Combinatorics of Symmetric Hypermatrices and Weighted Hypergraphs

名古屋大学大学院　多元数理科学研究科　多元数理科学専攻
成田　知将 (Kazumasa NARITA) *

概要

各辺に重みが付いた, n 個の頂点からなる一様ハイパーグラフを考える．このとき各頂点 v_j には重み付き次数 d_j が定まり，したがって非負実数の有限列 $(d_1, \ldots, d_n)$ を得る．本小論では, 非負実数の有限列が与えられたとき, その列を重み付き次数の列として実現するような一様ハイパーグラフが存在するための必要十分条件を与える．これは Hakimi [5] による定理の一般化である．本小論は [8] に基づく.

1　導入

1.1　用語

$V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ を有限集合とし, d は 2 以上の自然数とする．V の部分集合たち $e_1, \ldots, e_m$ は $|e_i| = d$ をみたすとする．$E := \{e_i \mid i = 1, \ldots, m\}$ とする．組 (V, E) を d **一様ハイパーグラフ (*d*-uniform hypergraph)** といい[*1], V の各元を**頂点**, E の各元を**辺**という[*2]．特に, 2 一様ハイパーグラフはグラフに他ならない．d 一様ハイパーグラフが**単純** であるとは, $E = \{e_i \mid i = 1, \ldots, m\}$ が同じ辺を含まないことをいう．すなわち, 異なる $1 \leq i, j \leq m$ について $e_i \neq e_j$ が成り立つことをいう．単純な 2 一様グラフは, 単純グラフに他ならない．単純でない d 一様ハイパーグラフが与えられたとき, 適当に辺を削除することで単純な d 一様ハイパーグラフが得られる．**以後, 単純な d 一様ハイパーグラフについてのみ考える**.

(V, E) に対し, 頂点 v_i における**次数** $\overline{d}_i$ を, v_i を含む辺の数として定める．非負整数の列 $\overline{D} := (\overline{d}_1, \ldots, \overline{d}_n)$ を**次数列**という．ここで, $n := |V|$. 頂点のナンバリングを適当に付け直すことで, $\overline{D}$ は非増大列, すなわち $\overline{d}_1 \geq \cdots \geq \overline{d}_n$ をみたすと仮定してよい.

一方, (V, E) に対し, 非負値関数 $w : E \to \mathbf{R}_{\geq 0}$ を考える．この w を **(辺上の) 重み (関数)** といい, (V, E, w) を**重み付きハイパーグラフ**という．重み付きハイパーグラフ (V, E, w) の頂点 v_i における**重みつき次数** d_i を,

$$d_i := \sum_{v_i \in e_j} w(e_j)$$

* E-mail:m19032e@math.nagoya-u.ac.jp

*1 本小論では, 訳語が一般的でない恐れがあるとき, 英語を付記する.

*2 頂点をノード, 辺をハイパーエッジと呼ぶ人もいる.

によって定める．重み付き次数を考える際には, $w(e_j)=0$ となる e_j は, 元から存在しないものとみなせる．非負実数の列 $D := (d_1, \ldots, d_n)$ を**重み付き次数列**という．頂点のナンバリングを適当に付け直すことで, $d_1 \geq \cdots \geq d_n$ が成り立つと仮定してよい．(V, E) に対し, その次数列 $\overline{D}$ は, 任意の $e \in E$ に対して $w(e) = 1$ となるような重み w についての重み付き次数列に他ならない．

1.2　先行研究と主定理

上の小節において, 単純な d 一様ハイパーグラフ (V, E) に対し, 次数列 $\overline{D}$ を定めた．非負整数の有限列が, ある単純な d 一様ハイパーグラフ (V, E) の次数列として実現するとき, d-**graphic** という．非負整数の有限列が d-graphic であるための条件を求めることは自然な問いであり, 長年にわたって研究されてきた．Havel [6] と Hakimi [5] は独立に, 非負整数の有限列が 2-graphic であるための条件を与えた．現在では少なくとも 7 つの, 互いに同値な 2-graphic な有限列の特徴付けが与えられている [7]．一方で, Dewdney [3] は Havel と Hakimi による特徴付けを一般化し, 次を得た:

定理 1.1. ([3]) d を 2 以上の自然数とし, n を $n \geq d$ をみたす自然数とする．$\overline{D} = (\overline{d}_1, \ldots, \overline{d}_n)$ を非負整数の非増大列とする．このとき, $\overline{D}$ が d-graphic であるための必要十分条件は, 次のすべての条件をみたす非負整数の非増大列 $\overline{D}' = (\overline{d}'_2, \ldots, \overline{d}'_n)$ が存在することである:

(1) $\overline{D}'$ は $(d-1)$-graphic.

(2) $\sum_{i=2}^{n} \overline{d}'_i = (d-1)\overline{d}_1$.
(3) $\overline{D}'' := (\overline{d}_2 - \overline{d}'_2, \ldots, \overline{d}_n - \overline{d}'_n, 0)$ は d-graphic.

2-graphic な列の特徴付けが多く存在することは先に述べたとおりであるが, 3 以上の d に対しては, d-graphic な列の特徴付けは現在 Dewdney の定理しか知られていない．また, Dewdney の定理は効率的なアルゴリズムではない．したがって, d-graphic な列の特徴付けは現在まで盛んに研究が続けられている．(例えば, [1], [2], [4] などを参照されたい.)

一方, Hakimi [5] は 2-graphic な列の特徴付けだけでなく, 非負実数の有限列がある重み付き単純グラフの重み付き次数列であるための必要十分条件も与えた．本小論における主定理は, 筆者が [8] において示した次の定理である:

定理 1.2. ([8]) d を 2 以上の自然数とし, n を $n \geq d$ をみたす自然数とする．$D = (d_1, \ldots, d_n)$ を非負実数の非増大列とする．このとき, D を重み付き次数列とするような d 一様重み付きハイパーグラフが存在するための必要十分条件は, D が不等式

$$dd_1 \leq \sum_{i=1}^{n} d_i \tag{1.1}$$

をみたすことである．さらに, D がこの不等式をみたすとき, $w(e) > 0$ をみたす辺 e の数が高々 n 個しかないような, D を重み付き次数列とする d 一様重み付きハイパーグラフが存在する．

上の定理の前半において $d = 2$ を代入したものが, Hakimi により得られていた特徴付けに他ならない．したがって, 上の主定理の前半は Hakimi の定理の一般化である．また, 主定理の後半により,

より強い主張になっている.

注 1.3. ([8]) 非負整数の非増大列 $\overline{D}=(\overline{d}_1,\ldots,\overline{d}_n)$ が d-graphic ならば, $\overline{D}$ は不等式 (1.1) をみたす. 実際, $\overline{D}$ が d-graphic ならば, Dewdney の定理 (定理 1.1) における $\overline{D}'$ が存在し,

$$d\overline{d}_1=\overline{d}_1+\sum_{i=2}^{n}\overline{d}_i'\leq\overline{d}_1+\sum_{i=2}^{n}\overline{d}_i=\sum_{i=1}^{n}\overline{d}_i$$

が成り立つ. ここで, 左の等号において条件 (2) を用い, 中央の不等号において条件 (3) を用いた. 前述したように次数列は, 任意の辺に対して重み 1 を付けた重み付きハイパーグラフの重み付き次数列であるから, d-graphic な $\overline{D}$ が不等式 (1.1) をみたすことは当然成り立つべきことである.

2 主定理の証明

2.1 主定理の証明の準備 1: majorization

ベクトル $x=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbf{R}^n$ に対し, 成分のナンバリングを $x=(x_{[1]},\ldots,x_{[n]})$ と付け替えて $x_{[1]}\geq\cdots\geq x_{[n]}$ が成り立つようにする. 2 つのベクトル $x,y\in\mathbf{R}^n$ が

$$\sum_{i=1}^{k}x_{[i]}\leq\sum_{i=1}^{k}y_{[i]}\quad\text{for all}\quad 1\leq k\leq n-1$$

および

$$\sum_{i=1}^{n}x_i=\sum_{i=1}^{n}y_i,$$

をみたすとき, x **は** y **によって majorize される** (x is **majorized** by y) といい, $x\preceq y$ と表す. ベクトル $\tilde{x}\in\mathbf{R}^n$ が $x\in\mathbf{R}^n$ の成分の並び替えによって得られるとき, $\tilde{x}$ は x の **permutation** であるという. (詳細については, 例えば [11, Section 3.2] を参照されたい.)

