Quot スキームを用いた Bott 周期性の別証明とバルクエッジ対応

東京大学　大学院数理科学研究科　数理科学専攻
名取雅生 (Masaki NATORI) *

概要

K 理論の Bott 周期性と整数量子ホール効果のバルクエッジ対応の各々の別証明を与える．Bott 周期性については証明を配置空間と結びつけ, その際に代数幾何における Quot scheme を用いた．バルクエッジ対応については直接的かつより初等的な証明を与えた．

$D^2 \coloneqq \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$, $B^2 \coloneqq D^2 \setminus \partial D^2$, $S^1 \coloneqq \partial D^2$ とする．

1　イントロダクション

K 理論の Bott 周期性の証明方法は様々なものが知られている．まず, Bott により 1959 年に Morse 理論を使って初めて示された [Bot59]．その後, Atiyah–Bott により初等的な証明 [AB64] が与えられ, Atiyah により族の指数を使った証明 [Ati68] が与えられた．他にも, Atiyah–Singer の Kuiper の定理を使った証明 [AS69], MacDuff の quasifibration を使った証明 [Mac77], Harris のユニタリ行列のスペクトル分解と group completion theorem を使った簡潔な証明 [Har80] などがある．

Atiyah–Bott による証明 [AB64], Atiyah による証明 [Ati68] と我々の証明の比較を述べる．三者とも, Bott 写像 $\beta_X \colon K(X) \to K(X \times (D^2, S^1))$ の逆を構成するという方針である．Atiyah–Bott による構成では, S^2 上のベクトル束の clutching function を Laurent 多項式で近似した後, 多項式に直し, 一次式に直し, 最後に Bloch 束を取る構成でベクトル束を得ている．対して, 我々の証明では多項式から直接ベクトル束を得ていて, 一次式の場合に制限すると 2 つの構成は一致している．Atiyah による構成では clutching function の Toeplitz operator を取り, その族の指数を取って K 群の元を得ている．Atiyah は Atiyah–Bott の証明と Atiyah の証明の比較を行なっている [Ati68]．そこでは両者の構成の中間となる構成として, 多項式を $\mathbb{C}[z]$-homomorphism とみなし, その cokernel を取る構成を挙げている．我々はその構成を sheaf homomorphism として見直し, さらに多項式からベクトル束を得る操作の前段階として, 多項式からベクトル空間でラベル付けされた配置の族を得る段階 (Section 4) があることを明確にした．K-homology theory とベクトル空間でラベル付けされた配置空間との関係は Segal により明らかにされている [Seg77]．我々はベクトル空間でラベル付けされた配置空間と Bott 周期性の証明を結びつけ, その際に Quot scheme を用いた代数幾何的構成を利用

* E-mail:natori-masaki616@g.ecc.u-tokyo.ac.jp

した.

整数量子ホール効果は Klitzing–Dorda–Pepper によって 1980 年に初めて実験的に発見された [KDP80]. バルク指数は Thouless–Kohmoto–Nightingale–den-Nijs によって第一 Chern 数 (TKNN 数と呼ばれる) として導入された [TKNdN82]. 整数量子ホール効果のバルクエッジ対応は Hatsugai により 1993 年に Riemann 面を用いて初めて示された [Hat93]. その後, Kellendonk–Richter–Schulz-Baldes によって C^* 環の K 理論を用いて数学的に証明が与えられた [KRSB02]. Graf–Porta はある別のベクトル束, つまり, 特定の方向に減少するハミルトニアンの解を使ったベクトル束を構成し, それを用いてバルクエッジ対応を証明した [GP13]. Hayashi はそのベクトル束を K 理論や指数理論の観点から調べ, 指数のコボルディズム不変性を用いてバルクエッジ対応を証明した [Hay17]. 対して, 我々は, Hayashi と同じ設定のもとでより直接的かつ初等的な方法でバルクエッジ対応を証明した.

2 Bott 周期性の別証明 (主結果 1)

この節では Bott 周期性の主張を述べ, 後の Section 3, 4 を用いて別証明を与える.

Definition 2.1. (X, A) をコンパクトハウスドルフ空間とその閉部分空間の対とする. X 上のベクトル束 E, F, ベクトル束の同型 $\alpha\colon E|_A \to F|_A$ の組 (E, F, α) の同型類全体の集合を $\mathcal{K}(X, A)$ と書く. $\mathcal{K}(X, A)$ 上の同値関係 $\sim$ を以下の関係から生成されるものとする.

