(\Sigma_1)$ は底空間の間にある写像から誘導される底空間の基本群の間の準同型写像であり, $\bar{\alpha} = \pi_*(\alpha)$ なども同様である。

(2) $A' = P^{-1}AP, B' = P^{-1}BP, \begin{pmatrix} m' \\ n' \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$ であるような $P = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \in \text{SL}(2; \mathbb{Z})$ があるとする。このときバンドル同型 $f: M' \rightarrow M$ が存在し次を満たす。

$f_*(\alpha') = \alpha, f_*(\beta') = \beta, f_*(\sigma') = \sigma^p \tau^r, f_*(\tau') = \sigma^q \tau^s$

(3) $A' = A, B' = B$ で, $\begin{pmatrix} m' \\ n' \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = (A - E_2) \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} + (B - E_2) \begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix}$ を満たす $p, q, k, l \in \mathbb{Z}$ があるとする。このときバンドル同型 $f: M' \rightarrow M$ が存在し次を満たす。

$f_*(\alpha') = \sigma^{k'} \tau^{l'} \alpha, f_*(\beta') = \sigma^{p'} \tau^{q'} \beta, f_*(\sigma') = \sigma, f_*(\tau') = \tau$. ただし $\begin{pmatrix} p' \\ q' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k' \\ l' \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix}$ である。

また Σ_1 上の T^2 バンドルでは $AB = BA$ をみたすモノドロミー $A, B \in \text{SL}(2; \mathbb{Z})$ は次のように表すことができる。

Proposition 4. 任意の可換な行列 $A, B \in \text{SL}(2; \mathbb{Z})$ に対し, $C \in \text{SL}(2; \mathbb{Z})$ および互いに素な $p, q \in \mathbb{Z}$ が存在して, $A = \pm C^p, B = \pm C^q$ が成立する。

この補題の元々の証明は初等整数論に基づいているが 3 章にてチャートによる別証明を与えておく。さらに、この命題から Σ_1 上の T^2 バンドルの同型類について次の形になる。

Theorem 5. (Sakamoto-Fukuhara 1983). 任意の T^2 上の有向 T^2 バンドル $\xi : M^4 \rightarrow T^2$ に対し, $B \in \text{SL}(2; \mathbb{Z})$, $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$ が存在して, ξ は $M(E_2, B; m, n)$ または $M(-E_2, B; m, n)$ とバンドル同型である。さらに, $M(\varepsilon E_2, B; m, n)$ と $M(\delta E_2, C; k, l)$ がバンドル同型であるための必要十分条件は以下の 2 条件のいずれかが成立することである。ただし, $\varepsilon, \delta = \pm 1$ であるとし, $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix}$ とおいた。

1. $\varepsilon = \delta = 1$ のとき, $P^{-1}BP = C^{\pm 1}$ かつ

$$\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} - P \begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix} \in \mathbb{Z} \begin{pmatrix} b_1 - 1 \\ b_2 \end{pmatrix} + \mathbb{Z} \begin{pmatrix} b_3 \\ b_4 - 1 \end{pmatrix}$$

となる $P \in \text{SL}(2; \mathbb{Z})$ が存在する。

2. $\varepsilon = 1, \delta = -1$ のとき, B の位数は 2, 4 または 6 であり, $P^{-1}BP = \pm C^{\pm 1}$ かつ

$$\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} - P \begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix} \in \mathbb{Z} \begin{pmatrix} b_1 - 1 \\ b_2 \end{pmatrix} + \mathbb{Z} \begin{pmatrix} b_3 \\ b_4 - 1 \end{pmatrix}$$

となる $P \in \text{SL}(2; \mathbb{Z})$ が存在する。

3. $\varepsilon = -1, \delta = 1$ のとき, C の位数は 2, 4 または 6 であり, $P^{-1}CP = \pm B^{\pm 1}$ かつ

$$\begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix} - P \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} \in \mathbb{Z} \begin{pmatrix} c_1 - 1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \mathbb{Z} \begin{pmatrix} c_3 \\ c_4 - 1 \end{pmatrix}$$

となる $P \in \text{SL}(2; \mathbb{Z})$ が存在する。

4. $\varepsilon = \delta = -1$ のとき, $P^{-1}BP = \pm C^{\pm 1}$ かつ

$$\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} - P \begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix} \in \mathbb{Z} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{Z} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mathbb{Z} \begin{pmatrix} b_1 - 1 \\ b_2 \end{pmatrix} + \mathbb{Z} \begin{pmatrix} b_3 \\ b_4 - 1 \end{pmatrix}$$