ベクトル $w\in\mathbf{R}^n$ が $v_1,\ldots,v_m\in\mathbf{R}^n$ の**凸結合**であるとは, $w=\sum_{j=1}^{m}a_jv_j$ をみたす $\{a_j\mid a_j\geq 0,\sum_{j=1}^{m}a_j=1\}_{j=1}^{m}$ が存在することをいう. Rado [9] は, $x,y\in\mathbf{R}^n$ に対し, x が y によって majorize されるための必要十分条件は, x が y の permutations の凸結合であることを示した. 一般に, $y\in\mathbf{R}^n$ は $n!$ 個の permutation を持つ. Zhan [10] はカラテオドリの定理を使うことで, 凸結合に現れる permutation の数は n 個以下に減らせることを示した. すなわち, 次を示した:

定理 2.1. ([9], [10]) 2 つのベクトル $x,y\in\mathbf{R}^n$ に対し, x が y によって majorize されるための必要十分条件は, x が y の高々 n 個の permutations の凸結合として書けることである.

2.2 主定理の証明の準備 2: 対称ハイパー行列

グラフは図示すると見やすいものの, 実際の計算・アルゴリズムにおいては, そのグラフに（何かしらの意味で）対応するグラフを考え, 計算を実行することになる. この小節では, 重み付き d 一様

ハイパーグラフとハイパー行列の対応を与え, 主定理 (定理 1.2) をハイパー行列についての主張に書き換える.

$\mathbf{N}$ を正の整数全体がなす集合とする. 整数 $n \in \mathbf{N}$ に対し, $\langle n \rangle := \{1, 2, \dots, n\}$ とおく. $d \in \mathbf{N}$ とする. 正の整数 $n_1, \dots, n_d$ に対し, 関数 $A : \langle n_1 \rangle \times \cdots \times \langle n_d \rangle \to \mathbf{R}$ を **(実)d ハイパー行列 (a (real) d-hypermatrix)** という. 2 ハイパー行列は通常の行列に他ならない. 値 $A(i_1, \dots, i_d)$ を**成分**という. 本小論では, $n_1 = \cdots = n_d = n$ の場合のみ考える. 1 つのインデックス i_k を l に固定すると, 集合 $\{A(i_1, \dots, i_{k-1}, l, i_{k+1}, \dots, i_d) \mid i_1, \dots i_{k-1}, i_{k+1}, \dots, i_d \in \langle n \rangle\}$ が得られる. この集合を, $i_k = l$ に関する**スライス (slice)** という. スライスそのものが $(d-1)$ ハイパー行列とみなせる. 各 $k \in \langle n \rangle$ に対し,

$$I_k := \left\{(k, i_2, \dots, i_d) \in \langle n \rangle^d \mid i_2 < \cdots < i_d, \quad i_2, \dots, i_d \in \langle n \rangle \setminus \{k\}\right\}$$

とおく.

d ハイパー行列 A の成分がすべて非負のとき, A は**非負**であるという. $\mathfrak{S}_d$ を d 次対称群とする. d ハイパー行列 A が任意の $(i_1, \dots, i_d) \in \langle n \rangle^d$ および任意の $\pi \in \mathfrak{S}_d$ に対し,

$$A(i_{\pi(1)}, \dots, i_{\pi(d)}) = A(i_1, \dots, i_d)$$

をみたすとき, A は**対称**であるという. d ハイパー行列 A が *strongly hollow* であるとは, 次の条件をみたすことをいう: 成分 $A(i_1, \dots, i_d)$ が同じインデックスを持つ, すなわち $i_k = i_l$ $(k \neq l)$ となる $k \neq l$ が存在するならば, $A(i_1, \dots, i_d) = 0$. 特に, strongly hollow な 2 ハイパー行列とは, 対角成分がすべて 0 であるような, 通常の正方行列のことである. なお, この “strongly hollow” という呼び名は, 筆者が [8] において導入したものである. $n \geq d$ とすると, 非負で対称な strongly hollow d ハイパー行列は一般に, $\binom{n}{d} \cdot d!$ 個の正の成分を持つことに注意されたい.