(1) $(E, F, \alpha), (E, F, \alpha') \in \mathcal{K}(X, A)$ に対して, $E|_A \to F|_A$ が同型であることを保って α と α' がホモトピックであるとき, $(E, F, \alpha) \sim (E, F, \alpha')$ である.

(2) $(E, F, \alpha) \in \mathcal{K}(X, A)$ と X 上のベクトル束 G に対して $(E, F, \alpha) \sim (E \oplus G, F \oplus G, \alpha \oplus \mathrm{id})$ である.

空間対 (X, A) の K **群** (K-group) を $K(X, A) \coloneqq \mathcal{K}(X, A)/{\sim}$ と定める. (E, F, α) の $K(X, A)$ における同値類を $[E, F, \alpha]$ と書く. また X の K 群を $K(X) \coloneqq K(X, \emptyset)$ と定める. X 上のベクトル束 E に対して, $[E] \coloneqq [E, 0, \emptyset] \in K(X)$ と書く.

このとき, Bott 周期性の主張は次のように書ける.

Theorem 2.2 ([AB64], [Ati68])**.** *X をコンパクトハウスドルフ空間とする. このとき, Bott 写像*

$$\beta_X\colon K(X) \to K(X \times (D^2, S^1)); [E] \mapsto [E] \boxtimes [\underline{\mathbb{C}}, \underline{\mathbb{C}}, z^{-1}] = [\mathrm{proj}_X^* E, \mathrm{proj}_X^* E, z^{-1}]$$

は同型である. ここで z は S^1 の座標, $[\underline{\mathbb{C}}, \underline{\mathbb{C}}, z^{-1}] \in K(D^2, S^1)$, $\boxtimes$ は外部テンソル積である.

Section 3, 4 を用いて証明に必要な構成を述べる.

Construction 2.3. V を有限次元複素ベクトル空間, l を非負整数とする. 各 $0 \leq j \leq l$ に対して連続写像 $a_j\colon X \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ が与えられたとする. すると, $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ 係数の多項式の連続族

$$\left\{ H_x(z) \coloneqq \sum_{j=0}^{l} a_j(x) z^j \right\}_{x \in X}$$

が得られる．任意の $x \in X$, $z \in S^1$ に対して, $H_x(z) \in \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(V)$ と仮定する．また, $\det(H_x)$ の B^2 内の根の重複度の総和は $x \in X$ に依らず定数 r だと仮定する．

$\{H_x(z)\}_{x\in X}$ は仮定より Definition 4.1 で定義される Poly_V^l を用いて連続写像 $H\colon X \to \mathrm{Poly}_{V,S^1}^{l,r}$ を定める．Theorem 4.6 より, 写像 $\mathrm{config}_{B^2}\colon \mathrm{Poly}_{V,S^1}^{l,r} \to \mathrm{Conf}_{V,B^2}^r$ は連続であり, Proposition 3.2 より, Conf_{V,B^2}^r 上のベクトル束 $\mathcal{E}_{V,B^2}^r \to \mathrm{Conf}_{V,B^2}^r$ が存在する．以上の準備により, X 上のベクトル束 $\mathrm{Bun}_X(V,H) \coloneqq \mathrm{config}(H)^*\mathcal{E}_{V,B^2}^r \to X$ が得られる．ここで, $\mathrm{config}(H)$ は $\mathrm{config}(H) \coloneqq \mathrm{config}_{B^2} \circ H\colon X \to \mathrm{Conf}_{V,B^2}^r$ とした．

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Bun}_X(V,H) \arrow[rr] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & & \mathcal{E}_{V,B^2}^r \arrow[d] \\
X \arrow[r, "H"'] & \mathrm{Poly}_{V,S^1}^{l,r} \arrow[r, "\mathrm{config}_{B^2}"'] & \mathrm{Conf}_{V,B^2}^r
\end{tikzcd}$$

