Homogeneous Ulrich bundles on homogenous varieties of certain exceptional types

早稲田大学大学院基幹理工学研究科数学・応用数理専攻
中山 勇祐 (Yusuke Nakayama)

Abstract

Eisenbud–Schreyer–Weyman によって提起された "各射影多様体はある偏曲に関して Ulrich 束を持つか?" という問題がある. 本講演では, Picard 数が 2 以上の E_6, F_4, G_2 型の等質多様体は最小な偏曲に関して initialized 既約な等質 Ulrich 束を持たないという結果を紹介する. また, これを証明するための等質多様体上の initialized 既約な等質ベクトル束が任意の偏曲に関して Ulrich 束であるための判定法を紹介する.

1　等質多様体上の既約な等質 Ulrich 束の先行研究

$X \subset \mathbb{P}^n$ を d 次元の $\mathbb{C}$ 上の射影多様体とする. X 上のベクトル束 E が *Ulrich* であるとは $H^i(X, E(-t))$ が任意の i と $1 \leq t \leq d$ において 0 になるときをいう. Eisenbud–Schreyer–Weyman [4] は射影多様体はある偏極に関して Ulrich 束を持つかどうかという問いを提起した. この問題に対して, さまざまな射影多様体の場合について調べられている.

Picard 数が 1 の等質多様体 G/P の場合を考える, ここで G は複素数体上の半単純線形代数群であって, P は極大放物型部分群である. G が A 型のとき (つまり, グラスマン多様体のとき) は Costa–Miró-Roig [3] によって, B, C, D 型のときは Fonarev [5] によって調べられている. 特に, Fonarev は既約な等質ベクトル束が Ulrich 束になるための判定法を与え, それを用いて調べている. G が例外型のときは Lee–Park [6] によって Fonarev の判定法を用いて調べている. 特に, 彼らは Cayley plane E_6/P_1 と E_7-adjoint 多様体 E_7/P_1 以外の Picard 数が 1 の例外型の等質多様体は既約な等質 Ulrich 束を持たないことを示した.

Picard 数が 1 より大きい等質多様体 G/P を考える. G が A 型のときは Coskun–Costa–Huizenga–Miró-Roig–Woolf [2] によって研究されている. 特に, 彼らは Picard 数が 3 以上であるときは最小偏極に関する既約な等質 Ulrich 束は存在しないことが示した. また, Picard 数が 2 のときも彼らは部分的に解決をして, この場合に関するある予想を提起した. その予想は Coskun–Jaskowiak [1] によって解決されている. しかしながら, G が他の型での研究はこれまでのところなされていなかった.

2　判定法と主結果

G を複素数体上の半単純線形代数群 P_I を $I = \{\alpha_{i_1}, \cdots, \alpha_{i_r}\} \subset \Delta$ によって定まる放物型部分群とする, ここで α_{i_j} は単純ルートであって Δ は単純ルートの集合である. 等質多様体 G/P_I は r 個の射影 $\pi_j : G/P_I \to G/P_{\alpha_{i_j}}$ を持つ. 任意の正整数 b_j について, $\mathcal{O}(1) := \mathcal{O}_{G/P_I}(1) := \otimes_{j=1}^{r} L_j^{\otimes b_j}$ と定める, ここで $L_j := \pi_j^* \mathcal{O}_{G/P_{\alpha_{i_j}}}(1)$. 等質多様体 G/P_I 上のベクトル束 E が等質ベクトル束であるとは $E \cong G \times_\rho V$ となるような P_I の表現 $\rho : P_I \to GL(V)$ が存在する時をいう. もしこの表現が既約であれば E を既約な等質ベクトル束と呼ぶ. 最高ウェイト λ を持つ P_I の既約表現から生じる既約な等質ベクトル束を E_λ と書く.

Φ_I^+ を以下で定義する:

$$\Phi_I^+ := \{\alpha \in \Phi^+ \mid (\varpi_{i_j}, \alpha) \neq 0 \text{ for some } \alpha_{i_j} \in I\},$$

ここで Φ^+ は正ルートの集合であって $(,)$ は Killing 形式を表す．E_λ を G/P_I 上の最高ウェイト $\lambda = \sum_{i=1} a_i \varpi_i$ を持つ既約な等質ベクトル束とする．φ_λ^+ を以下で定義する:

$$\varphi_\lambda^I : \Phi_I^+ \to \mathbb{Q}, \quad \alpha \mapsto \frac{1}{(\alpha, \sum_{j=1}^r b_j \varpi_{i_j})}(\lambda + \rho, \alpha),$$

ここで ρ はすべての正ルートの和を 2 で割ったウェイトである．次の補題が既約な等質ベクトル束が $\mathcal{O}(1) := \otimes_{j=1}^r L_j^{\otimes b_j}$ に関する Ulrich 束になるための判定法である．

補題 2.1 ([7] Lemma 2.2)**.** 記号は上記のものとする．このとき次は同値である．
(1) E_λ は $\mathcal{O}(1)$ に関する Ulrich 束である．
(2) φ_λ^I は単射であって $\mathrm{Im}(\varphi_\lambda^I) = \{1, \cdots, \dim(G/P_I)\} \subset \mathbb{Z}$ をみたす．

これは $|I| = 1$ かつ $b_{i_j} = 1$ としたときに Fonarev の判定法と一致する．次が主結果である．

定理 2.2 ([7] Theorem 2.1)**.** I を $|I| \geq 2$ をみたす Δ の部分集合とし，G を E_6 型か F_4 型か G_2 型のうちのひとつとする．このとき，等質多様体 G/P_I は $\mathcal{O}(1) = \otimes_{j=1}^r L_j$ に関する既約な等質 *Ulrich* 束を持たない．

References

[1] I. Coskun and L. Jaskowiak, Ulrich partion for two-step flag varieties, Involve **10**(3) (2017): 531-539.

[2] I. Coskun, L. Costa, J. Huizenga, R. M. Miró-Roig and M. Woolf, Ulrich Schur bundles on flag varieties, J. Algebra **474** (2017), 49-96.

[3] L. Costa and R. M. Miró-Roig, GL(V)-invariant Ulrich bundles on Grassmannians, Math. Ann. **361** 2015.1-2, pp. 443-457.

[4] D. Eisenbud, F.-O. Schreyer and J. Weyman, Resultants and Chow forms via exterior syzygies, J. Amer. Math. Soc. **16** (2003), no. 3, 537-579.

[5] A. Fonarev, Irreducible Ulrich bundles on isotropic Grassmannians, *Moscow Mathematical Journal*, **16** (2016),no. 4, 711 – 726.

[6] K.-S. Lee and K.-D. Park, Equivariant Ulrich bundles on exceptional homogeneous varieties, *Advances in Geometry*, **21** (2021) no.2, 187 – 205.

[7] Y. Nakayama Homogenous Ulrich bundles on homogeneous varieties of certain exceptional types, arXiv:2311.00361.