となる $P \in \text{SL}(2; \mathbb{Z})$ が存在する。

$\xi : M^4 \rightarrow \Sigma_g$ を Σ_g 上の T^2 バンドルとする。このときモノドロミーとオイラー類によって ξ を次のように観察できる。

Σ_g は 0-cell e^0 , 1-cell $e_1^1, e_2^1, \dots, e_{2g}^1$, 2-cell e^2 に胞体分割できることを踏まえて, ξ を e^0 に制限すると自明な T^2 バンドルが得られる。 e^0 の近傍に対しても可縮なので, 自明な T^2 バンドルであり, これを e_1^1 上に自明化を延長する。このとき 1-cell のリターンマップの元として $\text{SL}(2; \mathbb{Z})$ の元が定まる。 e_{2i-1}^1 の属するホモトピー類の代表元を α_i , e_{2i}^1 の属するホモトピー類の代表元を β_i とする。 $\rho(\alpha_1) = A_1, \rho(\beta_1), \dots, \rho(\alpha_g) = A_g, \rho(\beta_g) = B_g$ とおくと, $\{\alpha_i, \beta_i\}_{1 \leq i \leq g}$ が $\pi_1(\Sigma_g)$ の生成元であるから, $A_1, B_1, \dots, A_g, B_g \in \text{SL}(2; \mathbb{Z})$ は $[A_1, B_1] \cdots [A_g, B_g] = E_2$ を満たす。

最後に, 2-cell の境界の S^1 上における貼り合わせから $\pi_1(\text{Diff}_+(T^2)) \simeq \mathbb{Z}^2$ の元が定まる。これはオイラー類と呼ばれる。このように構成した Σ_g 上の T^2 バンドルを $M(A_1, B_1, \dots, A_g, B_g; m, n)$ と表すこととする。

また T^2 上の T^2 バンドルでの典型的なバンドル同型と同様に Σ_g 上の T^2 バンドルにおいても, モノドロミー ρ については $\text{SL}(2; \mathbb{Z})$ の共役による作用と $\text{Diff}_+(\Sigma_g)$ の $\pi_1(\Sigma_g)$ に対する作用を, オイラー類 e についても $\text{SL}(2; \mathbb{Z})$ の作用を考慮することで典型的なバンドル同型が分かる。実際, 以下が成立する。

Proposition 6. $\xi : M^4 \rightarrow \Sigma_g, \xi'; M^4 \rightarrow \Sigma_g$ をともに Σ_g 上の T^2 バンドルとし, それぞれのモノドロミーおよびオイラー類を ρ, ρ', e, e' とおく。このとき, 以下の 2 条件は同値である。以下のいずれかが満たされれば,

- (1) ξ, ξ' はバンドル同型である.
- (2) $f \in \text{Diff}_+(\Sigma_g), P \in \text{SL}(2; \mathbb{Z})$ が存在して, $\rho \circ f_* = P\rho'P^{-1}$ かつ $e = f^*e'$ となる.

$g = 1$ とすれば Proposition3 になる.

2.3 ファイバー連結和

2つの Σ_1 上の T^2 バンドルからファイバー連結和という操作によって Σ_2 上の T^2 バンドルを構成する. Σ_{g-1} 上の T^2 バンドルと Σ_1 上の T^2 バンドルから Σ_g 上の T^2 バンドルを構成するのも同様に行ける. 以下2つの Σ_1 上の T^2 バンドル $\xi: M^4 \rightarrow \Sigma_1, \xi': M'^4 \rightarrow \Sigma_1$ から Σ_2 上の T^2 バンドルを構成する.

2-disk D, D' をそれぞれの局所自明化 $\phi_U, \phi_{U'}$ に対して $D \subset U, D' \subset U'$ となるようにとる. さらに $f: \partial D \rightarrow \partial D'$; 向きを逆にする微分同相写像, $\Psi: T^2 \rightarrow T^2$; 向きを保つ微分同相写像とする. このとき, $\Phi: \xi^{-1}(\partial D) \xrightarrow{\phi_U} \partial D \times T^2 \xrightarrow{f \times \Psi} \partial D' \times T^2 \xrightarrow{\phi_{U'}^{-1}} \xi'^{-1}(\partial D')$ によって fiberwise に貼り合わせをすることにより, Σ_2 上の T^2 バンドルを構成できる.

