ある多重 q 超幾何級数の Euler 型 Jackson 積分表示

神戸大学　大学院理学研究科　数学専攻
信川喬彦 (Takahiko NOBUKAWA) *

概 要

Kajihara の very-well-poised q 超幾何級数 $W^{M,N}$ とは, Heine の q 超幾何級数のある拡張であり, 多くの和公式や変換公式が知られている．本講演では, 級数 $W^{M,2}$ の Jackson 積分表示を導出する．また, その応用として $W^{M,2}$ が満たす q 差分方程式系や $W^{M,2}$ の線形関係式についても述べる.

1　導入：超幾何函数とは？

Gauss の超幾何函数とは, 次の級数で定義される函数である：

$$
\begin{aligned}
{}_2F_1\left(\begin{matrix}\alpha,\beta\\ \gamma\end{matrix};x\right) &= 1+\frac{\alpha\cdot\beta}{\gamma\cdot 1}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\cdot\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)\cdot 1\cdot 2}x^2+\cdots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha,n)(\beta,n)}{(\gamma,n)(1,n)}x^n \quad (|x|<1).
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

ここで, $(\alpha,n)=\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)$ である．この函数は "特殊函数の親玉" であり, 数学, 物理学, 工学などさまざまな場面に登場する, とても重要なものである．Gauss の超幾何函数 ${}_2F_1$ は次の微分方程式 (Gauss の超幾何微分方程式) を満たす：

$$
x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2}+(\gamma-(\alpha+\beta+1)x)\frac{dy}{dx}-\alpha\beta y=0. \tag{1.2}
$$

また, Gauss の超幾何函数 ${}_2F_1$ は次の積分表示をもつ：

$$
{}_2F_1\left(\begin{matrix}\alpha,\beta\\ \gamma\end{matrix};x\right)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}(1-xt)^{-\beta}dt. \tag{1.3}
$$

この表示を ${}_2F_1$ の Euler 型積分表示という．級数表示 (1.1), 微分方程式 (1.2), 積分表示 (1.3) は超幾何函数 ${}_2F_1$ の基本的な性質であり, 超幾何函数の "3 つの顔" などとも呼ばれる [12]. Gauss の超幾何微分方程式 (1.2) は Riemann 球面 $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ 上 3 点 $x=0,\,1,\,\infty$ を特異点にもち, それぞれの近傍で ${}_2F_1$ を用いた基本解 (方程式の解全体がなす空間の基底, 今の場合は 2 つの一次独立な解のこと) を構成できる：

$$
\boldsymbol{y}_0=(y_0^{(1)},y_0^{(2)})^{\mathrm{T}}=\left({}_2F_1\left(\begin{matrix}\alpha,\beta\\ \gamma\end{matrix};x\right),x^{1-\gamma}{}_2F_1\left(\begin{matrix}\alpha-\gamma+1,\beta-\gamma+1\\ 2-\gamma\end{matrix};x\right)\right)^{\mathrm{T}},
$$

*E-mail:tnobukw@math.kobe-u.ac.jp

$$\boldsymbol{y}_1=(y_1^{(1)},y_1^{(2)})^{\mathrm{T}}=\left({}_2F_1\left(\begin{matrix}\alpha,\beta\\ \alpha+\beta-\gamma+1\end{matrix};1-x\right),(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}{}_2F_1\left(\begin{matrix}\gamma-\alpha,\gamma-\beta\\ \gamma-\alpha-\beta+1\end{matrix};1-x\right)\right)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{y}_\infty=(y_\infty^{(1)},y_\infty^{(2)})^{\mathrm{T}}=\left(\left(\frac{1}{x}\right)^{\alpha}{}_2F_1\left(\begin{matrix}\alpha,\alpha-\gamma+1\\ \alpha-\beta+1\end{matrix};\frac{1}{x}\right),\left(\frac{1}{x}\right)^{\beta}{}_2F_1\left(\begin{matrix}\beta,\beta-\gamma+1\\ \beta-\alpha+1\end{matrix};\frac{1}{x}\right)\right)^{\mathrm{T}}.$$

