モースホモトピーを用いた重み付き射影空間のホモロジー的ミラー対称性について

千葉大学大学院融合理工学府数学情報科学専攻
西田安寿菜 (Azuna NISHIDA) *

1 導入 (背景)

ホモロジー的ミラー対称性予想は，物理学に由来を持つミラー対称性の圏論的な定式化としてKontsevich により提唱された．これは，ミラー対を成すカラビヤウ多様体の組 $(M, \check{M})$ に対し，一方のカラビ・ヤウ多様体をシンプレクティック多様体とみて，そのラグランジュ部分多様体の成す深谷圏の導来圏と他方のカラビ・ヤウ多様体を複素多様体とみなした時のその連接層の導来圏との間に三角圏同値が存在することを主張する予想である：

$$Tr(Fuk(M)) \simeq D^b(coh(\check{M})).$$

ここに，$Tr()$ とは A_∞ 圏である深谷圏を三角圏である連接層の導来圏と比較するために，A_∞ 圏から三角圏を構成する操作を表す [2, 1].

程なくして，Strominger-Yau-Zaslow（以降 SYZ と略す）らにより，ミラー対称性をトーラスファイバー束を用いた双対性でもって解釈するという幾何学的描像が提案された（SYZ 予想）[3]．SYZ 予想は，カラビ・ヤウ多様体のミラー対が，同一底空間上の 2 つの特殊ラグランジュトーラスファイバー束の全空間として得られ（SYZ 構成），また（特異ファイバーでないところでは）それらのファイバーが互いに双対トーラスになっているという主張を含んでいる．Kontsevich-Soibelman らは [4] において，ホモロジー的ミラー対称性を SYZ らの幾何学的描像を用いて肯定的に議論している．そこでは，特にシンプレクティック幾何側において，トーラスファイバー束のラグランジュ切断からなる圏と従来の深谷圏との間に，トーラスファイバー束の底空間上のモースホモトピーの圏 $Mo(B)$ を導入し*1，それを介して圏の同値性の議論がなされている．梶浦・二木らはその方向性で，さらにミラー対の複素多様体がトーリックファノ多様体である場合を扱える様に，拡張されたモースホモトピーの圏 $Mo(P)$ を導入した [5]．ここに，P はトーリックファノ多様体の運動量凸多面体を表す．[5] では，トーリックファノ多様体 X の連接層の導来圏の，既知である強例外的生成系 $\mathcal{E}$ を用いて，複素側ではそれらからなる DG 圏（これは連接層の導来圏の DG 増強にあたる）を，シンプレクティック側では対応するラグランジュ切断からなる $Mo_{\mathcal{E}}(P)$ の充満部分圏をそれぞれ構成し

---

* E-mail:anishida@g.math.s.chiba-u.ac.jp

*1 深谷-Oh によりモースホモトピーの圏 $Mo(M)$ はその余接束の深谷圏 $Fuk(T^*M)$ と同値になることが示されており（ただしこの場合の Y はコンパクトな多様体），[4] では余接束をトーラスファイバー束に置き換えたものを考えている．

て，これらの A_∞ 圏同値を示すという定式化が提案されている．この A_∞ 同値が示されれば，ホモロジー的ミラー対称性の三角圏同値が従う．これまでにこの定式化において，複素多様体が射影空間，また，それらの直積，ヒルツェブルフ曲面 $\mathbb{F}_1$ の場合は梶浦・二木 [5, 6] により，それら以外のトーリックファノ曲面（射影平面の 2 点，3 点ブローアップ），また $k > 1$ のヒルツェブルフ曲面 $\mathbb{F}_k$ の場合は中西 [7, 8] により示されている．講演者は，この定式化におけるホモロジー的ミラー対称性の[*2]，複素多様体が特異点を持つ場合の初めての成立例として，トーリックオービフォールドである重み付き射影空間の場合を紹介したいと思う．

2 準備

オービフォールドとは大雑把には，局所的にユークリッド空間を有限群で割ったような空間といえる．以下では，後のためにオービフォールドに関して簡単に触れるが，正確な定義や詳細は，[12, 13] やその参考文献などを参照されたい．パラコンパクトハウスドルフ空間 X の開集合 U に対し，U の（複素）オービフォールドチャートとは次の三つ組 $(\tilde{U}, \Gamma, \varphi)$ から構成される：$\mathbb{C}^n$ の連結開集合 $\tilde{U}$，$\tilde{U}$ に効果的に[*3]作用している有限群 Γ，U の上への Γ 不変な連続写像 $\varphi : \tilde{U}_i \to U$ であって，同相 $U \simeq \tilde{U}/\Gamma$ を誘導するもの．オービフォールドアトラスは，X の開被覆を与えるようなオービフォールドチャートの族であって，然るべき貼り合わせ条件を満たすもののことである．X とオービフォールドアトラスの組によってオービフォールドが定まる．

さて，重み付き射影空間に話を移す．$q_0, \ldots, q_n$ は正の整数であって，$\gcd(q_0, \ldots, q_n) = 1$ を満たすとする．$Q = (q_0, \ldots, q_n)$ とおく．重み付き射影空間とは，一般に，$\mathbb{C}^{n+1} \backslash \{0\}$ をこれへの次で定まる $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \backslash \{0\}$ 作用：

$$\lambda \cdot (z_0, \ldots, z_n) = (\lambda^{q_0} z_0, \ldots, \lambda^{q_n} z_n), \quad \lambda \in \mathbb{C}^*$$