Proof of Theorem 2.2. まず, $\alpha_X\colon K(X \times (D^2,S^1)) \to K(X)$ を定める．$K(X \times (D^2,S^1))$ の元は代表元として, 有限次元複素ベクトル空間 V と連続写像 $H\colon X \times S^1 \to \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(V)$ を用いて $[\underline{V}, \underline{V}, H] \in K(X \times (D^2,S^1))$ という形で取れる．さらに, H は $x \in X$ に対して, Laurent 多項式 $H_x(z) = \sum_{j=-k}^{l} a_j(x)z^j$ という形をしているとしてよい．ここで, 任意の $x \in X$ に対して, $a_j\colon X \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ は連続写像である．z^k 倍すると, 多項式の族 $(z^kH)_x(z) = \sum_{j=0}^{k+l} a_{j-k}(x)z^j$ となる．Construction 2.3 を適用すると, X 上のベクトル束 $\mathrm{Bun}_X(E, z^kH)$ が得られる．そこで, $\alpha_X([\overline{E}, \overline{F}, \overline{H}]) = \alpha_X([\mathrm{proj}_X^*E, \mathrm{proj}_X^*E, H]) \coloneqq [E^{\oplus k}] - [\mathrm{Bun}_X(E, z^kH)] \in K(X)$ と定める．これは well-defined である．

$\alpha_X\colon K(X \times (D^2,S^1)) \to K(X)$ が $\beta_X\colon K(X) \to K(X \times (D^2,S^1))$ の逆写像であることを示すためには以下の 3 つの条件を満たしていることを確認すれば十分である [Ati68]．ここでは証明は省略する．

(A1) α_X は X に関して関手的である．

(A2) α_X は $K(X)$-module homomorphism である．

(A3) $\alpha_X([\underline{\mathbb{C}}, \underline{\mathbb{C}}, z^{-1}]) = [\underline{\mathbb{C}}]$.

□

Section 3 では, 配置空間 Conf_{V,B^2}^r とその上の大域切断束 $\mathcal{E}_{V,B^2}^r \to \mathrm{Conf}_{V,B^2}^r$ を構成し, Quot scheme との関係を調べる．Section 4 では, 配置写像 $\mathrm{config}_{B^2}\colon \mathrm{Poly}_{V,S^1}^{l,r} \to \mathrm{Conf}_{V,B^2}^r$ を定義し, その連続性を調べる．行列係数の多項式から B^2 上の配置を得るこの配置写像が我々の Bott 周期性の証明において鍵となる写像である．

3　配置空間の構成

3.1　配置空間と大域切断束の構成

Definition 3.1. V を有限次元複素ベクトル空間, U を複素平面 $\mathbb{C}$ の開集合, r を非負整数とする．行列 $A \in M_r(\mathbb{C})$ と線型写像 $\iota\colon V \to \mathbb{C}^r$ が次の条件を満たすとき, (A, ι) を U 上の階数 r の V-**配置**

(V-configuration) と呼ぶ.

- A の固有値の集合 $\sigma(A)$ は U に含まれる.
- $\displaystyle\sum_{i=0}^{r-1} A^i\iota\colon V^{\oplus r} \to \mathbb{C}^r$ は全射である.

U 上の階数 r の V-配置全体のなす集合を $\widetilde{\mathrm{Conf}}^r_{V,U}$ と書く. $\widetilde{\mathrm{Conf}}^r_{V,U}$ には $M_r(\mathbb{C}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, \mathbb{C}^r)$ の部分空間としての位相が定まる. $\mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ の $M_r(\mathbb{C})$ への共役作用と $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, \mathbb{C}^r)$ への post-composition による作用により, $\widetilde{\mathrm{Conf}}^r_{V,U}$ には $\mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ の左作用が定まる.

Proposition 3.2. 左作用 $\mathrm{GL}_r(\mathbb{C}) \curvearrowright \widetilde{\mathrm{Conf}}^r_{V,U}$ は *free* かつ *proper* である. 特に, 商写像 $\widetilde{\mathrm{Conf}}^r_{V,U} \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})\backslash\widetilde{\mathrm{Conf}}^r_{V,U}$ は主 $\mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ 束であり, 商空間 $\mathrm{Conf}^r_{V,U} \coloneqq \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})\backslash\widetilde{\mathrm{Conf}}^r_{V,U}$ は $r \cdot \dim_{\mathbb{C}} V$ 次元複素多様体である. さらに, 同伴束として階数 r のベクトル束 $\mathcal{E}^r_{V,U} \coloneqq \widetilde{\mathrm{Conf}}^r_{V,U} \times_{\mathrm{GL}_r(\mathbb{C})} \mathbb{C}^r \to \mathrm{Conf}^r_{V,U}$ が得られる.

$\mathrm{Conf}^r_{V,U}$ を U 上の階数 r の **V-配置空間** (V-configuration space), $\mathcal{E}^r_{V,U} \to \mathrm{Conf}^r_{V,U}$ を $\mathrm{Conf}^r_{V,U}$ 上の**大域切断束** (global section bundle) という. $(A, \iota) \in \widetilde{\mathrm{Conf}}^r_{V,U}$ の同値類を $[A, \iota] \in \mathrm{Conf}^r_{V,U}$ と書く.

