On vertices of frontals in the Euclidean plane

室蘭工業大学　大学院工学研究科博士前期課程情報電子工学系専攻
中津山 希 (Nozomi NAKATSUYAMA) *

概要

正則平面曲線の 4 頂点定理は良く知られているが, 特異点を持つ場合, 曲率が発散するため, 曲率を用いて頂点を定義できない. 特異点を持つ平面曲線として, ユークリッド平面上のルジャンドル曲線とフロンタルを考える. はじめにフロントとフロンタルの縮閉線を用いて頂点を定義し, 次に縮閉線が定義されない場合を含む一般的な状況でフロンタルの頂点を定義する. 閉フロンタルに対して, 特異点の情報やルジャンドル曲率の情報により 4 頂点定理が成り立つ条件を与える.

1　導入

全体を通してすべての写像と多様体は滑らか (C^∞ 級) であるとする. I を区間もしくは $\mathbb{R}$ とし, $\mathbb{R}^2$ をユークリッド平面, ベクトル $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2)$, $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$ に対して, $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ を内積とし, $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}}$ をノルムとする.

1.1　正則平面曲線

$\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ を正則平面曲線, つまり任意の点 $t \in I$ に対して $\dot{\gamma}(t) = (d\gamma/dt)(t) \neq 0$ とする. J を反時計回りに $\pi/2$ 回転させたもの, $\boldsymbol{t}(t) = \dot{\gamma}(t)/|\dot{\gamma}(t)|$ を単位接ベクトル, $\boldsymbol{n}(t) = J(\boldsymbol{t}(t))$ を単位法ベクトルとしたとき, γ の**曲率** $\kappa : I \to \mathbb{R}$ は

$$\kappa(t) = \frac{\dot{\boldsymbol{t}}(t) \cdot \boldsymbol{n}(t)}{|\dot{\gamma}(t)|} = \frac{\det\left(\dot{\gamma}(t), \ddot{\gamma}(t)\right)}{|\dot{\gamma}(t)|^3}$$

で与えられる. $\kappa(t_0) = 0$ となる点 t_0 を正則平面曲線 γ の**変曲点**, $\dot{\kappa}(t_0) = 0$ となる点 t_0 を**正則平面曲線 γ の頂点**という.

定理 1.1 (正則曲線の 4 頂点定理, [1, 2, 9])**.** $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ が単純閉正則曲線であるとき, 曲線 γ は少なくとも 4 つ頂点を持つ.

特に [9] に詳しく頂点や 4 頂点定理についての解説が日本語で書かれている.

曲線 $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ を変曲点を持たない曲線としたとき, **縮閉線** $Ev(\gamma) : I \to \mathbb{R}^2$ を

$$Ev(\gamma) = \gamma(t) + \frac{1}{\kappa(t)}\boldsymbol{n}(t)$$

* E-mail:23043042@muroran-it.ac.jp

とする．このとき縮閉線 $Ev(\gamma): I \to \mathbb{R}^2$ の特異点は曲線 γ の頂点となる．

点 $t_0 \in I$ が γ の**特異点**とは $\dot{\gamma}(t) = 0$ となる点である．このとき一般的に曲率は発散するため, 曲率を用いて頂点を定義することができない．また, 単純閉曲線なフロント (フロンタル) に対して 2 つ頂点を持つ例がある．よって, 今回は 4 つ頂点を持つための条件を考えたい．

1.2　ルジャンドル曲線

S^1 を単位円, $(\gamma, \nu): I \to \mathbb{R}^2 \times S^1$ を滑らかな写像としたとき, 任意の点 $t \in I$ で $\dot{\gamma}(t) \cdot \nu(t) = 0$ となる (γ, ν) を**ルジャンドル曲線**という．さらに, (γ, ν) がはめ込みであるとき (γ, ν) を**ルジャンドルはめ込み**という．このとき $(\gamma, \nu): I \to \mathbb{R}^2 \times S^1$ がルジャンドル曲線となるような $\nu: I \to S^1$ が存在するとき, $\gamma: I \to \mathbb{R}^2$ を**フロンタル**といい, $(\gamma, \nu): I \to \mathbb{R}^2 \times S^1$ がルジャンドルはめ込みとなるような $\nu: I \to S^1$ が存在するとき, $\gamma: I \to \mathbb{R}^2$ を**フロント**という．