で割った空間のことをいう．これを $\mathbf{P}(Q)$ と書く．この作用における同値類を $[z_0 : \cdots : z_n]$ と書く．開集合 $U_i = \{[z_0 : \cdots : z_n] \in \mathbb{P}(Q) \mid z_i \neq 0\}$ のオービフォールドチャートは次のように与えられる．$\tilde{U}_i = \{(w_{i0}, \ldots, \overset{i}{1}, \ldots, w_{in}) \in \mathbb{C}^{n+1}\} \simeq \mathbb{C}^n$ とおく．これには $\mathbb{C}^*$ の部分群として $\mu_{q_i} := \{\ 1 \text{ の } q_i \text{ 乗根}\ \} \simeq \mathbb{Z}_{q_i}$ が作用していて，$\varphi_i : \tilde{U} \to U_i, (w_{i0}, \ldots, \overset{i}{1}, \ldots, w_{in}) \mapsto [w_{i0} : \cdots : 1 : \cdots : w_{in}]$ は同相 $U_i \simeq \tilde{U}_i/\mu_{q_i}$ を誘導する．他のオービフォールドチャートについて詳細は省くが，次の同相 $U_{i_1} \cap \cdots \cap U_{i_k} \simeq (\mathbb{C}^*)^k \times \mathbb{C}^{n-k}/\mathbb{Z}_{\gcd(q_{i_1}, \ldots, q_{i_k})}$ に対応するものが取れる．オービフォールドとしての重み付き射影空間と（underlying space としての）$\mathbf{P}(Q)$ を区別するため，オービフォールドの方を $\mathbb{P}(Q) = (\mathbf{P}(Q), \mathcal{U})$ と書くことにする．

注意 2.1. 重み付き射影空間はトーリックオービフォールドでもある．階数 n の格子 N を $b_0 = \frac{1}{q_0}(-\sum_{i=1}^n e_i), b_1 = \frac{1}{q_1} e_1, \ldots, b_n = \frac{1}{q_n} e_n$ で生成されるものとする．ここに $e_1, \ldots, e_n$ は $\mathbb{Z}^n$ の標準

[*2] ホモロジー的ミラー対称性予想にはミラー対の構成法及びそれに適切な三角圏を用いることで，いくつか定式化に種類があることに注意．特にトーリック多様体と対応する Laurant 多項式のミラーに対する定式化が最もよく研究されており具体的成立例が報告されている．この場合の定式化で複素多様体が重み付き射影平面の場合は Aroux-Katzarkov-Orlov により示されている．

[*3] 「効果的である」という条件を課さないでより一般にオービフォールドを定義する場合もある．区別のために，今の場合の方を「効果的」もしくは「簡約された (reduced)」オービフォールドと呼んだりもする．

基底を表す．$M = \mathrm{Hom}(N, \mathbb{Z})$ を N の双対格子とし，$<\ ,\ >$ でペアリングを表す．

いま，$\Sigma \subset \mathbb{N}_{\mathbb{R}} := N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} = \mathbb{R}^n$ を $\{b_0, \ldots, b_n\}$ の真部分集合から生成される有理強凸多面錐から成る単体的扇とすると，$X_\Sigma = \mathbf{P}(Q)$ となる．また，$\sigma_i = \mathrm{Cone}(b_0, \ldots, \hat{b_i}, \ldots, b_n)$ とし，$N'_{\sigma_i} = \bigoplus_{k \neq i} \mathbb{Z} b_k \subset N$ とすると N'_{σ_i} は N の有限指数を持つ部分格子である．実際，$N/N_{\sigma_i} \simeq \mathbb{Z}_{q_i}$ である．N'_{σ_i} の双対を $M'_{\sigma_i}(\supset M)$ と書く．このとき，$U'_{\sigma_i} := \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[\sigma_i \cap M'_{\sigma_i}]) \simeq \mathbb{C}^n(\simeq \tilde{U}_i)$，$U_{\sigma_i} = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[\sigma_i \cap M]) \simeq U'_{\sigma_i}/(N/N'_{\sigma_i})$ となり，先に見たオービフォールドチャートと一致する．

3 SYZ ミラー構成・SYZ 変換

[11] のアファイン多様体上の（双対）トーラスファイバー束の構成及び SYZ 変換を，トーリックオービフォールドである重み付き射影空間に対して適用することを考える．特に，非特異トーリック多様体の場合の議論のアナロジーを行う．特に，[10, 5, 6] の議論を参考とした．

3.1 SYZ ミラー構成

$\mathbf{P}(Q)$ のトーリック因子の補集合を $\check{Y} = \mathbf{P}(Q) \backslash \bigcup_{i=0}^n D_i \simeq (\mathbb{C}^*)^n$ とおく．ここで，D_i とは $\mathbf{P}(Q)$ の一次元錐 $\mathbb{R}_{\geq 0} b_i$ に対応するトーリック因子である．$\check{Y} = \bigcap_{i=0}^n U_i$ とも表すことができる．いま，オービフォールドとして $\check{Y}$ の各点の固定群は自明なため, 非特異である場合のトーラスファイバー束の構成のアナロジーを以下のように考える．ただし，$\check{Y} \subset U_i$ を一つ固定し，(オービフォールドの入射で) 埋め込んだ先 $\tilde{U}_i (= U'_{\sigma_i}) \simeq \mathbb{C}^n$ の局所座標を用いる．このとき, $\check{Y} \simeq (N'_{\sigma_i})_{\mathbb{R}} \times \sqrt{-1}((N'_\sigma)_{\mathbb{R}}/N)$ の自明なトーラスファイバー束の構造が次で定義される：

$$\check{p} : \check{Y} \longrightarrow (N'_{\sigma_i})_{\mathbb{R}}$$
$$(e^{\check{x}_{i0} + \sqrt{-1}\check{y}_{i0}}, \ldots, \hat{e}^{\check{x}_{ii} + \sqrt{-1}\check{y}_{ii}}, \ldots, e^{\check{x}_{in} + \sqrt{-1}\check{y}_{in}}) \longmapsto (\check{x}_{i0}, \ldots, \widehat{\check{x}_{ii}}, \ldots, \check{x}_{in}).$$