3.2 Quot scheme との比較

この節では, $\mathrm{Conf}^r_{V,\mathbb{C}}$ と代数幾何学における Quot scheme の比較を行う.

Definition 3.3. $Sch_{\mathbb{C}}$ を $\mathrm{Spec}\mathbb{C}$ 上の locally noetherian schemes のなす圏とする. r を非負整数とする. E を $\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$ 上の連接層とする. 反変関手 $\mathfrak{Quot}^r_{E,\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}}\colon Sch^{\mathrm{op}}_{\mathbb{C}} \to Set$ を以下のように定める. $T \to \mathrm{Spec}\mathbb{C}$ に対して, 対 $(\mathcal{F}, q)$ であって以下を満たすものを T **でパラメトライズされた E の商の族** (family of quotients of E parametrized by T) と呼ぶ.

(1) $\mathcal{F}$ は $\mathbb{A}^1_T$ 上の coherent sheaf であって, $\mathcal{F}$ のサポートは T 上 proper であり, $\mathcal{F}$ は T 上 flat である.

(2) $q\colon E_T \to \mathcal{F}$ は surjective $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_T}$-linear homomorphism である. ここで, E_T は E の射影 $\mathbb{A}^1_T \to \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$ による引き戻しである.

(3) 任意の $t \in T$ に対して, $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}|_{(\mathbb{A}^1_T)_t}$ の Hilbert 多項式は定数 r である.

$\mathfrak{Quot}^r_{E,\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}}(T)$ を T でパラメトライズされた E の商の族の同型類のなす集合と定める.

Fact 3.4 ([Nit05])**.** 関手 $\mathfrak{Quot}^r_{E,\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}}$ は表現可能である.

関手 $\mathfrak{Quot}^r_{E,\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}}$ の表現対象を $\mathrm{Quot}^r_{E,\mathbb{A}^r_{\mathbb{C}}}$ と書く.

Proposition 3.5 ([Ric17])**.** V を有限次元複素ベクトル空間とする. $\mathrm{Quot}^r_{\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}} \otimes V, \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}}$ の *analytification* と $\mathrm{Conf}^r_{V,\mathbb{C}}$ は同相である.

4　配置写像の構成と連続性

4.1　配置写像の定義

V を d 次元複素ベクトル空間, $l, r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とする．また, γ を $\mathbb{C}$ 内の単純閉曲線, D_γ を $\mathbb{C} \setminus \gamma$ の 2 つの連結成分のうち有界な方とする．

Definition 4.1. $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ 係数 l 次多項式全体の集合を Poly_V^l と書く．Poly_V^l には $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)^{\times(l+1)}$ から自然に位相が定まる．l 次の係数が可逆である元のなす Poly_V^l の部分空間を $\mathrm{Poly}_V^{l,inv}$ と書く．また, $f(z) \in \mathrm{Poly}_V^l$ であって,「$\forall\lambda \in \gamma, f(\lambda) \in \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(V)$」を満たすもののうち, $\det f(z)$ の D_γ に含まれる零点の位数の和が r であるもののなす Poly_V^l の部分空間を $\mathrm{Poly}_{V,\gamma}^{l,r}$ と書く．

配置写像 $\mathrm{config}_{\mathbb{C}} \colon \mathrm{Poly}_V^{l,inv} \to \mathrm{Conf}_{V,\mathbb{C}}^{dl}$ を以下で定める．$f(z) \in \mathrm{Poly}_V^{l,inv}$ とする．$\mathcal{O}_{\mathbb{C}}(-;V)$ を $\mathbb{C}$ 上の V に値を取る正則関数のなす層とする．$\widetilde{f} \colon \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(-;V) \to \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(-;V)$ を, $\mathbb{C}$ の開集合 U と切断 $s \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(U;V)$ に対して $\widetilde{f}(U)(s)(z) \coloneqq f(z)s(z)$ により定める．すると, $\widetilde{f}$ は単射である．よって, 以下の短完全列が得られる．

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(-;V) \xrightarrow{\widetilde{f}} \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(-;V) \longrightarrow \mathrm{Coker}\,\widetilde{f} \longrightarrow 0$$