Remark 7. T^2 バンドル同士のファイバー連結和はそのままでは well-defined ではない. なぜなら, $\pi_0(\text{Diff}_+ T^2) = \text{SL}(2; \mathbb{Z}), \pi_1(\text{Diff}_+ T^2) = \mathbb{Z}^2$ の元を一つずつ選ぶ必要があり, それによって, モノドロミーとオイラー類がそれぞれ影響を受けるからである.

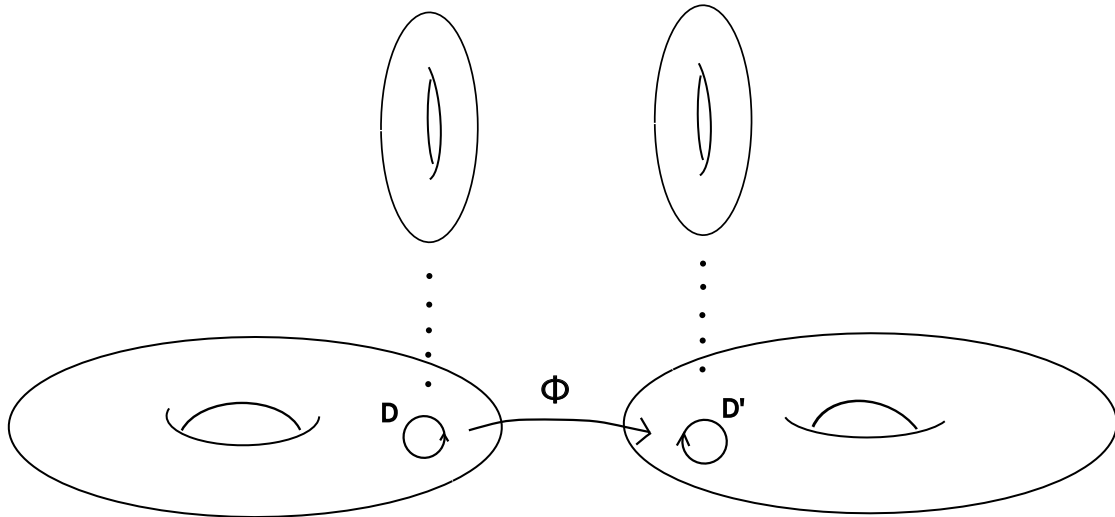


図1: ファイバー連結和

実際, $M(A, B; m, n), M'(A', B'; m', n')$ に対して $\Psi: T^2 \rightarrow T^2$ に関するファイバー連結和 $M \#_{\Psi} M'$ は $M \#_{\Psi} M'(A, B, PA'P^{-1}, PB'P^{-1}; \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} + P^{-1} \begin{pmatrix} m' \\ n' \end{pmatrix})$ と $M \#_{\Psi} M'(P^{-1}AP, P^{-1}BP, A', B'; P \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m' \\ n' \end{pmatrix})$ の2つの表し方がある. ここで $P \in \text{SL}(2; \mathbb{Z})$ は $[\Psi] \in \mathcal{M}_1 = \pi_0(\text{Diff}_+(T^2)) \simeq \text{SL}(2; \mathbb{Z})$ に対応する元である. しかし, この2つはバンドル同型でない.

3 G-モノドロミー表現のチャートによる記述

Definition 8 (G-モノドロミー). 群 G に対して準同型

$$\rho : \pi_1(\Sigma_g) \rightarrow G$$

を G-モノドロミー表現という.

グラフの辺にラベルを与えるための集合 \mathcal{X} を用意する. Γ を Σ_g に埋め込まれた有限グラフとする. Γ の各辺は向き付けられており, かつ \mathcal{X} の元がラベルとして与えられているとする.

Definition 9 (交叉語). Γ の辺と横断的に交わる道 $\eta : [0, 1] \rightarrow \Sigma_g$ をとる. η が始点を出発して終点に至るまでに, Γ と有限個の点 b_1, b_2, \dots, b_n でこの順番に交わるとする. b_i において, Γ の辺のラベルを x_i とする. b_i において, Γ の辺が η の進行方向に対して左から右へ通過するとき $\varepsilon_i = +1$, 右から左へ通過するとき $\varepsilon_i = -1$ と定める. このとき, $\mathcal{X} \cup \mathcal{X}^{-1}$ の元を文字とする語 $w_\Gamma(\eta) := x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \cdots x_n^{\varepsilon_n}$ を Γ に対する η の交叉語という.