$(\gamma, \nu): I \to \mathbb{R}^2 \times S^1$ をルジャンドル曲線, $\mu: I \to S^1$ を $\mu(t) = J(\nu(t))$ としたとき, $\{\nu(t), \mu(t)\}$ を $\mathbb{R}^2$ 上の $\gamma(t)$ の動標構という．このときフロンタル γ の動標構に対して,

$$\begin{pmatrix} \dot{\nu}(t) \\ \dot{\mu}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \ell(t) \\ -\ell(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu(t) \\ \mu(t) \end{pmatrix},\ \dot{\gamma}(t) = \beta(t)\mu(t)$$

が成り立ち, $\ell(t) = \dot{\nu}(t) \cdot \mu(t)$, $\beta(t) = \dot{\gamma}(t) \cdot \mu(t)$ となる．ここで得られた $(\ell, \beta): I \to \mathbb{R}^2$ はルジャンドル曲線 (γ, ν) の **(ルジャンドル) 曲率**という．このとき $\ell(t_0) = 0$ となる点 $t_0 \in I$ はフロンタル γ の変曲点, $\beta(t_0) = 0$ となる点 $t_0 \in I$ はフロンタル γ の特異点である．また, $(\gamma, \nu): I \to \mathbb{R}^2 \times S^1$ がルジャンドルはめ込みであるとき, 任意の点において $(\ell, \beta) \neq (0, 0)$ となる．

定理 1.2 (ルジャンドル曲線の存在性, [3])**.** 任意に与えられた $(\ell, \beta): I \to \mathbb{R}^2$ に対して, 曲率が (ℓ, β) であるようなルジャンドル曲線 $(\gamma, \nu): I \to \mathbb{R}^2 \times S^1$ が存在する．

定義 1.3 (ルジャンドル曲線の合同, [3])**.** $(\gamma, \nu), (\widetilde{\gamma}, \widetilde{\nu}): I \to \mathbb{R}^2 \times S^1$ をルジャンドル曲線としたとき, $\mathbb{R}^2$ 上の回転行列 $A \in SO(s)$ と平行移動 $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^2$ を用いて, 任意の点 $t \in I$ において,

$$\widetilde{\gamma}(t) = A(\gamma(t)) + \boldsymbol{a},\ \widetilde{\nu}(t) = A(\nu(t))$$

と表すことができるとき, $(\gamma, \nu), (\widetilde{\gamma}, \widetilde{\nu})$ は**ルジャンドル曲線として合同**である．

定理 1.4 (ルジャンドル曲線の一意性, [3])**.** $(\gamma, \nu), (\widetilde{\gamma}, \widetilde{\nu}): I \to \mathbb{R}^2 \times S^1$ をルジャンドル曲線, それぞれの曲率をそれぞれ $(\ell, \beta), (\widetilde{\ell}, \widetilde{\beta})$ とする．2 つのルジャンドル曲線 (γ, ν) と $(\widetilde{\gamma}, \widetilde{\nu})$ が合同となる必要十分条件は, (ℓ, β) と $(\widetilde{\ell}, \widetilde{\beta})$ が一致するときである．

$(\gamma, \nu): [a, b] \to \mathbb{R}^2 \times S^1$ をルジャンドル曲線としたとき, $(\gamma(a), \nu(a)) = (\gamma(b), \nu(b))$ かつ $(\dot{\gamma}(a), \dot{\nu}(a)) = (\dot{\gamma}(b), \dot{\nu}(b))$ であるとき, (γ, ν) を $(C^1$-) 閉ルジャンドル曲線という [6]．さらに, 自己交差を持たない γ を**単純閉フロンタル**という．

$(\gamma, \nu): I \to \mathbb{R}^2 \times S^1$ をルジャンドル曲線, I を閉区間とする．このとき点 $t \in I$ における γ の接線 L_t を $L_t = \{\lambda\mu(t) + \gamma(t) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ とする．このとき接線 L_t は $\mathbb{R}^2$ を 2 つの半平面 H_+, H_- に分割するものとし, $H_+ \cup H_- = \mathbb{R}^2$, $H_+ \cap H_- = L_t$ とする．このとき, $\gamma(I) \subset H_+$ (あるいは

$\gamma(I) \subset H_-$) となるとき, (γ,ν) を凸ルジャンドル曲線, γ を凸フロンタルという. γ を正則曲線としたとき, γ がフロンタルとして凸曲線である場合, γ は正則曲線として凸曲線となる [7].