ここに，$(N'_{\sigma_i})_{\mathbb{R}} = N'_\sigma \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} (= N_{\mathbb{R}}) = \mathbb{R}^n$ はアファイン多様体であり，$T(N'_{\sigma_i})_{\mathbb{R}}/N = N'_{\sigma_i} \times \sqrt{-1}((N'_\sigma)_{\mathbb{R}}/N)$ となることに注意する．これの双対トーラスファイバー束は，次で与えられる：

$$p : T^*(N'_{\sigma_i})_{\mathbb{R}}/M = N'_{\sigma_i} \times \sqrt{-1}((M'_\sigma)_{\mathbb{R}}/M) \longrightarrow (N'_{\sigma_i})_{\mathbb{R}}.$$

$Y := T^*(N'_{\sigma_i})_{\mathbb{R}}/M$ は，そのファイバーの座標系を $(y^{i0}, \ldots, \widehat{y^{ii}}, \ldots, y^{in})$ として，標準的なシンプレクティック形式 $\sum_{k \neq i} d\check{x}_{ik} \wedge dy^{ik}$ を持つ．

さて，$\mathbb{P}(Q)$ に（オービフォールド）ケーラー構造，局所的に $\omega_{\tilde{U}_i} = -2\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\log(1 + \sum_{j \neq i}(w_{ij}\overline{w_{ij}})^{\frac{q_0 \cdots q_n}{q_j}})$ で定まるものをとる．これを $\check{Y} \subset \tilde{U}_i$ に制限したものは，次のように書ける：

$$\omega_{\check{Y}} = \sum_{k,l} \frac{\partial^2 \check{\phi}_i}{\partial \check{x}_{ik} \partial \check{x}_{il}} d\check{x}_{ik} \wedge d\check{y}_{il}, \quad \check{\phi}_i := \log(1 + \sum_{j \neq i} e^{2\frac{q_0 \cdots q_n}{q_j}\check{x}_{ij}}).$$

運動量写像 $\mu : \mathbb{P}(Q) \to \mathbb{R}^n$ は,

$$(w_{i0}, \ldots, \widehat{w_{ii}}, \ldots, w_{in}) \mapsto \left(\frac{2q_0 \cdots q_n |w_{i0}|^{2\frac{q_0 \cdots q_n}{q_0}}}{q_0(1 + \sum_{j \neq i} |w_{ij}|^{2\frac{q_0 \cdots q_n}{q_j}})}, \ldots, \frac{2q_0 \cdots q_n |w_{in}|^{2\frac{q_0 \cdots q_n}{q_n}}}{q_n(1 + \sum_{j \neq i} |w_{ij}|^{2\frac{q_0 \cdots q_n}{q_j}})} \right)$$

で定まり, その像は凸多面体 $P=\{(x^{i0},\dots,\widehat{x^{ii}},\dots,x^{in}) \mid x^{ik}\geq 0,\, k\neq i,\, \sum_{k\neq i} q_k x^{ik}\leq 2q_0\cdots q_n\}$ $\subset (M'_{\sigma_i})_{\mathbb{R}}=\mathbb{R}^n$ である．このとき，運動量写像の $\check{Y}$ への制限 $\check{\pi}:=\mu|_{\check{Y}}:\check{Y}\to B:=\mathrm{Int}P$ もまた，アファイン多様体 B 上のトーラスファイバー束と思えることに注意する．実際，微分同相 $\Phi:(N'_{\sigma_i})_{\mathbb{R}}\xrightarrow{\simeq} B$，$(x^{i0},\dots,\widehat{x^{ii}},\dots,x^{in})=(\frac{\partial\check{\phi}_i}{\partial\check{x}_{i0}},\dots,\widehat{\frac{\partial\check{\phi}_i}{\partial\check{x}_{ii}}},\dots,\frac{\partial\check{\phi}_i}{\partial\check{x}_{in}})$ があり[*4]，次の様に表せる：

$$\check{\pi}:\check{Y}\simeq T^*B/N\to B,\quad \pi:Y\simeq TB/M\to B.$$

以降，基本的には $\check{Y}$（複素側）と Y（シンプレクティック側）を B 上のトーラスファイバー束として扱う．

3.2 SYZ 変換

本節では，$\mathbb{P}(Q)$ 上の（オービフォールド）正則直線束[*5]$\mathcal{O}(a)$，$a\in\mathbb{Z}$ とその接続を前節で構成したトーラスファイバー束 $\check{Y}$ に制限し，これに対してその双対トーラスファイバー束 Y のラグランジュ切断を対応させることを考える．

直線束 $\mathcal{O}(a)$ の接続形式を，$\tilde{U}_i$ 上次で定まるものをとる：$A_a^{(i)}=-a\frac{\sum_{k\neq i}1/q_k\cdot|w_{ik}|^{2\frac{q_0\cdots q_n}{q_k}}\cdot w_{ik}^{-1}dw_{ik}}{1+\sum_{k\neq i}|w_{ik}|^{2\frac{q_0\cdots q_n}{q_k}}}$．いま，$\mathcal{O}(a)$ を $\tilde{U}_i\backslash\bigcup_{k\neq i}\tilde{D}_k, \tilde{D}_k=\{w_{ik}=0\}$ に制限し，また $\Psi_a:=(1+\sum_{k\neq i}e^{2\frac{q_0\cdots q_n}{q_k}\check{x}_{ik}})^{\frac{a}{2q_0\cdots q_n}}$ で捻ることで，次の表示を得る：

$$\Psi_a^{-1}(d+A_a)\Psi_a=d-\sqrt{-1}\sum_{k\neq i}\frac{a}{2q_0\cdots q_n}x^{ik}d\check{y}_{ik}. \tag{3.1}$$

これをトーラスファイバー束 $\check{Y}\simeq(\tilde{U}_i\backslash\bigcup_{k\neq i}\tilde{D}_k)/\mu_{q_i}\simeq B\times\sqrt{-1}(N'_{\sigma_i})_{\mathbb{R}}/N$ 上に制限すると，ファイバー $(\check{y}_{i0},\dots,\widehat{\check{y}_{ii}},\dots,\check{y}_{in})$ の周期が変わることに注意する．