図 2 では Σ_g に埋め込まれた path l に対して Γ の辺 b, b, a が横断的に交差している. l の進行方向に対し最初に交差する辺 b は左から右に, 次の辺 b も左から右, 最後の辺 a は右から左に交差している. よって, Γ に関する l の交叉語 $w_\Gamma(l) = b^2 a^{-1}$ となる.

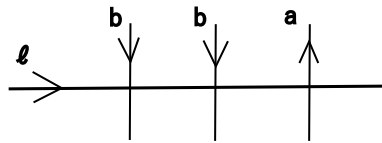


図2: l に対する交叉語

$(\mathcal{X}; \mathcal{R})$ を有限表示可能な群 G の有限表示とする. ただし \mathcal{X} : 有限集合, $\mathcal{R} : \mathcal{X} \cup \mathcal{X}^{-1}$ の元を文字とする語の集合とする.

Definition 10 (チャート). Γ が次の条件を満たすとき, Γ を Σ_g 上のチャートという.

- v が Γ の頂点であるとき, $w_\Gamma(m_v)$ は $\mathcal{R} \cup \mathcal{R}^{-1}$ の元の巡回置換である.

ここで m_v は, 頂点 v を囲む小さい単純閉曲線かつ, 向きが Σ_g の向きに対して適合するような loop である. またチャートには G の生成元にあたる hoop が入ることを許す.

図 3 は $G = \langle a, b \mid a^2, b^3 \rangle$ での T^2 上のチャートの例になる. ここで $v \in \{\Gamma \text{ の頂点}\}$ に対して, v を囲む小さな単純閉曲線の交叉語を見ると b^{-3} となっておりこれは $\mathcal{R} \cup \mathcal{R}^{-1}$ の元の巡回置換になっている. Σ_g 上の loop に対して Γ に関する loop の交叉語を与えることでチャート Γ に対し G-モノドロミーを考えることができる. これを ρ_Γ と表す. l, l' を同じホモトピー類に属する T^2 上の loop とする. このときある頂点に対して l, l' が外に回っているか内に回っているかだけ違いがあるとする. 頂点の回りのグラフは $\mathcal{R} \cup \mathcal{R}^{-1}$ の元の巡回置換であるから $\rho_\Gamma([l])$ と $\rho_\Gamma([l'])$ は G において一致する. 従って, ρ_Γ は well-defined である. 先のチャートの例で図 4 にて図示した loop α, β に対して ρ_Γ を考える. 図 4 において loop α に対して $w_\Gamma(\alpha)$ は b であ

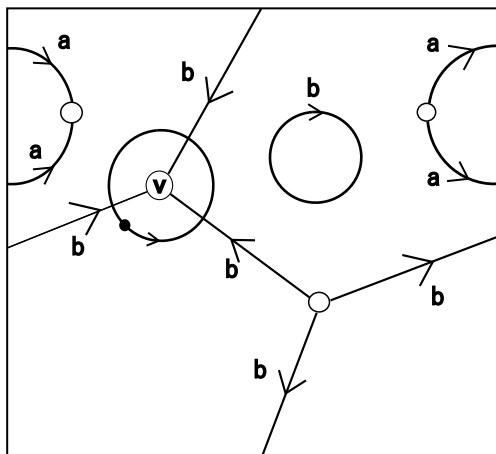


図3: Γ と $w_\Gamma(\partial v)$ の例

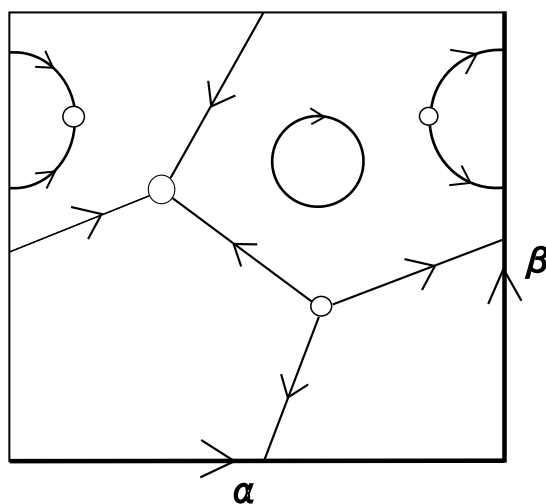


図4: ρ_Γ の計算例

るので、 $\rho_\Gamma(\alpha) = b$ となる。loop β に対しては $w_\Gamma(\beta)$ は ba^2 であるので、 $\rho_\Gamma(\alpha) = ba^2 = b$ となる。図5のチャートにおいて、 $\rho_\Gamma(\alpha) = e$ であり、 $\rho_\Gamma(\beta) = b^{-1}a$ である。図6のチャートにおいて、 $\rho_\Gamma(\alpha) = e$ であり、 $\rho_\Gamma(\beta) = a^{-1}b^{-1}a$ である。(ただし e は G の単位元である。)