ただし, $\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}$ は $\boldsymbol{v}$ の転置を表す. これらはすべて解空間の基底なので, 適当な定数値 2×2 行列を用いて

$$\boldsymbol{y}_0=A_{0,1}\boldsymbol{y}_1,\ \boldsymbol{y}_0=A_{0,\infty}\boldsymbol{y}_\infty,$$

となる. このような, 解の間の線形関係を求める問題を接続問題という. 今の場合, $A_{0,1}$, $A_{0,\infty}$ は積分を用いることで具体的に計算できる. まず, 積分

$$\int_C t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}(1-xt)^{-\beta}dt, \tag{1.4}$$

は, 積分路をうまく取ると Gauss の超幾何微分方程式 (1.2) の解となる. 例えば,

$$I_{\tau_1,\tau_2}=\int_{\tau_1}^{\tau_2}t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}(1-xt)^{-\beta}dt\quad(\tau_1,\tau_2\in\{0,1,1/x,\infty\}),$$

は (1.2) の解となる. Cauchy の積分定理を用いれば, これらの 6 つの積分解の間の線形関係を導くことができる:

$$I_{0,1}+I_{1,1/x}+I_{1/x,0}=0, \tag{1.5}$$
$$I_{0,1}+I_{1,\infty}+I_{\infty,0}=0, \tag{1.6}$$
$$\exp(\alpha-\gamma)I_{1,\infty}+I_{\infty,1/x}+I_{1/x,1}=0, \tag{1.7}$$
$$\exp(\alpha)I_{\infty,0}+I_{0,1/x}+\exp(\beta)I_{1/x,\infty}=0. \tag{1.8}$$

なお, 被積分函数が多価函数のため, 一部には位相因子 exp がかかる. また, 各積分の $x=0,\,1,\,\infty$ における漸近挙動を見ることで, 積分 I_{τ_1,τ_2} を級数解 $y_p^{(i)}$ $(p=0,1,\infty,\ i=1,2)$ により書き表すことができる. 例えば,

$$I_{0,1}=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(\gamma)}y_0^{(1)},\quad I_{0,1/x}=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(\alpha-\beta+1)}y_\infty^{(1)},$$

などとなる. このような積分 I_{τ_1,τ_2} の級数展開と, 線形関係 (1.5), (1.6), (1.7), (1.8) を用いれば, 接続行列 $A_{0,1}$, $A_{0,\infty}$ が求まる. 具体的には

$$A_{0,\infty}=\begin{pmatrix} e^{-i\pi\alpha}\dfrac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\alpha)} & e^{-i\pi\beta}\dfrac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}\\ e^{i\pi(\gamma-\alpha-1)}\dfrac{\Gamma(2-\gamma)\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\beta-\gamma+1)} & e^{i\pi(\gamma-\beta+1)}\dfrac{\Gamma(2-\gamma)\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(\alpha-\gamma+1)}\end{pmatrix}$$

などとなる ($A_{0,1}$ も Γ 函数を用いて明示的にかける). 接続行列が具体的に書き表せるというのは超幾何函数の魅力の 1 つである. 以上のように, 超幾何方程式/函数の理論において, 積分解/積分表示はその大域的な性質を与える非常に大事なものである. Gauss の超幾何函数については青本-喜多 [10], 原岡 [12], 吉田 [13] など日本語の本も数多くあるので, より詳しく知りたい方はそちらを参照されたい.

以降, $q \in \mathbb{C}$ を, $0 < |q| < 1$ ととり固定する. Gauss の超幾何函数 ${}_2F_1$ の q 類似 (すなわち, $q \to 1$ の極限で ${}_2F_1$ となるもの) として, Heine の q 超幾何函数が古くから知られている：

$$
\begin{aligned}
{}_2\varphi_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix}; x\right) &= 1 + \frac{(1-a)\cdot(1-b)}{(1-c)\cdot(1-q)}x + \frac{(1-a)(1-aq)\cdot(1-b)(1-bq)}{(1-c)(1-cq)\cdot(1-q)(1-q^2)}x^2 + \cdots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a;q)_n(b;q)_n}{(c;q)_n(q;q)_n}x^n \quad (|x| < 1). \qquad (1.9)
\end{aligned}
$$