定理 1.5 ([6])**.** $(\gamma,\nu): I \to \mathbb{R}^2 \times S^1$ をルジャンドル曲線, 曲率を (ℓ,β) とし, γ は単純閉フロンタルとする. ℓ と β の 0 となる点が孤立点であるとき, 以下の 4 つのいずれかが満たされるとき, フロンタル γ は凸である.

(i) 任意の点 $t \in I$ に対して, $\ell(t) \geq 0$ かつ $\beta(t) \geq 0$.

(ii) 任意の点 $t \in I$ に対して, $\ell(t) \geq 0$ かつ $\beta(t) \leq 0$.

(iii) 任意の点 $t \in I$ に対して, $\ell(t) \leq 0$ かつ $\beta(t) \leq 0$.

(iv) 任意の点 $t \in I$ に対して, $\ell(t) \leq 0$ かつ $\beta(t) \geq 0$.

1.3 フロントの縮閉線

フロント γ の頂点を定義するために, 縮閉線を定義する [4]. $(\gamma,\nu): I \to \mathbb{R}^2 \times S^1$ をルジャンドルはめ込み, 曲率を (ℓ,β) とし, 任意の点 $t \in I$ において $\ell(t) \neq 0$ とする.

定義 1.6 (フロントの縮閉線, [4])**.** フロント γ の**縮閉線** $\mathcal{E}v(\gamma): I \to \mathbb{R}^2$ を

$$\mathcal{E}v(\gamma)(t) = \gamma(t) - \frac{\beta(t)}{\ell(t)}\nu(t)$$

とする.

命題 1.7 ([4])**.** 縮閉線 $\mathcal{E}v(\gamma): I \to \mathbb{R}^2$ もフロントである. 正確には, $(\mathcal{E}v(\gamma), J(\nu)): I \to \mathbb{R}^2 \times S^1$ はルジャンドルはめ込みであり, 曲率は

$$\left(\ell(t), \frac{d}{dt}\frac{\beta(t)}{\ell(t)}\right)$$

となる.

定義 1.8 (フロントの頂点, [4])**.** 縮閉線 $\mathcal{E}v(\gamma): I \to \mathbb{R}^2$ に対して,

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}v(\gamma)(t_0) = 0$$

となる点 $t_0 \in I$ を**フロント** γ **の頂点**とする. このとき $(d/dt)\mathcal{E}v(\gamma)(t_0) = (d/dt)(\beta/\ell)(t_0) = 0$ となる.

命題 1.9 ([4])**.** $(\gamma,\nu): [a,b] \to \mathbb{R}^2 \times S^1$ を変曲点を持たないルジャンドルはめ込みとしたとき, 以下の 2 つが成り立つ.

(1) γ が 3/2-カスプより退化した特異点を少なくとも 2 つ持つとき, γ は少なくとも 4 つ頂点を持つ.

(2) γ が特異点を少なくとも 4 つ持つとき, γ は少なくとも 4 つ頂点を持つ.

2　主結果

2.1　フロンタルの縮閉線と頂点

フロンタル γ の頂点を定義するために, 縮閉線を定義する [5]. $(\gamma,\nu): I \to \mathbb{R}^2 \times S^1$ をルジャンドル曲線とし, 曲率を (ℓ,β) とする.

定義 2.1 (フロンタルの縮閉線, [5])**.** $\beta = \alpha\ell$ となるような滑らかな関数 $\alpha : I \to \mathbb{R}$ が存在するとき, フロンタル γ の**縮閉線** $\mathcal{E}v(\gamma) : I \to \mathbb{R}^2$ を

$$\mathcal{E}v(\gamma)(t) = \gamma(t) - \alpha(t)\nu(t)$$

とする.

命題 2.2 ([5])**.** 縮閉線 $\mathcal{E}v(\gamma) : I \to \mathbb{R}^2$ もフロンタルである. 正確には $(\mathcal{E}v(\gamma), J(\nu)) : I \to \mathbb{R}^2 \times S^1$ はルジャンドル曲線であり, 曲率は $(\ell, \dot{\alpha})$ となる.