$R = (r_1, \dots, r_n)$ を $r_1 \geq \cdots \geq r_n \geq 0$ をみたす $\mathbf{R}^n$ の元とする. $i_1 = j$ $(j \in \langle n \rangle)$ に関するスライスのすべての成分の和が r_j に等しいような, 非負で対称な strongly hollow d ハイパー行列全体がなす集合を $\mathcal{N}_0(d; R)$ と書くことにする. いま, 対称なハイパー行列を考えているので, 上の定義における i_1 は任意の i_k に置き換えてよい. 非負で対称な strongly hollow d ハイパー行列 A が $\mathcal{N}_0(d; R)$ に属することの必要十分条件は, 各 $k \in \langle n \rangle$ に対し,

$$(d-1)! \sum_{\mathbf{i} \in I_k} A(\mathbf{i}) = r_k \tag{2.1}$$

が成り立つことである.

集合 $\mathcal{N}_0(d; R)$ は一般に空集合である. 例えば, $n = 1$, $R = (1)$ のとき明らかに $\mathcal{N}_0(d; R)$ は空集合である. また, 例えば $n = 2$, $R = (2, 1)$ の場合も $\mathcal{N}_0(d; R)$ が空集合であることが容易にわかる. よって, $\mathcal{N}_0(d; R)$ が空集合でないための必要十分条件を求めることは自然な問いである. そして, 実はその条件を与える定理は主定理 (定理 1.2) と対応している. 以下, そのことについて説明する.

非負で対称な strongly hollow d ハイパー行列 A に対し, 次のようにして重み付き d 一様ハイパーグラフ (V, E, w) を対応させることができる:

$$V = \{v_1, \dots, v_n\},$$

$$E = \{e_{i_1 \cdots i_d} := \{v_{i_1}, \dots, v_{i_d}\} \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_d \leq n\},$$

$$w(e_{i_1\cdots i_d}) = A(i_1, \dots, i_d).$$

とおく．このとき, 組 (V, E, w) は重み付き d 一様ハイパーグラフになる．逆に, 与えられた重み付き d 一様ハイパーグラフ (V, E, w) に対し, 必要なら重み 0 の辺を加えることで, 非負で対称な strongly hollow d ハイパー行列 A を対応させることができる．$i_1 = j$ に関するスライスのすべての成分の和が $r_j \geq 0$ に等しいような非負で対称な strongly hollow d ハイパー行列 A を考える．このとき, 上の対応によって対応する重み付き d 一様ハイパーグラフ (V, E, w) は

$$d_j = \frac{r_j}{(d-1)!}$$

をみたす．したがって, 主定理 (定理 1.2) は次のように書き換えられる:

定理 2.2. d, n を $d \geq 2$ and $n \geq d$ をみたす自然数とする．$R = (r_1, \dots, r_n)$ を $r_1 \geq \cdots \geq r_n \geq 0$ をみたす $\mathbf{R}^n$ の元とする．このとき, 集合 $\mathcal{N}_0(d; R)$ が空でないための必要十分条件は

$$dr_1 \leq \sum_{i=1}^{n} r_i \tag{2.2}$$

が成り立つことである．さらに, この条件が成り立つとき, $\mathcal{N}_0(d; R)$ の元で, 正の成分が高々 $n \cdot d!$ 個であるようなものが存在する．