ここで, $(a;q)_n = \dfrac{(a;q)_\infty}{(aq^n;q)_\infty}$, $(a;q)_\infty = \displaystyle\prod_{i=0}^{\infty}(1-aq^i)$ である. $a = q^\alpha$, $b = q^\beta$, $c = q^\gamma$ とおき, 極限 $q \to 1$ をとれば, ${}_2\varphi_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix}; x\right) \to {}_2F_1\left(\begin{matrix} \alpha, \beta \\ \gamma \end{matrix}; x\right)$ となる. Heine の q 超幾何級数 (1.9) とその種々の拡張に関する多くの和公式や変換公式は, Gasper-Rahman [2] にまとめられているので, そちらも参照されたい. また, Gauss の超幾何函数同様, Heine の q 超幾何函数にも "3 つの顔" がある. Heine の q 超幾何函数 ${}_2\varphi_1$ は次の q 差分方程式を満たす：

$$
[(1-T_x)(1-cq^{-1}T_x) - x(1-aT_x)(1-bT_x)]y = 0. \qquad (1.10)
$$

ただし, T_x は x に関する q シフト作用素である：$T_xf(x) = f(qx)$. また, Heine の q 超幾何函数 ${}_2\varphi_1$ は次の Euler 型 Jackson 積分表示をもつ：

$$
{}_2\varphi_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix}; x\right) = \frac{(a;q)_\infty(c/a;q)_\infty}{(1-q)(q;q)_\infty(c;q)_\infty}\int_0^1 t^{\alpha-1}\frac{(qt;q)_\infty}{(ct/a;q)_\infty}\frac{(bxt;q)_\infty}{(xt;q)_\infty}d_qt. \qquad (1.11)
$$

ただし, $q^\alpha = a$ であり, また函数 $f(t)$ の Jackson 積分は以下の和で定義される：

$$
\int_0^\tau f(t)d_qt = (1-q)\sum_{n=0}^{\infty} f(\tau q^n)\tau q^n.
$$

Heine の q 差分方程式 (1.10), 積分表示 (1.11) はそれぞれ (1.2), (1.3) の q 類似である.

超幾何函数と q 超幾何函数は多くのことがパラレルに考察することができる. 例えば,

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{y}_0^q(x) &= \left({}_2\varphi_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix}; x\right), \frac{\theta(x)}{\theta(qx/c)}{}_2\varphi_1\left(\begin{matrix} aq/c, bq/c \\ q^2/c \end{matrix}; x\right)\right)^{\mathrm{T}}, \\
\boldsymbol{y}_\infty^q(x) &= \left(\frac{\theta(ax)}{\theta(x)}{}_2\varphi_1\left(\begin{matrix} a, aq/c \\ aq/b \end{matrix}; \frac{cq}{abt}\right), \frac{\theta(bx)}{\theta(x)}{}_2\varphi_1\left(\begin{matrix} bq/c, b \\ bq/a \end{matrix}; \frac{cq}{abt}\right)\right)^{\mathrm{T}},
\end{aligned}
$$

とおくと, これらはそれぞれ $x = 0$, $x = \infty$ における Heine の q 超幾何方程式 (1.10) の基本解であり, その接続行列は以下のようにかける：

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{y}_0^q = A_{0,\infty}^q \boldsymbol{y}_\infty^q, \\
&A_{0,\infty}^q = \begin{pmatrix} \dfrac{(b, c/a;q)_\infty}{(c, b/a;q)_\infty} & \dfrac{(a, c/b;q)_\infty}{(c, a/b;q)_\infty} \\ \dfrac{(qb/c, q/a;q)_\infty}{(q^2/c, b/a;q)_\infty}\dfrac{\theta(aqx/c)\theta(x)}{\theta(qx/c)\theta(ax)} & \dfrac{(qa/c, q/b;q)_\infty}{(q^2/c, a/b;q)_\infty}\dfrac{\theta(bqx/c)\theta(x)}{\theta(qx/c)\theta(bx)} \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

ただし, $(a,b;q)_\infty = (a;q)_\infty(b;q)_\infty$ などと略記し, また $\theta(x) = (x, q/x, q;q)_\infty$ は Jacobi のテータ函数である. 「一価函数として解析接続できる」, 「接続係数にテータ函数が現れる」, 「その応用

として Yang-Baxter 方程式 (可積分系で重要な役割を担う) の楕円函数解が構成できる」など, q 差分固有の面白い性質も数多くある.