Lemma 4.2. $\mathrm{Coker}\,\widetilde{f}$ のサポートは有限集合であり, 任意の $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して, $\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Coker}\,\widetilde{f}_\lambda < \infty$ である．さらに, $\dim_{\mathbb{C}} H^0(\mathrm{Coker}\,\widetilde{f}) = dl$ である．

Lemma 4.3. 自然な射影 $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}(-;V) \to \mathrm{Coker}\,\widetilde{f}$ が H^0 に誘導する射 $\pi \colon \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C};V) \to H^0(\mathrm{Coker}\,\widetilde{f})$ は全射である．

Lemma 4.3 より以下の系列は完全であり, Lemma 4.2 より $H^0(\mathrm{Coker}\,\widetilde{f}) \cong \mathbb{C}^{dl}$ である．同型を 1 つ固定して $\varphi \colon H^0(\mathrm{Coker}\,\widetilde{f}) \to \mathbb{C}^{dl}$ とおく．

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C};V) \xrightarrow{\widetilde{f}(\mathbb{C})} \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C};V) \xrightarrow{\pi} H^0(\mathrm{Coker}\,\widetilde{f}) \longrightarrow 0$$

$\mathcal{O}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C};V)$ 上の掛け算作用素 z について, $\widetilde{f}$ と z は可換なので $z \colon \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C};V) \to \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C};V)$ は $\overline{z} \colon H^0(\mathrm{Coker}\,\widetilde{f}) \to H^0(\mathrm{Coker}\,\widetilde{f})$ を誘導する．$A(f) \coloneqq \varphi \circ \overline{z} \circ \varphi^{-1} \in M_r(\mathbb{C})$ と定める．定数関数を返す写像 $\mathrm{const.} \colon V \to \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C};V)$ を用いて, $\iota(f) \coloneqq \varphi \circ \pi \circ \mathrm{const.} \colon V \to \mathbb{C}^{dl}$ と定める．

Definition 4.4. **配置写像** (configuration map) $\mathrm{config}_{\mathbb{C}} \colon \mathrm{Poly}_V^{l,inv} \to \mathrm{Conf}_{V,\mathbb{C}}^{dl}$ を $\mathrm{config}_{\mathbb{C}}(f(z)) \coloneqq [A(f), \iota(f)]$ により定める．

また, 配置写像 $\mathrm{config}_{D_\gamma} \colon \mathrm{Poly}_{V,\gamma}^{l,r} \to \mathrm{Conf}_{V,D_\gamma}^{r}$ を $\mathrm{config}_{\mathbb{C}}$ と同様の方法で定める．ただし, $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}(-;V)$ の代わりに $\mathcal{O}_{D_\gamma}(-;V) \coloneqq \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(-;V)|_{D_\gamma}$ を用いる．

4.2　配置写像の連続性

配置写像について以下の 2 つの命題が成り立つ．

Theorem 4.5. 配置写像 $\mathrm{config}_{\mathbb{C}}\colon \mathrm{Poly}_V^{l,inv} \to \mathrm{Conf}_{V,\mathbb{C}}^{dl}$ は連続である．

Theorem 4.6. γ を $\mathbb{C}$ 内の単純閉曲線とする．このとき, 配置写像 $\mathrm{config}_{D_\gamma}\colon \mathrm{Poly}_{V,\gamma}^{l,r} \to \mathrm{Conf}_{V,D_\gamma}^{r}$ は連続である．

Theorem 4.5 の証明の方針について述べる．まず, $\mathrm{Poly}_V^{l,inv}$ に対応するスキームを準備する．

Definition 4.7. 可換環 P_d^l を $P_d^l \coloneqq \mathbb{C}[\{X_{ij}^{(k)}\}_{1\le i,j\le d, 0\le k\le l}, T]/(T\cdot\det(X_{ij}^{(l)})-1)$ と定める．

$\mathrm{Spec}P_d^l$ の analytification と $\mathrm{Poly}_{\mathbb{C}^d}^{l,inv}$ は同相である．

l 次の係数が可逆である $M_d(P_d^l)$ 係数 l 次多項式 $F(z)$ を $F(z) \coloneqq (X_{ij}^{(l)})z^l + (X_{ij}^{(l-1)})z^{l-1} + \cdots + (X_{ij}^{(0)})$ と定める．$F(z)$ は層の準同型 $\widetilde{F}\colon \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_{P_d^l}}^d \to \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_{P_d^l}}^d$ を定める．$\widetilde{F}$ は injective なので, cokernel を取って, 短完全列