Theorem 11 (S.Kamada). 任意の G -モノドロミー表現 ρ に対して、 $\rho_\Gamma = \rho$ を満たす y_0 を基点とするチャート Γ が存在する。

この定理によりモノドロミーを見るにはそれに付随するチャートを調べればよいことになる。またチャートを定義し終えたところで、前の Proposition4 をチャートを用いて証明する。

チャートによる Proposition4 の証明. $\pi_1(T^2) = \mathbb{Z}^2$ の生成元 α, β をとり、固定する。写像 $\rho : \pi_1(T^2) \rightarrow \text{SL}(2; \mathbb{Z})$ を $m, n \in \mathbb{Z}$ に対して $\rho(\alpha^m \beta^n) = A^m B^n$ と定めれば、これは準同型である。さらに、自然な写像 $\pi : \text{SL}(2; \mathbb{Z}) \rightarrow \text{PSL}(2; \mathbb{Z})$ との合成をとれば、準同型 $\pi \circ \rho : \pi_1(T^2) \rightarrow \text{PSL}(2; \mathbb{Z})$ が得られる。Theorem11 に

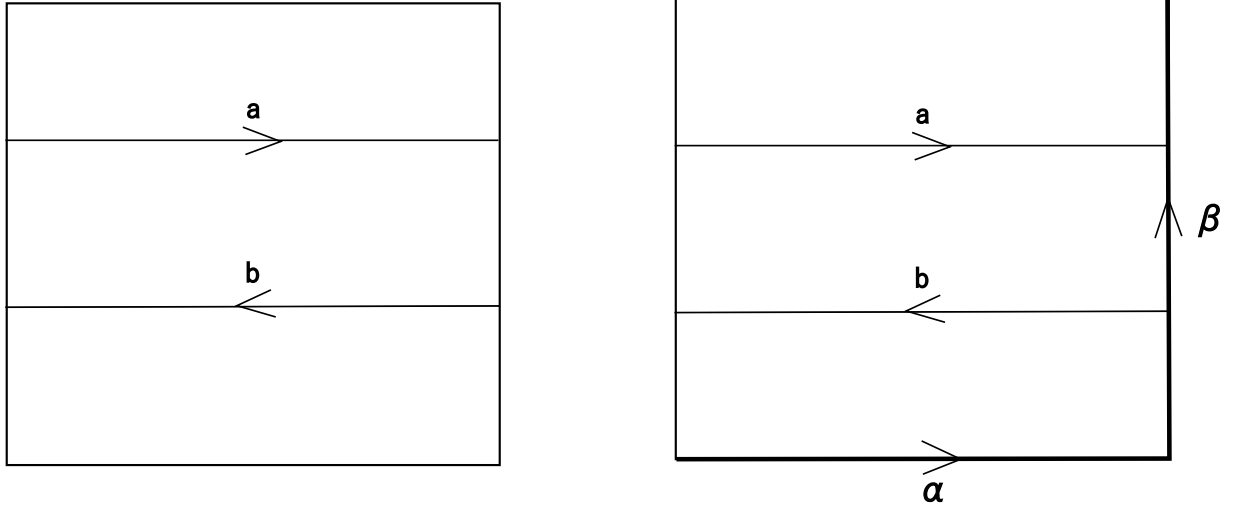


図5: $G = F_2 = \langle a, b \rangle$ のときの T^2 上のチャート

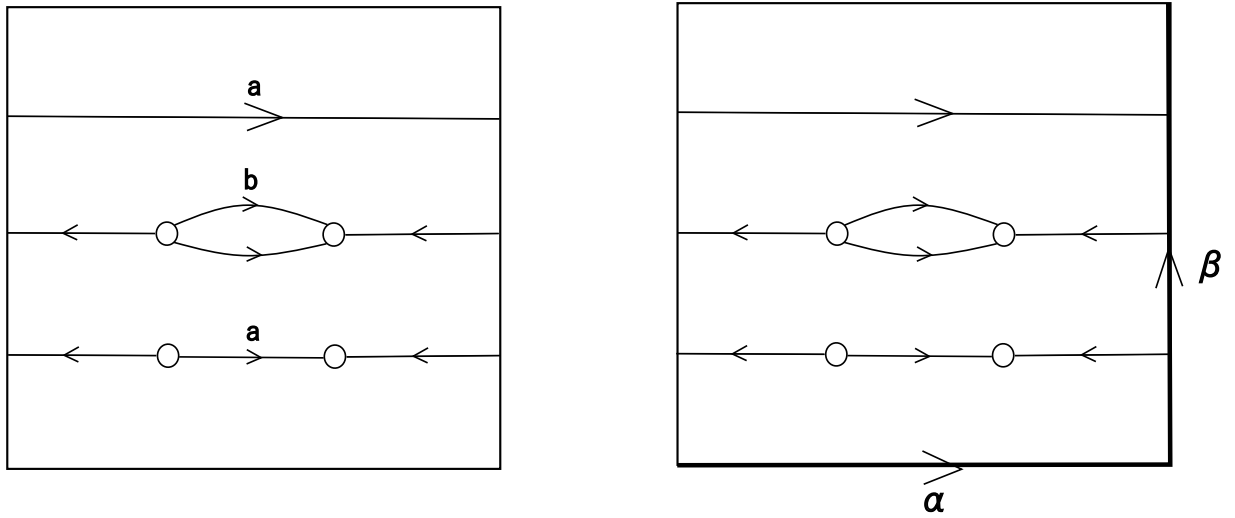


図6: $G = \langle a, b \mid a^2, b^3 \rangle$ のときの T^2 上のチャート

よって、この $\pi \circ \rho$ と群の表示 $\text{PSL}(2; \mathbb{Z}) = \langle a, b \mid a^2, b^3 \rangle = \mathbb{Z}^2 * \mathbb{Z}^3$ に対応して得られる T^2 上のチャートを Γ とおく。

- (1) Γ に 2 価頂点と hoops が存在しないとき、 $\pi \circ \rho$ は \mathbb{Z}^3 への準同型とみなせるので、 \mathbb{Z}^3 の生成元 $b := \pi\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right)$ を用いて、

$$\pi \circ \rho(\alpha) = \pi(A) = b^i, \pi \circ \rho(\beta) = \pi(B) = b^j \quad (i, j \in \{0, 1, 2\})$$