[6, 5] では，非特異であるトーリックファノ多様体の場合であるが，Leung-Yau-Zaslow での SYZ 変換に基づき，トーラスファイバー束 Y のラグランジュ切断から定まる $\check{Y}$ 上の自明束の接続（従って曲率の (0,2) パートが消える）$d-\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\sum_{k\neq i}s^{ik}(x)d\check{y}_{ik}$ と上の様に適切にひねって得られた接続の表示を比較することによってラグランジュ切断を対応づけている．ここでも同様に，ラグランジュ切断をそのリフトが次で表されるものとして対応を与える：

$$s_a^{ik}(x^{i0},\dots,\widehat{x^{ii}},\dots,x^{in})=\frac{2\pi a}{2q_0\cdots q_n}x^{ik}+2\pi\cdot const,\quad k=0,\dots,\hat{i},\dots,n. \tag{3.2}$$

ただし，定数項に関しては，凸多面体の境界上への延長に関する以下でみる条件を満たすものをとる:

条件 3.1. $b_0,\dots,b_n\in N$ を注 2.1 で定めたベクトルとする．（特に，これらは，$\mathbb{R}_{\geq 0}b_i$ が扇 $\Sigma\subset(N'_{\sigma_i})_{\mathbb{R}}$ の 1 次元錐となっており，凸多面体 $P\subset(M'_{\sigma_i})_{\mathbb{R}}$ の余次元 1 の各面の垂直ベクトル（ただし凸多面体の内側向き）を与えることに注意する．また $N'_{\sigma_i}=\bigoplus_{k\neq i}\mathbb{Z}b_k$ であったことも思い出しておく．）このとき，ラグランジュ切断のリフト $s_a:B\simeq(N'_{\sigma_i})_{\mathbb{R}}\to T^*(N'_{\sigma_i})_{\mathbb{R}}=N'_{\sigma_i}\times\sqrt{-1}((M'_{\sigma})_{\mathbb{R}})$ が次の条件を満たすことを考える：$(N'_{\sigma_i})_{\mathbb{R}}=N_{\mathbb{R}}$ の任意の点 v に対し，$\check{x}_l(t)=v+tb_l, l=0,\dots,n$

---

*4 このとき，$\check{\pi}=\Phi\circ\check{p}$ が成り立っている．

*5 オービフォールドベクトル束とはだいたい，各 $\tilde{U}$ 上の同変ベクトル束を貼り合わせたようなものである．

とおくと，

$$\lim_{t\to-\infty} < \frac{1}{2\pi}\sum_{k\neq i} s_a^{ik}(\check{x}_l(t))b_k^*, b_l > \in \mathbb{Z}, \quad l=0,\dots,n$$

が成り立つ．ここに，$b_k^* \in M'_{\sigma_i}$（$\supset M$），$k\neq i$ は N'_{σ_i} の基底 b_k，$k\neq i$ の双対基底を表す．

注意 3.2. この条件は Chan[10] の滑らかな射影的トーリック多様体に対する「growth condition」（の一部）を，トーリックオービフォールドである重み付き射影空間の場合に書き直したものに相当する．（ただし記法は少し異なる．）

この条件を満たす（3.2）の形のリフトは，$\sum_{k=0}^n q_k b_k = 0$ が成り立つことに注意すると次の様に表されるものであることがわかる：

$$s_a^{ik}(x^{i0},\dots,\widehat{x^{ii}},\dots,x^{in}) = \frac{2\pi a}{2q_0\cdots q_n}x^{ik} - 2\pi\cdot a_k, \quad k=0,\dots,\hat{i},\dots,n, \tag{3.3}$$

ただし $a_k\in\mathbb{Z}, k\neq i$ であり，更にある整数 a_i が存在して $\sum_{k=0}^n q_k a_k = a$ を満たす．

注意 3.3. 上で得られるリフトは well-defined にラグランジュ切断 $s_a : B \to T^*(N'_{\sigma_i})_{\mathbb{R}}/M = N'_{\sigma_i}\times\sqrt{-1}((M'_\sigma)_{\mathbb{R}}/M)$ を定めることがわかる．つまり，同様に (3.3) の形で与えられるリフトを s'_a とすると，$\frac{1}{2\pi}(s_a - s'_a)\in M \simeq \{(m_0,\dots,m_n)\in\mathbb{Z}^{n+1} \mid \sum_{k=0}^n q_k m_k = 0\}$ となることがわかる．

注意 3.4. $df_a^{(i)} = \sum_{j\neq i} s_a^{ij} d\check{x}_{ik}$ を満たす関数として，次の様なものが取れる：

$$\begin{aligned} f_a^{(i)} &= 2\pi\frac{a}{2q_0\cdots q_n}\log(1+\sum_{k\neq i} e^{2\frac{q_0\cdots q_n}{q_k}}\check{x}_{ik}) - 2\pi\sum_{k\neq i} a_k\check{x}_{ik} + const. \\ &= -2\pi\log(2q_0\cdots q_n - \sum_{k\neq i} q_k x^{ik})^{\frac{q_i a_i}{2q_0\cdots q_n}}\prod_{k\neq i}(q_k x^{ik})^{\frac{q_k a_k}{2q_0\cdots q_n}} + 2\pi\log(2q_0\cdots q_n)^{\frac{a}{2q_0\cdots q_n}} + const.. \end{aligned} \tag{3.4}$$

4 圏の構成

重み付き射影空間 $\mathbb{P}(Q)$ のホモロジー的ミラー対称性に関する主定理を述べるために，本節ではどのような圏を考えるかについて述べる．特に，前章の SYZ 変換によって複素側の圏とシンプレクティック側の圏の対象が対応づいていることに注意されたい．

4.1 複素側の DG 圏：$\mathcal{V}$ と $DG(\mathbb{P}(Q))$

$\check{Y}\simeq(\tilde{U}_i\backslash\bigcup_{k\neq i}\tilde{D}_k)/\mu_{q_i}$ に付随する DG 圏 $\mathcal{V}$ を次の様に定める：