本稿では, 次のような Jackson 積分を考える：

$$\int_{q/a_i}^{q/a_j} \prod_{k=1}^{M+3} \frac{(a_k t;q)_\infty}{(b_k t;q)_\infty} d_q t. \tag{1.12}$$

ただし, $\displaystyle\int_{\tau_1}^{\tau_2} f(t) d_q t = \int_0^{\tau_2} f(t) d_q t - \int_0^{\tau_1} f(t) d_q t$ であり, さらに a_k, b_k に次のような条件を課す：

$$a_1 \cdots a_{M+3} = q^2 b_1 \cdots b_{M+3}. \tag{1.13}$$

この積分は次のような積分の q 類似である：

$$\int_C \prod_{k=1}^{M+3} (t - x_k)^{\nu_k} d_q t, \quad \nu_1 + \cdots + \nu_{M+3} = -2. \tag{1.14}$$

条件 (1.13) は $\nu_1 + \cdots + \nu_{M+3} = -2$ に対応する. $M = 1$ のとき, 積分 (1.14) は Möbius 変換を施すことで Gauss の超幾何積分 (1.4) に変換できる. Gauss の超幾何方程式に Möbius 変換を施して得られるものは Riemann-Papperitz の微分方程式と呼ばれる. 当然, Riemann-Papperitz の微分方程式は Gauss の超幾何方程式と等価だが, 方程式の対称性などがより見やすいなどいくつかの利点もある (例えば, Whittaker-Watson [9] などを参照). 一方, q 差分方程式の理論において $x = 0, \infty$ は q シフト作用素の固定点という特別な点である. したがって, 一般に q 差分方程式には Möbius 変換を作用させせることができず, 特に Riemann-Papperitz の微分方程式の q 類似は構成できなかった. 最近, 神戸大学の藤井大計氏との共同研究 [1] において, Hatano-Matsunawa-Sato-Takemura [3] により導入された q 超幾何方程式の変異版という q 差分方程式が, q-Riemann-Papperitz 方程式であることを見出し, その積分解と級数解を構成した. この積分解は $M = 1$ の場合の Jackson 積分 (1.12) であり, また級数解は very-well-poised q 超幾何級数 ${}_8W_7$ というものを用いて構成した. このことについては, 論文 [1] のほか, 本研究集会の藤井大計氏の講演やそのテクニカルレポートも参照されたい. 級数解の構成においては, 以下の Bailey の公式と呼ばれる公式が有用であった：$cd = abefgh$ のとき,

$$\begin{aligned}&\int_a^b \frac{(qt/a, qt/b, ct, dt;q)_\infty}{(et, ft, gt, ht;q)_\infty} d_q t \\ =&b(1-q)\frac{(q, bq/a, a/b, cd/(eh), cd/(fh), cd/(gh), bc, bd;q)_\infty}{(ae, af, ag, be, bf, bg, bh, bcd/h;q)_\infty} \times {}_8W_7\left(\frac{bcd}{hq}; be, bf, bg, \frac{c}{h}, \frac{d}{h}; ah\right).\end{aligned} \tag{1.15}$$

函数 ${}_8W_7$ の説明はここではしないが, 直交多項式の理論や可積分系, 数理物理学などに登場する大変面白い函数である. 詳細については, Gasper-Rahman [2] とその中の参考文献を見よ. 論文 [1] では $M = 1$ の場合の積分 (1.12) が満たす q 差分方程式やその級数解を与えた. この自然な拡張として, 次のような問題が考えられる：

一般の M に対して, "3 つの顔", すなわち
(1) q 超幾何積分 (1.12) が満たす q 差分方程式
(2) q 超幾何積分 (1.12) の級数表示
はどうなっているか？