定義 2.3 (フロンタルの頂点, [5])**.** フロンタル γ の縮閉線 $\mathcal{E}v(\gamma) : I \to \mathbb{R}^2$ が存在しかつ $\dot{\mathcal{E}v}(\gamma)(t_0) = 0$ となる点 $t_0 \in I$ を**フロンタル γ の頂点**とする. このとき $\dot{\alpha}(t_0) = 0$ となる場合, $\dot{\mathcal{E}v}(\gamma)(t_0) = 0$ である.

$n, k \in \mathbb{N}$, $m = n + k$ を自然数, $f : (\mathbb{R}, 0) \to \mathbb{R}$ を $f(0) \neq 0$ となる滑らかな関数芽とする. $(\gamma,\nu) : (\mathbb{R}, 0) \to \mathbb{R}^2 \times S^1$ を

$$\begin{aligned}
\gamma(t) &= (\pm t^n, t^m f(t)),\\
\nu(t) &= \frac{1}{\sqrt{(mt^k f(t) + t^{k+1}\dot{f}(t))^2 + n^2}}(-mt^k f(t) - t^{k+1}\dot{f}(t), \pm n)
\end{aligned}$$

としたとき, (γ,ν) はルジャンドル曲線であり, この γ を (n,m) 型という. $n > 1$ であるとき, 原点は γ の特異点となる. (γ,ν) の曲率 (ℓ,β) は,

$$\begin{aligned}
\ell(t) &= \pm\frac{nt^{k-1}(mkf(t) + (m+k+1)t\dot{f}(t) + t^2\ddot{f}(t))}{(mt^k f(t) + t^{k+1}\dot{f}(t))^2 + n^2},\\
\beta(t) &= -t^{n-1}\sqrt{(mt^k f(t) + t^{k+1}\dot{f}(t))^2 + n^2}
\end{aligned}$$

となる. $(\gamma,\nu) : I \to \mathbb{R}^2 \times S^1$ が点 $t_0 \in I$ で (n,m) 型であるとき, $(\widetilde{\gamma},\widetilde{\nu}) : (\mathbb{R}, 0) \to \mathbb{R}^2 \times S^1$ と点 t_0 付近で $\mathcal{R}$ 同値であり, ルジャンドル曲線 $(\widetilde{\gamma},\widetilde{\nu})$ は

$$\begin{aligned}
\widetilde{\gamma}(t) &= (\pm t^n, t^m f(t)),\\
\widetilde{\nu}(t) &= \frac{1}{\sqrt{(mt^k f(t) + t^{k+1}\dot{f}(t))^2 + n^2}}(-mt^k f(t) - t^{k+1}\dot{f}(t), \pm n)
\end{aligned}$$

となり, 曲率 $(\widetilde{\ell}, \widetilde{\beta})$ は

$$\widetilde{\ell}(t) = \pm \frac{nt^{k-1}(mkf(t) + (m+k+1)t\dot{f}(t) + t^2\ddot{f}(t))}{(mt^k f(t) + t^{k+1}\dot{f}(t))^2 + n^2},$$
$$\widetilde{\beta}(t) = -t^{n-1}\sqrt{(mt^k f(t) + t^{k+1}\dot{f}(t))^2 + n^2}$$

となる. $n \geq k$ のとき, $\widetilde{\beta} = \widetilde{\alpha}\widetilde{\ell}$ となる以下のような滑らかな関数 $\widetilde{\alpha} : (\mathbb{R}, 0) \to \mathbb{R}$ が存在する.

$$\widetilde{\alpha}(t) = \mp \frac{t^{n-k}((mt^k f(t) + t^{k+1}\dot{f}(t))^2 + n^2)^{\frac{3}{2}}}{n(mkf(t) + (m+k+1)t\dot{f}(t) + t^2\ddot{f}(t))}.$$

命題 2.4 ([8])**.** $(\gamma, \nu) : I \to \mathbb{R}^2 \times S^1$ をルジャンドル曲線, ルジャンドル曲率を (ℓ, β) とし, $\beta = \alpha\ell$ とする.