- 対象のクラスは，（オービフォールド）直線束 $\mathcal{O}(a)$ を $\tilde{U}_i\backslash\bigcup_{k\neq i}\tilde{D}_k\subset\tilde{U}_i$ に制限したもの（記号の乱用でこれも $\mathcal{O}(a)$ と書く）とその接続 $D_a = d - \sqrt{-1}\sum_{k\neq i}\frac{a}{2q_0\cdots q_n}x^{ik}d\check{y}_{ik}$ の組 $s_a = (\mathcal{O}(a), D_a)$ たちから成る集合．
- 射の空間 $\mathcal{V}(s_a, s_b)$ は次で定まる $\mathbb{Z}$ 次数付きベクトル空間である：

$$\mathcal{V}(s_a,s_b) = \bigoplus_{r\in\mathbb{Z}}\Gamma(\mathcal{O}(a),\mathcal{O}(b))\otimes\Omega^{0,r}(\tilde{U}_i\backslash\bigcup_{k\neq i}\tilde{D}_k).$$

ここで，$\Gamma(\mathcal{O}(a),\mathcal{O}(b))$ は直線束 $\mathcal{O}(a)$ から $\mathcal{O}(b)$ への滑らかな準同型のなす集合を表す．射の合成 Y を $m(\psi_{ab},\psi_{bc}) := \psi_{ab}\wedge\psi_{bc}$ により定める．また，$\mathcal{V}(s_a,s_b) = \bigoplus_{r\in\mathbb{Z}}\mathcal{V}^r(s_a,s_b)$ に対して

$$d_{ab}(\psi) := 2(D_b^{(0,1)}\psi - (-1)^{r_{ab}}\psi D_a^{(0,1)})$$

により（複体としての）微分 d_{ab} を定める．（このときこれらはライプニッツ則を満たし整合的であることがわかる．（従って DG 圏を成す．））

また更に，$DG(\mathbb{P}(Q))$ を $\mathbb{P}(Q)$ の直線束とその接続の組たちから成る $\mathcal{V}$ とほぼ同様に構成される DG 圏とする．（ここで，$\mathcal{O}(a)$ に対してその接続を，$A_a^{(i)}$ を §3.2 で定めた接続形式として，$\{A_a^{(i)}\}$ から定まるものとしてとることにする．）

注意 4.1. 直線束を $\mathbb{P}(Q)$ から $\tilde{U}_i\backslash\bigcup_{k\neq i}\tilde{D}_k$ へ制限して捻ることにより，忠実埋め込み

$$\mathcal{I}: DG(\mathbb{P}(Q)) \hookrightarrow \mathcal{V}$$

が得られ，また，これは DG 関手となることがわかる．ただし，$\psi\in\mathcal{V}(s_a,s_b)$ は $\bigcup_{k\neq i}\tilde{D}_k$，($\tilde{D}_k = \{w_{ik}=0\}$) 上滑らかに延長できるとは限らないため $\mathcal{I}$ は充満関手でないことに注意する．

連接層の導来圏との関連について述べておく．重み付き射影空間の連接層の導来圏 $D^b(coh(\mathbb{P}(Q)))$ は，その強例外的生成系が $(\mathcal{O}(q),\ldots,\mathcal{O}(q+\sum_{i=0}^n q_i - 1))$（$k$ は任意の整数）で与えられることが知られている [9]．即ち，$q\in\mathbb{Z}$ を一つ固定し $\mathcal{E} := (\mathcal{O}(q),\ldots,\mathcal{O}(q+\sum_{i=0}^n q_i - 1))$ とおくと，

$$D^b(coh(\mathbb{P}(Q))) \simeq Tr(DG_{\mathcal{E}}(\mathbb{P}(Q)))$$

が成り立つ．ここに，$DG_{\mathcal{E}}(\mathbb{P}(Q))$ は $\mathcal{E}$ の直線束からなる $DG(\mathbb{P}(Q))$ の充満部分圏である．また特に，$\mathcal{E}$ が強例外的対象系であることから次が従う：

$$H^p(DG_{\mathcal{E}}(\mathcal{O}(a),\mathcal{O}(b)) \simeq \begin{cases} S_{b-a} \quad (p=0,\ a\le b), \\ 0 \quad (p=0,\ a>b), \\ 0 \quad \text{その他}. \end{cases} \tag{4.1}$$

ここで，S_d は不定元 z_i の次数が q_i で与えられた多項式環 $S=\mathbb{C}[z_0,\ldots,z_n]$ の d 次の斉次多項式全体の集合を表す．コホモロジー $H^0(DG(\mathbb{P}(Q))(\mathcal{O}(a),\mathcal{O}(b)))$，$a<b$ の元は，$I=(k_0,\ldots,k_n)\in(\mathbb{Z}_{\geq 0})^n$，$\sum_{i=0}^n q_ik_i = b-a$ として，$\tilde{\psi}_{ab;I} = (w_{i0})^{k_0}\cdots(w_{i,i-1})^{k_{i-1}}(w_{i,i+1})^{k_{i+1}}\cdots(w_{in})^{k_n}$ と局所表示される．これを $\mathcal{I}:\tilde{\psi}\mapsto\psi := \Psi_b^{-1}\circ\tilde{\psi}\circ\Psi_a$ でうつすことで，$H^0(\mathcal{I}(DG(\mathbb{P}(Q)))(\mathcal{O}(a),\mathcal{O}(b)))$，$a<b$ のコホモロジーは，以下のような表示となることがわかる．(ただし，以下は双対座標による表示である．また，$I\check{y} := \sum_{j\neq i}k_j\check{y}_{ij}$ と略記する．)

$$\psi_{ab;I} = \left(\frac{2q_0\cdots q_n - \sum_{k\neq i}q_kx^{ik}}{2q_0\cdots q_n}\right)^{\frac{q_ik_i}{2q_0\cdots q_n}} \left(\frac{q_0x^{i0}}{2q_0\cdots q_n}\right)^{\frac{q_0k_0}{2q_0\cdots q_n}} \cdots \left(\frac{q_nx^{in}}{2q_0\cdots q_n}\right)^{\frac{q_nk_n}{2q_0\cdots q_n}} e^{\sqrt{-1}I\check{y}} \tag{4.2}$$