2.3　主定理の証明

定理 2.2 を示す．

Proof. $A \in \mathcal{N}_0(d; R)$ とする．このとき, 各 $k \in \langle n \rangle$ に対し, (2.1) が成り立つ．$2 \leq i_2 < i_3 < \cdots < i_d \leq n$ を固定する．A の対称性から,

$$\begin{aligned} &(d-1) \cdot A(1, i_2, \dots, i_d) \\ &= A(i_2, 1, i_3, \dots, i_d) + A(i_3, 1, i_2, i_4 \dots, i_d) + \cdots + A(i_d, 1, i_2, \cdots, i_{d-1}) \end{aligned} \tag{2.3}$$

が成り立つ．順序づけられた各 n 組 $(i_2, 1, i_3, \dots, i_d), (i_3, 1, i_2, i_4, \dots, i_d), \dots, (i_d, 1, i_2, \dots, i_{d-1})$ は $I_2, \dots, I_n$ のうちのどれか 1 つに属する．(2.3) の右辺には, $\{A(i_1, \dots, i_d) \mid (i_1, \dots, i_d) \in \cup_{j=2}^{n} I_j,\ i_l = 1 \text{ for some } l\}$ しか現れないので,

$$0 \leq r_2 + \cdots + r_n - (d-1)r_1$$

が成り立つ．したがって (2.2) が成り立つ．

逆を示す．

$$S = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^{n} r_i.$$

とおく．明らかに $r_1 \leq S$ が成り立つ．ベクトル

$$R' := \left(\frac{r_1}{S}, \dots, \frac{r_n}{S} \right).$$

を考える．$1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_d \le n$ に対し, $v_{i_1 i_2 \cdots i_d}$ を, $\mathbf{R}^n$ の元で, $i_1, i_2, \ldots, i_d$ 成分はすべて 1 で, その他の成分はすべて 0 であるようなものとする．このとき,

$$R' \preceq v_{12\cdots d} = (1, \ldots 1, 0, \ldots, 0)$$

が成り立つ．ここで, 最右辺における 1 の個数は d 個で, 0 の個数は $n-d$ 個である．ゆえに, Rado の定理 (定理 2.1) によって,

$$\sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_d \le n} c_{i_1 i_2 \cdots i_d} v_{i_1 i_2 \cdots i_d} = R' \quad \text{and} \quad \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_d \le n} c_{i_1 i_2 \cdots i_d} = 1$$

をみたす非負定数たち $\{c_{i_1 i_2 \cdots i_d} \ge 0 \mid 1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_d \le n\}$ が存在する．このとき, 任意の $k \in \langle n \rangle$ に対し,

$$\sum_{l=1}^{d} \sum_{\substack{1 \le i_1 < i_2 < \cdots i_{l-1} \\ < i_l = k < i_{l+1} < \cdots < i_d \le n}} c_{i_1 i_2 \cdots i_d} = \frac{r_k}{S}.$$

が成り立つ．集合 $\{c_{i_1 i_2 \cdots i_d} \ge 0 \mid 1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_d \le n\}$ に対し, 非負で対称な strongly hollow d ハイパー行列 $(\tilde{c}_{i_1 i_2 \cdots i_d})$ で,

$$\tilde{c}_{\pi(i_1)\pi(i_2)\cdots\pi(i_d)} = c_{i_1 i_2 \cdots i_d} \quad \text{for any} \quad \pi \in \mathfrak{S}_d.$$

をみたすものが自然に構成できる．各 $c_{i_1 i_2 \cdots i_d}$ は非負であるから, ハイパー行列 $(\tilde{c}_{i_1 i_2 \cdots i_d})$ も非負である．このとき, 各 $k \in \langle n \rangle$ に対し,

$$\sum_{j_1, \cdots, j_{d-1} \in \langle n \rangle \setminus k} \tilde{c}_{k j_1 \cdots j_{d-1}} = (d-1)! \sum_{l=1}^{d} \sum_{\substack{1 \le i_1 < i_2 < \cdots i_{l-1} \\ < i_l = k < i_{l+1} < \cdots < i_d \le n}} c_{i_1 i_2 \cdots i_d} = \frac{(d-1)! r_k}{S}$$