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_{P_d^l}}^d \xrightarrow{\widetilde{F}} \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_{P_d^l}}^d \xrightarrow{q} \mathrm{Coker}\,\widetilde{F} \longrightarrow 0$$

が得られる．

Proposition 4.8. $[\mathrm{Coker}\,\widetilde{F}, q] \in \mathfrak{Quot}_{\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}}^d, \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}}^{dl}(\mathrm{Spec}P_d^l)$ である．

Proof of Theorem 4.5. Proposition 4.8 より, scheme の射 $\mathrm{Spec}P_d^l \to \mathrm{Quot}_{\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}}^d, \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}}^{dl}$ が定まる．analytification を取ることにより連続写像 $\mathrm{Poly}_{\mathbb{C}^d}^{l,inv} \to \mathrm{Conf}_{\mathbb{C}^d,\mathbb{C}}^{dl}$ が定まり, 構成よりこれは $\mathrm{config}_{\mathbb{C}}\colon \mathrm{Poly}_{\mathbb{C}^d}^{l,inv} \to \mathrm{Conf}_{\mathbb{C}^d,\mathbb{C}}^{dl}$ と一致する． □

5 バルクエッジ対応の設定と指数の定義

X を向き付けられた滑らかな n 次元閉多様体, E を X 上の階数 d の複素ベクトル束とする．各 $x \in X$ に対して有界線形作用素

$$H_x\colon l^2(\mathbb{Z}; E_x) \to l^2(\mathbb{Z}; E_x)$$

が与えられているとする．$H \coloneqq \{H_x\}_{x\in X}$ と書く．H_x は $x \in X$ に依らない $k, l \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$ を用いて $H_x = \sum_{j=-k}^{l} a_j(x) S^j$ と表せると仮定する．ここで, $S\colon l^2(\mathbb{Z}; E_x) \to l^2(\mathbb{Z}; E_x)$ は $S((v_i)_i) = (v_{i-1})_i$ を満たすシフト作用素とする．また, $-k \le j \le l$ に対して, a_j は複素ベクトル束 $\mathrm{End}(E) \to X$ の連続切断 $a_j\colon X \to \mathrm{End}(E)$ であるとする．さらに, $\mathbb{C}$ 内の単純閉曲線 γ であって, 任意の $x \in X$ に対して $\sigma(H_x)$ を H_x のスペクトルとしたときに, $\sigma(H_x) \cap \gamma = \emptyset$ を満たすものが与えられていると仮定する．

5.1 バルク指数の定義

Fourier 変換により H_x に対応する $\widehat{H}_x\colon L^2(S^1; E_x) \to L^2(S^1; E_x)$ を考える．S^1 の座標を z とすると, $\widehat{H}_x = \sum_{j=-k}^{l} a_j(x) z^j$ である．複素ベクトル束 $\mathrm{proj}_X^* E \to X \times S^1$ の部分束 E_{bulk} を次のよう

に定める．各 $x \in X$, $z \in S^1$ ごとに $(\mathrm{proj}_X^* E)_{x,z} = E_x$ 上の射影

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (\lambda \cdot \mathrm{id} - \widehat{H}_x(z))^{-1} d\lambda$$

を考え, その像の定める $\mathrm{proj}_X^* E$ の部分束を E_{bulk} とする．E_{bulk} の $x \in X$, $z \in S^1$ におけるファイバーは γ の内側に含まれる $\widehat{H}_x(z)$ の固有値に対応する広義固有空間の直和と一致する．

Definition 5.1. $\{H_x\}_{x\in X}$ の**バルク指数** (bulk index) $\mathrm{ind}^b(E, H)$ を

$$\mathrm{ind}^b(E, H) \coloneqq -\int_{X\times S^1} ch([E_{\mathrm{bulk}}])$$

と定める．

5.2 エッジ指数の定義

$P_{\geq 0}\colon l^2(\mathbb{Z}; E_x) \to l^2(\mathbb{Z}_{\geq 0}; E_x)$ を射影作用素とする．$P_{\geq 0}$ の随伴作用素 $P_{\geq 0}^*\colon l^2(\mathbb{Z}_{\geq 0}; E_x) \to l^2(\mathbb{Z}; E_x)$ は

$$P_{\geq 0}^*((v_i)_i) \coloneqq (w_i)_i, \quad \text{where} \quad w_i = \begin{cases} 0 & i < 0 \text{ のとき} \\ v_i & i \geq 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