また，各 k_j が非負であるため，$\psi_{ab;I}$ は P 上の滑らかな関数として拡張できることに注意する．

4.2 シンプレクティック側の圏：モースホモトピーの圏 $Mo(P)$

重み付き射影空間の運動量凸多面体 P 上のモースホモトピーの圏 $Mo(P)$ は次のような圏である（一般の場合の正確な定義は [6, 5]，またそれらの参考文献を参照されたい．）：

- 対象のクラスは，$\mathcal{O}(a)$，$a \in \mathbb{Z}$ に対し，(3.3) によって与えられるラグランジュ切断 $s_a = df_a : B \to M$ たちの成す集合．（以降，ラグランジュ切断 s_a とそのグラフ $L_a := \{(x, s_a(x)) \in M\}$ を同一視する．）

  注意 4.2. (i) 今の場合，ラグランジュ切断は特にアファインであり，互いに clean に交わっていることに注意する．つまり，$P = \overline{B}$ を包むある開集合 $\tilde{B}$ が存在して，B 上の L, L' が $\tilde{B}$ 上で clean に交わる様に $\tilde{B}$ 上の切断のグラフとして滑らかに延長可能なものとなっている．
  (ii) また，ラグランジュ切断 $s_a = df_a$ の f_a は $\tilde{B}$ 上のモース関数となっている．

- 射の空間 $Mo(P)(L_a, L_b)$ は，$\pi(L_a \cap L_b) \subset P$ の「良い」連結成分 V で生成される $\mathbb{Z}$ 次数付きベクトル空間である（実際には後に見る補題 4.4 の形で得られる．）：
$$Mo(P)(L_a, L_b) = \bigoplus_{V \subset \pi(L_a \cap L_b)} \mathbb{R}V.$$
  ここで一般に，ラグランジュ切断の順序付き組 (L, L') に対し，連結成分 $V \in \pi(L \cap L')$ にはその次数が，勾配ベクトル場 $-\mathrm{grad}(f - f')$ に対応する安定多様体 S_v $(v \in V)$ の次元として，つまり，$|V| := \dim S_v$ として定められる．これにより $Mo(P)$ を $\mathbb{Z}$ 次数付きベクトル空間とみなす．ただし今の場合は，生成系となる各連結成分の次数は全て 0 となることに注意する．

- A_∞ 積構造 $\{m_l\}_{l \geq 1}$
  - m_1 ＝微分：各 $a, b \in \mathbb{Z}$ に対して，上で述べたような次数の事情から $m_1 = 0$ である．
  - m_2 ＝合成：$m_2 : Mo(P)(L_a, L_b) \otimes Mo(P)(L_b, L_c) \to Mo(P)(L_a, L_c)$ は次の様に定義される（実際の計算結果は後で述べる）：
$$m_2(V_{ab}, V_{bc}) = \sum_{|V_{ac}| = |V_{ab}| + |V_{bc}|} \sum_{[\gamma] \in \mathcal{HGT}(V_{ab}, V_{bc}; V_{ac})} e^{-A(\gamma)} V_{ac}.$$
    ここで，勾配樹木 γ は連続写像 $T \to P$ であり，三価木グラフ T の葉（頂点）がそれぞれ $v_{ab} \in V_{ab} \subset \pi(L_a \cap L_b)$，$v_{bc} \in V_{bc} \subset \pi(L_b \cap L_c)$ に，根（頂点）が $v_{ab} \in V_{ac} \subset \pi(L_a \cap L_c)$ にうつり，各辺がそれぞれ勾配ベクトル場 $-\mathrm{grad}(f_a - f_b), -\mathrm{grad}(f_b - f_c), -\mathrm{grad}(f_a - f_c)$ の積分曲線（ただしそれぞれ v_{ab}, v_{bc}, v_{ac} を端点にもつ）にうつるようなものである．$A(\gamma)$ は $\gamma(T) \subset P$ をリフトした所でのシンプレクティック面積を表す．
  - m_3，m_4，$\cdots$：$m_l (l \geq 2)$ は次数 $(2 - l)$ の多重線型写像であり，次数勘定から自明なことがわかる．

なお，以下では後のホモロジー的ミラー対称性の議論を見据えて，連接層の導来圏の強例外的生成系に対応するラグランジュ切断の列 $\mathcal{E}$ に対し，$\mathcal{E}$ から成る充満部分圏 $Mo_{\mathcal{E}}(P) \subset Mo(P)$ を考える．

さて，$Mo_{\mathcal{E}}(P)(L_a, L_b)$ のためにラグランジュ切断の交点を求めよう．より正確には，リフトに関する方程式 $s_{b;I_b}(x) - s_{a;I_a}(x) = 0, \quad x \in P$ の解を求める．ここで，$I_a = (a_0, \ldots, a_n)$ は

$\sum_{k=0} q_k a_k = a$ を満たす整数（負でも良い）の組で，$s_{a;I_a}(x)$ は式（3.3）で与えられるリフトを表す．いまラグランジュ切断がアファインなため，これは簡単に計算できる．特に $a = b$ の場合は，運動量凸多面体 P そのものである．$a \neq b$ の場合は，$v^j := {}^t(0, \cdots, \frac{2q_0 \cdots q_n}{q_j}, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n, j \neq i$ とおくと $P = \left\{ \sum_{j \neq i} t_j v^j \mid t_j \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \sum_{j \neq i} t_j \leq 1 \right\}$ であることに注意して，次により与えられる．

補題 4.3. $a \neq b$ とする．$\pi(L_a \cap L_b)$ の各連結成分は次の様な点から成る：

$$v_{ab:I} = \frac{1}{|b-a|} \sum_{j \neq i} (q_j k_j) v^j.$$

ここで，$I = (k_0, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{n+1}$ は $\sum_{j=0}^n q_j k_j = |b-a|$ を満たす非負整数の組である． 特に，$a, b \in \{q, \dots, q + \sum_{j=0}^n q_j - 1\}$，$a \neq b$ に対し，連結成分 $V_{ab;I} = \{v_{ab;I}\}$ は境界 ∂P に属する．