が成り立つ．ゆえに,

$$\left(\frac{S}{(d-1)!} \tilde{c}_{i_1 i_2 \cdots i_d} \right) \in \mathcal{N}_0(d; R).$$

が示せた．定理の後半は Zhan の定理 (定理 2.1) と $\left(\frac{S}{(d-1)!} \tilde{c}_{i_1 i_2 \cdots i_d} \right)$ の対称性から従う． □

2.4 $\mathcal{N}_0(d; R)$ の幾何学的性質

上で定義した $\mathcal{N}_0(d; R)$ が空でないとすると, どのような集合だろうか? ここでは紙数の都合上, 証明を省略するが, 筆者は [8] において次を示した:

補題 2.3. ([8]) d, n を $d \ge 2$ および $n \ge d$ をみたす自然数とする．$R = (r_1, \ldots, r_n)$ を $r_1 \ge \cdots \ge r_n \ge 0$ をみたす $\mathbf{R}^n$ の元とする．集合 $\mathcal{N}_0(d; R)$ が空でないと仮定する．このとき, $n \ge d+2$ ならば, $\mathcal{N}_0(d; R)$ は非負で対称な strongly hollow d ハイパー行列全体がなすベクトル空間における凸多面体となり, $n = d$ または $n = d+1$ ならば, $\mathcal{N}_0(d; R)$ は 1 点集合になる．

上の補題より, $\mathcal{N}_0(d; R)$ が空ではなく, $n \ge d+2$ ならば, $\mathcal{N}_0(d; R)$ は凸多面体となることがわかった．一般に, 凸集合 C の点 x が**極点** (**extreme point**) であるとは, x を内点とするような, C に含まれる線分が存在しないことをいう．筆者は [8] において次を示した:

命題 2.4. ([8]) d, n を $d \geq 2$ および $n \geq d$ をみたす自然数とする．$R = (r_1, \ldots, r_n)$ を $r_1 \geq \cdots \geq r_n \geq 0$ をみたす $\mathbf{R}^n$ の元とする．$\mathcal{N}_0(d; R)$ は空でない凸多面体とする．$A \in \mathcal{N}_0(d; R)$ が端点ならば, A の成分のうち正のものは, 高々 $n \cdot d!$ 個である．

参考文献

[1] Achuthan, N., Achuthan, N., Simanihuruk, M.: On 3-uniform hypergraphic sequences, J. Combin. Math. Combin. Comput., **14**(1993), 3-13.

[2] Behrens, S., Erbes, C., Ferrara, M., Hartke, S.G., Reiniger, B., Spinoza, H., Tomlinson, C.: New results on degree sequences of uniform hypergraphs, Electron. J. Combin. **20**(2013), #P14.

[3] Dewdney, A.K.: Degree sequences in complexes and hypergraphs, Proc. Amer. Math. Soc., **53**(1975), 535-540.

[4] Frosini, A., Picouleau, C., Rinaldi, S.: New sufficient conditions on the degree sequences of uniform hypergraphs, Theoret. Comput. Sci., **868**(2021), 97-111.

[5] Hakimi, S. L.: On realizability of a set of integers as degrees of the vertices of a linear graph I, J. Soc. Indust. Appl. Math., **10**(1962), 496-506.

[6] Havel, V.: Eine Bemerkung über die Existenz der endlichen Graphen (Czech), Časopis Pěst. Mat., **80**(1955), 477-480.

[7] Hoogeveen, H., Sierksma G.: Seven criteria for integer sequences being graphic, J. Graph Theory, **15**(1991), 223-231.

[8] Narita, K.: Convex Hulls of Grassmannians and Combinatorics of Symmetric Hypermatrices, arXiv:2204.06953

[9] Rado, R.: An inequality, J. London Math. Soc., **27**(1952), 1-6.

[10] Zhan, X.: The sharp Rado theorem for majorizations, Amer. Math. Monthly, **110**(2003), no. 2, 152-153.

[11] Zhan, X.: Matrix Theory, Graduate Studies in Mathematics, **147**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2013.