2　主結果：Kajihara の q 超幾何級数 $W^{M,2}$ の Jackson 積分表示

本稿では主に問題 (2), すなわち Bailey の変換公式 (1.15) の拡張について述べる．主結果は以下にあげる定理 2.1 である．これは積分 (1.12) と Kajihara の q 超幾何級数 [5] の間の変換公式を与える．また, 定理 2.2, 2.3 も関連する新規の結果であり, それぞれ積分 (1.12) が満たす q 差分方程式系, Kajihara の q 超幾何級数の間の線形関係 (すなわち, 接続公式) を与える．

Bailey の変換公式 (1.15) は very-well-poised terminate q 超幾何級数 ${}_{10}W_9$ の変換公式 (正しくは, こちらを Bailey の変換公式と呼ぶ) の極限をうまくとることで得られる．証明の流れは Gasper-Rahmann [2] を参照．この ${}_{10}W_9$ の変換公式の多重級数への拡張として, Kajihara の変換公式 [5] というものが知られている．まず, Kajihara の q 超幾何級数を導入する．以降, $(a;q)_n=(a)_n$ などと略記する．

定義 2.1 ([5])**.** q 超幾何級数 $W^{n,m}$ を以下のように定義する：

$$
\begin{aligned}
&W^{n,m}\left(\begin{array}{c}\{a_i\}_{1\le i\le n}\\ \{x_i\}_{1\le i\le n}\end{array}\middle|\, s;\{u_k\}_{1\le k\le m};\{v_k\}_{1\le k\le m};z\right)\\
&=\sum_{l\in(\mathbb{Z}_{\ge0})^n} z^{|l|}\frac{\Delta(xq^l)}{\Delta(x)}\prod_{1\le i\le n}\frac{1-q^{|l|+l_i}sx_i/x_n}{1-sx_i/x_n}\\
&\qquad\times\prod_{1\le j\le n}\left(\frac{(sx_j/x_n)_{|l|}}{((sq/a_j)x_j/x_n)_{|l|}}\prod_{1\le i\le n}\frac{(a_jx_i/x_j)_{l_i}}{(qx_i/x_j)_{l_i}}\right)\\
&\qquad\times\prod_{1\le k\le m}\left(\frac{(v_k)_{|l|}}{(sq/u_k)_{|l|}}\prod_{1\le i\le n}\frac{(u_kx_i/x_n)_{l_i}}{((sq/v_k)x_i/x_n)_{l_i}}\right).
\end{aligned}
$$

ただし, $|l|=l_1+l_2+\cdots+l_n$, $xq^l=\{x_iq^{l_i}\}_{1\le i\le n}$ であり, $\Delta(x)$ は Vandermonde 行列式である：

$$
\Delta(x)=\prod_{1\le i<j\le n}(x_i-x_j).
$$

級数 $W^{n,m}$ を Kajihara の very-well-poised q 超幾何級数, あるいは単に Kajihara の q 超幾何級数という．

このような多重超幾何級数は Lie 群 SU の表現論の研究において Holman-Biedenharn-Louck [4] により導入され, q 類似やその拡張, さらには楕円類似が Milne [7], Kajihara [5], Kajihara-Noumi [6] などにより研究されてきた．これらの多重超幾何級数は和公式や変換公式をもち, 可積分系や数理物理学にも応用される, 重要な特殊函数である．Kajihara の q 超幾何級数の性質やその周辺については, 梶原康史氏の講究録 [11] も参照されたい．

Kajihara の q 超幾何級数は, 以下の変換公式をもつ：

命題 2.1 (Kajihara の変換公式 [5])**.** 任意の $N\in\mathbb{Z}_{\ge0}$ に対し,

$$
\begin{aligned}
&W^{n,m+2}\left(\begin{array}{c}\{b_i\}_{1\le i\le n}\\ \{x_i\}_{1\le i\le n}\end{array}\middle|\, a;\{c_ky_k/y_m\}_{1\le k\le m},d,e;\{fy_m/y_k\}_{1\le k\le m},\mu fq^N,q^{-N};q\right)\\
&=\frac{(\mu df/a,\mu ef/a)_N}{(aq/d,aq/e)_N}\prod_{1\le k\le m}\frac{((\mu c_kf/a)y_k/y_m,fy_m/y_k)_N}{(\mu qy_k/y_m,(aq/c_k)y_m/y_k)_N}\prod_{1\le i\le n}\frac{(aqx_i/x_n,(\mu b_if/a)x_n/x_i)_N}{((aq/b_i)x_i/x_n,(\mu f/a)x_n/x_i)_N}
\end{aligned}
$$