いま，順序付きの組 (L_a, L_b) とその連結成分 $V_{ab;I}$ に対して，

$$\sum_{j \neq i} (s_{a;I_a}^{ij} - s_{b;I_b}^{ij}) d\check{x}_{ik} = df_{ab;I_{ab}}, \quad f_{ab;I_{ab}}(v_{ab;I_{ab}}) = 0 \tag{4.3}$$

により一意的に定まる P 上の関数 $f_{ab;I_{ab}}$ を対応づける[*6]．このとき，$-\mathrm{grad}(f_{ab;I_{ab}})$ は

$$2\pi \left(\frac{b-a}{2q_0 \cdots q_n} x^{i0} - k_0 \right) \frac{\partial}{\partial x^{i0}} + \cdots + 2\pi \left(\frac{b-a}{2q_0 \cdots q_n} x^{in} - k_n \right) \frac{\partial}{\partial x^{in}} \tag{4.4}$$

となる．これから $-\mathrm{grad}(f_{ab;I_{ab}})$ の安定多様体 $S_{v_{ab;I_{ab}}}$ を構成し，$Mo_{\mathcal{E}}(L_a, L_b)$ の生成系が求まる．

補題 4.4. 次が成り立つ：

$$Mo_{\mathcal{E}}^p(P)(L_a, L_b) = \begin{cases} \mathbb{R}P & (a = b,\ p = 0) \\ \bigoplus_{\substack{I \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{n+1} \\ \sum_{j=0}^n q_j k_j = b-a}} \mathbb{R}V_{ab;I} & (\ a < b,\ p = 0) \\ 0 & \text{その他} \end{cases}. \tag{4.5}$$

次に積構造についてみる．$a < b < c$ とする．このとき, $-\mathrm{grad}(f_{ab:I_{ab}}), -\mathrm{grad}(f_{bc:I_{bc}}), -\mathrm{grad}(f_{ac:I_{ac}})$ に対応する勾配曲線はそれぞれ，$v_{ab;I_{ab}}$ を出発点として直線的に進むもの，$v_{bc;I_{bc}}$ を出発点として直線的に進むもの $v_{ac;I_{ac}}$，$I_{ac} := I_{ab} + I_{bc}$ にとどまり続けるもの，となることがわかる．（なお $v_{ac;I_{ac}}$ は線分 $v_{ab;I_{ab}} v_{bc;I_{bc}}$ を $c-b : b-a$ に内分する点である．）また，シンプレクティック面積は $A(\gamma) = f_{ab;I_{ab}}(v_{ac;I_{ab}+I_{bc}}) + f_{bc;I_{bc}}(v_{ac;I_{ab}+I_{bc}})$ となり，従って，次で積が定まる．

$$m_2(V_{ab;I_{ab}}, V_{bc;I_{bc}}) = e^{-\frac{1}{2\pi}(f_{ab;I_{ab}}(v_{ac;I_{ac}}) + f_{bc;I_{bc}}(v_{ac;I_{ac}}))} V_{ac;I_{ac}}. \tag{4.6}$$

また，a, b, c の関して他の大小関係の場合を見ることで，P が恒等射を与えることがわかる．

5 主定理

重み付き射影空間 $\mathbb{P}(q_), \dots, q_n)(= \mathbb{P}(Q))$，ただし $\gcd(q_0, \dots, q_n) = 1$，に対し，任意の整数 q を一つ取り連接層の導来圏 $D^b(coh(\mathbb{P}(Q)))$ の強例外的生成系 $\mathcal{E} := (\mathcal{O}(q), \dots, \mathcal{O}(q + \sum_{k=0}^n q_k - 1))$

[*6] これがモース関数となっていることに注意する．

を一つ固定する [9].（このとき，$D^b(coh(\mathbb{P}(Q))) \simeq Tr(DG_{\mathcal{E}}(\mathbb{P}(q)))$ となる.）前章までの準備のもと，主定理は以下の様に述べられる.

定理 5.1. 次の A_∞ 擬同型が存在する：

$$Mo_{\mathcal{E}}(P) \simeq \mathcal{I}(DG_{\mathcal{E}}(\mathbb{P}(Q))).$$

いま，Bondal-Kapranov[2], Kontsevich[1] らによる，捻り複体による A_∞ 圏から三角圏への構成（$Tr(\ )$ と書いているもの）により，A_∞ 擬同型な圏から同値な三角圏が構成される．従って，また，DG 同型 $\mathcal{I}(DG_{\mathcal{E}}(\mathbb{P}(Q))) \simeq DG_{\mathcal{E}}(\mathbb{P}(Q)$ を A_∞ 同型とみなすことにより，次が帰結される.

系 5.2. 次の三角圏同値が存在する：

$$Tr(Mo_{\mathcal{E}}(P)) \simeq D^b(coh(\mathbb{P}(Q))).$$

以下では定理 5.1 の証明の概略を述べる．定理の A_∞ 擬同型を構成するためには大まかに，1. それぞれ射のコホモロジーを計算して複体レベルでの擬同型を構成し，2．構成した擬同型がそれぞれの積構造に関して整合的であることを見れば良い．ここで，前章で見たように $Mo_{\mathcal{E}}(P)$ は結局高次の積が自明（つまり DG 圏となっている）なため，ここでいう積は射の合成に他ならない.