で与えられる．各 $x \in X$, $\lambda \in \gamma$ に対して,

$$(H_x - \lambda)^{\#} \coloneqq P_{\geq 0}(H_x - \lambda)P_{\geq 0}^*\colon l^2(\mathbb{Z}_{\geq 0}; E_x) \to l^2(\mathbb{Z}_{\geq 0}; E_x)$$

と定める．

Lemma 5.2. $\{(H_x - \lambda)^{\#}\}_{x,\lambda}$ は *Fredholm* 作用素の連続族である．

Proof. $x \in X$, $\lambda \in \gamma$ に対して, $H_x - \lambda$ は可逆なので特に Fredholm である．$(H_x - \lambda) - (P_{\geq 0}(H_x - \lambda)P_{\geq 0}^* \oplus P_{<0}(H_x - \lambda)P_{<0}^*)$ は finite rank operator なので特に $(P_{\geq 0}(H_x - \lambda)P_{\geq 0}^* \oplus P_{<0}(H_x - \lambda)P_{<0}^*)$ は Fredholm であり, $(H_x - \lambda)^{\#} = P_{\geq 0}(H_x - \lambda)P_{\geq 0}^*$ はその直和因子なので Fredholm である． □

Definition 5.3. $\mathrm{ind}H^{\#} \coloneqq \mathrm{ind}(\{(H_x - \lambda)^{\#}\}_{x\in X, \lambda\in\gamma}) \in K(X \times \gamma)$ とする．$\{H_x\}_{x\in X}$ の**エッジ指数** (edge index) $\mathrm{ind}^e(E, H)$ を

$$\mathrm{ind}^e(E, H) \coloneqq \int_{X\times\gamma} ch(\mathrm{ind}H^{\#})$$

と定める．

6 バルクエッジ対応の別証明 (主結果 2)

Theorem 6.1. *Section 5* における設定のもとで,

$$\mathrm{ind}^b(E, H) = -\mathrm{ind}^e(E, H)$$

である．

Proof. $\overline{D_\gamma}$ を $\mathbb{C}\setminus\gamma$ の 2 つの連結成分のうち有界な方と γ の和集合とする.

$$\beta_1\colon K(X\times S^1)\to K(X\times S^1\times(\overline{D_\gamma},\gamma))$$
$$\beta_2\colon K(X\times\gamma)\to K(X\times(D^2,S^1)\times\gamma)$$

をそれぞれ Bott 写像 (Section 2) とする．双正則写像で $(\overline{D_\gamma},\gamma)$ を (D^2,S^1) に置き換えて考えることにより, β_1 が定まる．各 $x\in X$, $z\in S^1$, $\lambda\in\gamma$ に対して $\widehat{H}_x(z)-\lambda\in\mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(E_x)$ である．よって,

$$[\mathrm{proj}_X^*E,\mathrm{proj}_X^*E,\{\widehat{H}_x(z)-\lambda\}_{x,z,\lambda}]\in K(X\times S^1\times(\overline{D_\gamma},\gamma))$$
$$[\mathrm{proj}_X^*E,\mathrm{proj}_X^*E,\{\widehat{H}_x(z)-\lambda\}_{x,z,\lambda}]\in K(X\times(D^2,S^1)\times\gamma)$$

である．それぞれ u, v とおく．[AB64], [Ati68] より, それぞれ

$$\beta_1^{-1}(u)=-[E_{\mathrm{bulk}}]\in K(X\times S^1)$$
$$\beta_2^{-1}(v)=\mathrm{ind}H^{\#}\in K(X\times\gamma)$$

である．よって,

$$\begin{aligned}
\mathrm{ind}^b(E,H)+\mathrm{ind}^e(E,H)&=-\int_{X\times S^1}ch([E_{\mathrm{bulk}}])+\int_{X\times\gamma}ch(\mathrm{ind}H^{\#})\\
&=\int_X\left(\int_{S^1}ch(\beta_1^{-1}(u))+\int_\gamma ch(\beta_2^{-1}(v))\right)\\
&=\int_X\left(\int_{S^1}\int_{\overline{D_\gamma}}ch(u)+\int_\gamma\int_{D^2}ch(v)\right)
\end{aligned}$$