$$\times W^{m,n+2}\left(\begin{matrix}\{aq/(c_kf)\}_{1\le k\le m}\\ \{y_k\}_{1\le k\le m}\end{matrix}\;\middle|\;\mu;\left\{\frac{aq}{b_if}\frac{x_i}{x_n}\right\}_{1\le i\le n},\frac{aq}{df},\frac{aq}{ef};\left\{\frac{\mu f}{a}\frac{x_n}{x_i}\right\}_{1\le i\le n},\mu fq^N,q^{-N};q\right), \tag{2.1}$$

が成り立つ．ただし，$\mu=a^{m+2}q^{m+1}/(b_1b_2\cdots b_nc_1c_2\cdots c_mdef^{m+1})$ である．

変換公式 (2.1) において，$m=1$，$c_1=cq^N$ とおき極限 $N\to\infty$ をとることで，以下の公式を得る．

定理 2.1. 級数 $W^{n,2}$ は以下の積分表示をもつ：

$$W^{n,2}\left(\begin{matrix}\{b_i\}_{1\le i\le n}\\ \{x_i\}_{1\le i\le n}\end{matrix}\;\middle|\;a;f,f\mu;d,e;c/a\right)$$
$$=\frac{(aq/(df),aq/(\mu df),aq/(ef),aq/(\mu ef),f,\mu f)_\infty}{(1-q)(q,c/a,aq/d,aq/e,q\mu,1/\mu)_\infty}\prod_{1\le i\le n}\frac{(aqx_i/x_n,(aq/b_if)x_i/x_n,(aq/\mu b_if)x_i/x_n)_\infty}{((aq/b_i)x_i/x_n,(aq/f)x_i/x_n,(aq/\mu f)x_i/x_n)_\infty}$$
$$\times\int_{1/\mu}^1\frac{(qt,\mu cft/a,q\mu t)_\infty}{(aqt/(df),aqt/(ef),\mu ft)_\infty}\prod_{i=1}^n\frac{((aq/f)x_it/x_n)_\infty}{((aq/b_if)x_it/x_n)_\infty}d_qt.$$

ただし，$\mu=a^3q^2/(b_1b_2\cdots b_ncdef^2)$ である．特に，積分 (1.12) と級数 $W^{M,2}$ の間に以下の変換公式が成り立つ：

$$\int_{q/a_{M+2}}^{q/a_{M+3}}\prod_{i=1}^{M+3}\frac{(a_it)_\infty}{(b_it)_\infty}d_qt$$
$$=\frac{(q,a_{M+1}/b_{M+3},b_{M+1}b_{M+3}q^2/(a_{M+2}a_{M+3}),b_{M+2}b_{M+3}q^2/(a_{M+2}a_{M+3}),a_{M+2}q/a_{M+3},a_{M+3}/a_{M+2})_\infty}{(b_{M+1}q/a_{M+2},b_{M+2}q/a_{M+2},b_{M+3}q/a_{M+2}b_{M+1},q/a_{M+3},b_{M+2}q/a_{M+3},b_{M+3}q/a_{M+3})_\infty}$$
$$\times\frac{q(1-q)}{a_{M+3}}\prod_{i=1}^M\frac{(b_ib_{M+3}q^2/(a_{M+2}a_{M+3}),a_iq/a_{M+2},a_iq/a_{M+3})_\infty}{(a_ib_{M+3}q^2/(a_{M+2}a_{M+3}),b_iq/a_{M+2},b_iq/a_{M+3})_\infty}$$
$$\times W^{M,2}\left(\begin{matrix}\{a_i/b_i\}_{1\le i\le M}\\ \{a_i\}_{1\le i\le M}\end{matrix}\;\middle|\;\frac{a_Mb_{M+3}q}{a_{M+2}a_{M+3}};\frac{b_{M+3}q}{a_{M+2}},\frac{b_{M+3}q}{a_{M+3}};\frac{a_M}{b_{M+1}},\frac{a_M}{b_{M+2}};\frac{a_{M+1}}{b_{M+3}}\right). \tag{2.2}$$