と表せる。よって、 $A = \pm \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^i, B = \pm \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^j$ となる。

- (2) Γ に 2 価頂点または hoops が存在するとき、任意の hoop は T^2 上の単純閉曲線である。一方、2 価頂点の

連結成分も T^2 上の単純閉曲線である。このような単純閉曲線を 1 つ取り c とおけば, c の平行な単純閉曲線 c' で $c' \cap \Gamma = \emptyset$ となるものがとれる。すると, $\pi \circ \rho(c')$ は自明になるから, c' に沿ったモノドロミーは $\rho(c') = \pm E_2$ である。一方, c' は T^2 上の単純閉曲線なので, 互いに素な $p, q \in \mathbb{Z}$ が存在して, $c' = \alpha^q \beta^{-p}$ となる。よって

$$\rho(c') = A^q B^{-p} = \pm E_2$$

が従う。 p, q は互いに素なので, Euclidの互除法により, $ps + qr = 1$ を満たす $r, s \in \mathbb{Z}$ が存在する。そこで, $C = A^s B^r$ とおくと,

$$C^p = A^{ps} B^{pr} = A^{1-qr} B^{pr} = A(A^q B^{-p})^{-r} = (\pm E_2)^r A = \pm A$$

$$C^q = A^{qs} B^{qr} = A^{qs} B^{1-ps} = B(A^q B^{-p})^s = (\pm E_2)^s B = \pm B$$

となるから, $A = \pm C^p, B = \pm C^q$ と表せる。

□

4 主定理の証明について

主定理の証明はモノドロミーが E_2 であるような Σ_g 上の分離曲線 γ が任意の種数 g に対して存在することを示せばよい。また, 下の命題も主定理を示すのに欠かせない命題になっている。

Proposition 12. $ABA^{-1}B^{-1} = -E_2$ をみたく $A, B \in SL(2; \mathbb{Z})$ は存在しない。

参考文献

- [S-F] K.Sakamoto and S.Fukuhara, Classification of T^2 -bundles over T^2 , Tokyo J. Math. Vol.6, No.2, 1983.
 [Ka] S.Kamada, Graphic descriptions of monodromy representations, Topology and its Applications 154(2007) 1430-1446.