となる．$T\coloneqq S^1\times\overline{D_\gamma}\cup_{S^1\times\gamma}D^2\times\gamma=\partial(D^2\times\overline{D_\gamma})$ とおくと, $K(X\times S^1\times(\overline{D_\gamma},\gamma))\oplus K(X\times(D^2,S^1)\times\gamma)\cong K(X\times(T,S^1\times\gamma))$ である．$(u,v)\in K(X\times S^1\times(\overline{D_\gamma},\gamma))\oplus K(X\times(D^2,S^1)\times\gamma)$ に対応するのは $[\mathrm{proj}_X^*E,\mathrm{proj}_X^*E,\{\widehat{H}_x(z)-\lambda\}_{x,z,\lambda}]\in K(X\times(T,S^1\times\gamma))$ である．したがって,

$$\begin{aligned}
\int_X\left(\int_{S^1}\int_{\overline{D_\gamma}}ch(u)+\int_\gamma\int_{D^2}ch(v)\right)&=\int_X\int_T ch([\mathrm{proj}_X^*E,\mathrm{proj}_X^*E,\{\widehat{H}_x(z)-\lambda\}_{x,z,\lambda}])\\
&=\int_X\int_T ch([\mathrm{proj}_X^*E]-[\mathrm{proj}_X^*E])=0
\end{aligned}$$

より, $\mathrm{ind}^b(E,H)=-\mathrm{ind}^e(E,H)$ が従う．2 つ目の等号で以下の可換図式を用いた.

$$\begin{tikzcd}
K(X\times(T,S^1\times\gamma)) \arrow[r, "ch"] \arrow[d] & H^{2*}(X\times(T,S^1\times\gamma);\mathbb{R}) \arrow[d]\\
K(X\times T) \arrow[r, "ch"] & H^{2*}(X\times T;\mathbb{R})
\end{tikzcd}$$

□

参考文献

[AB64] Michael Atiyah and Raoul Bott. On the periodicity theorem for complex vector bundles. *Acta Math.*, 112:229–247, 1964.

[AS69] M. F. Atiyah and I. M. Singer. Index theory for skew-adjoint Fredholm operators. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (37):5–26, 1969.

[Ati68] Michael Atiyah. Bott periodicity and the index of elliptic operators. *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)*, 19:113–140, 1968.

[Bot59] Raoul Bott. The stable homotopy of the classical groups. *Ann. of Math. (2)*, 70:313–337, 1959.

[GP13] Gian Michele Graf and Marcello Porta. Bulk-edge correspondence for two-dimensional topological insulators. *Comm. Math. Phys.*, 324(3):851–895, 2013.

[Har80] Bruno Harris. Bott periodicity via simplicial spaces. *J. Algebra*, 62(2):450–454, 1980.

[Hat93] Yasuhiro Hatsugai. Chern number and edge states in the integer quantum hall effect. *Phys. Rev. Lett.*, 71:3697–3700, Nov 1993.

[Hay17] Shin Hayashi. Bulk-edge correspondence and the cobordism invariance of the index. *Rev. Math. Phys.*, 29(10):1750033, 31, 2017.

[KDP80] K. v. Klitzing, G. Dorda, and M. Pepper. New method for high-accuracy determination of the fine-structure constant based on quantized hall resistance. *Phys. Rev. Lett.*, 45:494–497, Aug 1980.

[KRSB02] J. Kellendonk, T. Richter, and H. Schulz-Baldes. Edge current channels and Chern numbers in the integer quantum Hall effect. *Rev. Math. Phys.*, 14(1):87–119, 2002.

[Mac77] Dusa MacDuff. Configuration spaces. In *K-theory and operator algebras (Proc. Conf., Univ. Georgia, Athens, Ga., 1975)*, volume Vol. 575 of *Lecture Notes in Math.*, pages 88–95. Springer, Berlin-New York, 1977.

[Nit05] Nitin Nitsure. Construction of Hilbert and Quot schemes. In *Fundamental algebraic geometry*, volume 123 of *Math. Surveys Monogr.*, pages 105–137. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.

[Ric17] Andrea T. Ricolfi. Motivic classes of noncommutative quot schemes, arXiv preprint arXiv:2303.10617.

[Seg77] Graeme Segal. K-homology theory and algebraic K-theory. In *K-theory and operator algebras (Proc. Conf., Univ. Georgia, Athens, Ga., 1975)*, volume Vol. 575 of *Lecture Notes in Math.*, pages 113–127. Springer, Berlin-New York, 1977.

[TKNdN82] D. J. Thouless, M. Kohmoto, M. P. Nightingale, and M. den Nijs. Quantized hall conductance in a two-dimensional periodic potential. *Phys. Rev. Lett.*, 49:405–408, Aug 1982.