これが，1 章の問題 (2) の答えである．また，問題 (1) については，$M=1$ の場合の方程式 [1] と同様の議論により，積分 (1.12) が満たす $(M+1)$ 階の q 差分方程式系を導出することができる．時間の都合上，講演では触れることが難しいが，このテクニカルレポートで紹介しておく．

定理 2.2. 積分 (1.12) は次の $(M+1)$ 階の q 差分方程式系を満たす：

$$\begin{aligned}
&E_My=0,\\
&[(a_1-a_kq)T_{a_k}T_{a_l}^{-1}-(a_l-a_kq)T_{a_k}T_{a_1}^{-1}+(a_l-a_1)]y=0,\\
&[(b_1-a_1)T_{a_1}T_{a_k}^{-1}-(q^{-1}a_k-a_1)T_{a_1}T_{b_1}+(q^{-1}a_k-b_1)]y=0,\\
&[(b_1-q^{-1}b_l)T_{b_k}T_{b_l}^{-1}-(b_k-q^{-1}b_l)T_{b_1}T_{b_l}^{-1}+(b_k-b_1)]y=0,\\
&[(a_1-b_1)T_{b_k}T_{b_1}^{-1}-(b_kq-b_1)(T_{a_1}T_{b_1})^{-1}+(b_kq-a_1)]y=0,\\
&[(b_1-a_k)T_{a_k}T_{b_l}-(b_l-a_k)T_{a_k}T_{b_1}+(b_l-b_1)]y=0,\\
&[(b_l-a_1)T_{a_k}^{-1}T_{b_l}^{-1}-(b_l-a_k)T_{a_1}^{-1}T_{b_l}^{-1}+(a_1-a_k)]y=0,\\
&\left(q\prod_{k=1}^{M+3}T_{a_k}T_{b_k}-1\right)y=0.
\end{aligned}$$

ここで, $1 \leq k, l \leq M+3$ であり, E_M は次で定義される $(M+1)$ 階の q 差分作用素である (ただし, $T = T_{a_1}T_{b_1}$, $\hat{a} = (a_2, \ldots, a_{M+3})$, $\hat{b} = (b_2, \ldots, b_{M+3})$)：

$$\begin{aligned} E_M &= b_1^{M+2} T^{-1} \prod_{n=0}^{M} (1 - (a_1 q^n / b_1) T) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{M+1} (-1)^k b_1^{M+2-k} [e_k(\hat{a}) T^{-1} - q e_k(\hat{b})] \prod_{n=0}^{M-k} (1 - (a_1 q^n / b_1) T) \prod_{n=0}^{k-2} (1 - q^{-n} T) \\ &\quad + (-1)^{M+2} a_2 \cdots a_{M+3} T^{-1} \prod_{n=0}^{M} (1 - q^{-n} T). \end{aligned}$$

方程式 $E_M y = 0$ は論文 [1] と同様の議論により, そのほかの方程式は積分 (1.12) の被積分函数が満たす q 差分方程式を考えることにより導出できる．また, 積分表示 (2.2) やそれに付随する q 差分方程式系の応用として, $W^{M,2}$ の線形関係を得ることができる．積分表示 (2.2) の右辺を $W\begin{pmatrix} \{a_i\}_{1\leq i\leq M+3} \\ \{b_i\}_{1\leq i\leq M+3} \end{pmatrix}$ とおくと, 次を得る：

定理 2.3. (i) $\sigma_a \in \mathfrak{S}_{M+1}$, $\sigma_b \in \mathfrak{S}_{M+3}$ に対し, 次が成り立つ：

$$W\begin{pmatrix} \{a_{\sigma_a(i)}\}_{1\leq i\leq M+1}, a_{M+2}, a_{M+3} \\ \{b_{\sigma_b(i)}\}_{1\leq i\leq M+3} \end{pmatrix} = W\begin{pmatrix} \{a_i\}_{1\leq i\leq M+3} \\ \{b_i\}_{1\leq i\leq M+3} \end{pmatrix}.$$