補題 5.3. $a, b \in \{q, \dots, q+\sum_{j=0}^{n} q_j - 1\}$ とする．この時，鎖複体の擬同型が存在する：

$$\iota : Mo_{\mathcal{E}}(P)(L_a, L_b) \to \mathcal{I}(DG_{\mathcal{E}}(\mathbb{P}(Q)))(\mathcal{O}(a), \mathcal{O}(b))$$

Proof. 証明の概略を述べる．$a < b$ の場合のみ述べる．連結成分 $V_{ab;I_{ab}}$ に対し式（4.3）で一意的に定まる関数 $f_{ab;I_{ab}}$ が

$$2\pi\log(2q_0\cdots q_n - \sum_{k\neq i} q_k x^{ik})^{\frac{q_i a_i}{2q_0\cdots q_n}} \prod_{k\neq i}(q_k x^{ik})^{\frac{q_k a_k}{2q_0\cdots q_n}} + \alpha$$

という形で[*7]表されることを思い出す（式 (3.4) より．ただし符号に注意せよ.）．一方，コホモロジー $H^0(\mathcal{I}(DG(\mathbb{P}(Q)))(\mathcal{O}(a), \mathcal{O}(b)))$ の代表元が式（4.2）の形で与えられていることを思い出すと，定数を $c_{ab;I_{ab}}$ を適当に取ることで次が成り立つことがわかる.

$$e^{\frac{1}{2\pi}f_{ab;I_{ab}} + \sqrt{-1}I_{ab}\check{y}} = c_{ab;I_{ab}}\psi_{ab;I_{ab}}.$$

そこで，$\mathbf{e}_{ab;I_{ab}} := c_{ab;I_{ab}}\psi_{ab;I_{ab}}$ とおき，

$$\iota : V_{ab;I_{ab}} \mapsto \mathbf{e}_{ab;I_{ab}} = e^{\frac{1}{2\pi}f_{ab;I_{ab}} + \sqrt{-1}I_{ab}\check{y}}. \tag{5.1}$$

で対応を定めるとこれが鎖写像となりコホモロジーの同型を誘導することがわかる. □

補題 5.4. $a \le b \le c$ とする．$V_{ab;I_{ab}}$，$V_{bc;I_{bc}} \in Mo_{\mathcal{E}}(P)$ に対し，次が成り立つ.

$$\iota(m_2(V_{ab;I_{ab}}, V_{bc;I_{bc}})) = \mathbf{e}_{ab;I_{ab}} \cdot \mathbf{e}_{bc;I_{bc}}. \tag{5.2}$$

[*7] 定数項は，実際は $f(v_{ab;I_{ab}}) = 0$ で定まっている.

Proof. (4.6) と (5.1) より

$$\iota(m_2(V_{ab;I_{ab}}, V_{bc;I_{bc}})) = e^{\frac{1}{2\pi}\left(f_{ab;I_{ab}}(v_{ac;I_{ac}})+f_{bc;I_{bc}}(v_{ac;I_{ac}})+f_{ac;I_{ac}}\right)+\sqrt{-1}(I_{ac})\check{y}},$$
$$\mathbf{e}_{ab;I_{ab}} \cdot \mathbf{e}_{bc;I_{bc}} = e^{-\frac{1}{2\pi}\left(f_{ab;I_{ab}}+f_{bc;I_{bc}}\right)+\sqrt{-1}I_{ac}\check{y}}$$

となっている．ここで，$I_{ac} := I_{ab} + I_{bc}$ である．いま，$df_{ac;I_{ac}} = d(f_{ab;I_{ab}} + f_{bc;I_{bc}})$ であるので，$f_{ac;I_{ac}}$ と $f_{ac;I_{ac}}$ は定数差があるが，いま $f_{ac;I_{ac}}(v_{ac;I_{ac}}) = 0$ と定めているため補題の等号が従う．他の場合は明らかである． □

References

[1] M. Kontsevich, Homological algebra of mirror symmetry. In Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Zürich, 1994), pp.120–139, Birkhäuser, Basel, 1995.

[2] A.I. Bondal and M.M. Kapranov, Enhanced triangulated categories, Math. USSR-Sb., Vol. 70, pp.93-107, 1991.

[3] A. Strominger, S.T. Yau and E. Zaslow, Mirror symmetry is T-duality, Nucl. Phys. B, Vol. 479, pp. 243–259, 1996.

[4] M. Kontsevich and Y. Soibelman, Homological mirror symmetry and torus fibrations, In Symplectic geometry and mirror symmetry (Seoul, 2000), pp. 203–263, World Scientific, 2001.

[5] M. Futaki and H. Kajiura, Homological mirror symmetry of $\mathbb{C}P^n$ and their products via Morse homotopy, J. Math. Phys., Vol. 62, No. 3, 2021.

[6] M. Futaki and H. Kajiura, Homological mirror symmetry of $\mathbb{F}_1$ via Morse homotopy, Adv. Theor. Math. Phys., Vol. 26, No.8, 2022.

[7] H. Nakanishi, Homological mirror symmetry of toric Fano surfaces via Morse homotopy, arXiv:2303.07851.

[8] H. Nakanishi, SYZ mirror of Hirzebruch surface $\mathbb{F}_k$ and Morse homotopy, arXiv:2312.01329.

[9] D. Auroux, L. Katzarkov and D. Orlov, Mirror symmetry for weighted projective planes and their noncommutative deformations, Ann. Math., Vol. 167, pp.867–943, 2008.

[10] K. Chan, Holomorphic Line Bundles on Projective Toric Manifolds from Lagrangian Sections of their Mirrors by SYZ Transformations, Int. Math. Res. Not., Vol.24, pp. 4686-4708, 2009.

[11] N.C. Leung, S.T. Yau, and E. Zaslow, From special lagrangian to Hermitian-Yang-Mills via Fourier-Mukai transform, Adv. Theor. Math. Phys., Vol.4, pp. 1319-1341, 2000.

[12] C. Boyer and K. Galicki, Sasakian geometry. 2007.

[13] W. Chen and Y. Ruan, Orbifold gromov-witten theory. arXiv preprintmath/0103156, 2001.

[14] W. Fulton, Introduction to toric varieties. No. 131. Princeton university press, 1993.

[15] D. Cox, J. Little and H. Schenck. Toric varieties. Vol. 124. American Mathematical Soc., 2011.