(ii) 次の 3 項間関係式が成り立つ：

$$\begin{aligned} W\begin{pmatrix} \{a_i\}_{1\leq i\leq M}, a_{M+1}, a_{M+2}, a_{M+3} \\ \{b_i\}_{1\leq i\leq M+3} \end{pmatrix} + W\begin{pmatrix} \{a_i\}_{1\leq i\leq M}, a_{M+2}, a_{M+3}, a_{M+1} \\ \{b_i\}_{1\leq i\leq M+3} \end{pmatrix} \\ + W\begin{pmatrix} \{a_i\}_{1\leq i\leq M}, a_{M+3}, a_{M+1}, a_{M+2} \\ \{b_i\}_{1\leq i\leq M+3} \end{pmatrix} = 0. \end{aligned}$$

(iii) 次の $(M+2)$ 項間の関係式が成り立つ：

$$\sum_{i=1}^{M+2} C_k W\begin{pmatrix} a_1, \ldots, a_{k-1}, a_{M+2}, a_{k+1}, \ldots, a_{M+1}, a_k, a_{M+3} \\ \{b_i\}_{1\leq i\leq M+3} \end{pmatrix} = 0.$$

ただし,

$$C_k = \left(\frac{a_k}{a_{M+3}}\right)^2 \prod_{i=1}^{M+3} \frac{\theta(a_k/b_i)}{\theta(a_{M+3}/b_i)} \prod_{\substack{1\leq i\leq M+3 \\ i\neq M+3}} \theta(a_{M+3}/a_i) \prod_{\substack{1\leq i\leq M+3 \\ i\neq k}} \theta(a_k/a_i)^{-1}.$$

関係式 (i) は被積分函数の対称性から, (ii) は Jackson 積分の定義から簡単にわかる．関係式 (iii) は, Jordan-Pochhammer 型 Jackson 積分の接続公式 [8] と, 積分 (1.12) が満たす q 差分方程式 $E_M y = 0$ を用いることで得られる．

以上の結果は現在論文準備中である．

謝辞

本研究集会での講演の機会を与えてくださった第 20 回数学総合若手研究集会の世話人の皆様に深く感謝いたします. 本研究は JST 次世代研究者挑戦的研究プログラム JPMJSP2148, JSPS 科研費 JP22H01116 の支援を受けたものです.

参考文献

[1] T. Fujii, T. Nobukawa, Hypergeoemtric solutions for variants of q-hypergeometric equation, arXiv:2207.12777.

[2] G. Gasper, M. Rahman, Basic Hypergeometric Series, 2nd ed., Cambridge University Press (2004).

[3] N. Hatano, R. Matsunawa, T. Sato, K. Takemura, Variants of q-hypergeometric equation, Funk. Ekvac. **65**, 187-211 (2022).

[4] W. J. Holman, L. C. Biedenharn, J. D. Louck, On hypergeometric series well-poised in $SU(n)$, SIAM J. Math Anal. **7**, 529-541 (1976).

[5] Y. Kajihara, Euler transformation formula for multiple basic hypergeometric series of type A and some applications, Adv. Math. **187**, no. 1, 53-97 (2004).

[6] Y. Kajihara, M. Noumi, Multiple elliptic hypergeometric series : An approach from the Cauchy determinant. Indag. Math. **14**, 395-421 (2003).

[7] S. C. Milne, A q-analogue of hypergeometric series well-poised in $SU(n)$ and invariant G-functions, Adv. in Math. **58**, 1-60 (1985).

[8] K. Mimachi, Connection problem in holonomic q-difference system associated with a Jackson integral of Jordan-Pochhammer type, Nagoya Math. J. **116**, 149-161 (1989).

[9] E. Whittaker, G. N. Watson, A Course of Modern Analysis (5th ed.), Cambridge University Press (2021).

[10] 青本和彦, 喜多通武, 超幾何関数論, 丸善出版 (1994).

[11] 梶原康史, 多次元底付き超幾何変換公式 -Cauchy の再生核からのアプローチ-, 数理解析研究所講究録 1382 巻, 124-142 (2004).

[12] 原岡喜重, すうがくの風景 超幾何関数, 朝倉書店 (2002).

[13] 吉田正章, 私説超幾何関数 —対称領域による点配置空間の一意化—, 共立出版 (1997).