(1) $n = k$ のとき, γ に $\dot{f}(0) = 0$ となる $(n, m) = (n, 2n)$ 型の点が 4 つあるとき, γ は少なくとも 4 つ頂点を持つ.

(2) $n = k + 1$ のとき, γ に $(n, m) = (n, 2n - 1)$ 型の点が 4 つあるとき, γ は少なくとも 4 つ頂点を持つ.

(3) $n \geq k + 2$ のとき, γ に (n, m) 型の点が 2 つあるとき, γ は少なくとも 4 つ頂点を持つ.

定理 2.5 ([8])**.** $(\gamma, \nu) : I = [a, b] \to \mathbb{R}^2 \times S^1$ を閉ルジャンドル曲線, ルジャンドル曲率を (ℓ, β), $\beta = \alpha\ell$ とし, ℓ と β の 0 となる点が孤立点であるとする. γ が単純凸フロンタルであるとき, γ は少なくとも 4 つ頂点を持つ.

2.2 一般的な状況でのフロンタルの頂点

$(\gamma, \nu) : I \to \mathbb{R}^2 \times S^1$ をルジャンドル曲線, ルジャンドル曲率を (ℓ, β) とする. このとき任意の点 $t \in I$ において, $k_1(t)\ell(t) + k_2(t)\beta(t) = 0$ となるような滑らかな写像 $(k_1, k_2) : I \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ が存在すると仮定する.

定義 2.6 ([8])**.** $\dot{k}_1(t_0)k_2(t_0) - k_1(t_0)\dot{k}_2(t_0) = 0$ となる点 $t_0 \in I$ を**フロンタル γ の頂点**とする.

$t_0 \in I$ をフロンタル γ の頂点とする. $\beta(t) \neq 0$ となる場合, $k_1(t) = 1, k_2(t) = -\ell(t)/\beta(t)$ より, 点 $t_0 \in I$ は正則曲線としての頂点となる. 同様に $\ell(t) \neq 0$ となる場合, $k_1(t) = -\beta(t)/\ell(t)$, $k_2(t) = 1$ より, 点 $t_0 \in I$ はフロントとしての頂点となる. $\beta(t) = \alpha(t)\ell(t)$ となる場合, $k_1(t) = -\alpha(t)$, $k_2(t) = 1$ より, 点 $t_0 \in I$ は縮閉線が定義できる場合のフロンタルの頂点となる.

命題 2.7 ([8])**.** $\ell = \alpha\beta$ となるような滑らかな関数 $\alpha : I \to \mathbb{R}$ が存在するとき, 以下の 2 つのことが成り立つ.

(1) $n + 1 = k$ のとき, γ に $(n, m) = (n, 2n + 1)$ 型の点が 4 つあるとき, γ は少なくとも 4 つ頂点を持つ.

(2) $n + 2 \leq k$ のとき, γ に (n, m) 型の点が 2 つあるとき, γ は少なくとも 4 つ頂点を持つ.

定理 2.8 ([8])**.** $(\gamma, \nu) : I \to \mathbb{R}^2 \times S^1$ をルジャンドル曲線, ルジャンドル曲率を (ℓ, β) とする. 任意の点 $t \in I$ において, $k_1(t)\ell(t) + k_2(t)\beta(t) = 0$ となるような滑らかな写像 $(k_1, k_2) : I \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ が

存在すると仮定したとき,

$$\text{(i) } n=k,\ \dot{f}(0)=0, \quad \text{(ii) } n \geq k+2, \quad \text{(iii) } n+2 \leq k,$$

となるような (n,m) 型の点が 4 つ存在するとき, γ は少なくとも 4 つ頂点を持つ.

定理 2.9 ([8])**.** $(\gamma,\nu): I \to \mathbb{R}^2 \times S^1$ を閉ルジャンドルはめ込み, ルジャンドル曲率を (ℓ,β) とする. γ が特異点と変曲点をそれぞれ少なくとも 2 つ持つような単純凸フロントであるとき, γ は少なくとも 4 つ頂点を持つ.

例 2.10. $(\gamma,\nu): [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2 \times S^1$ を

$$\gamma(t)=\left(\frac{1}{5}\cos^5 t, \frac{1}{5}\sin^5 t\right),\ \nu(t)=\frac{1}{\sqrt{\cos^6 t+\sin^6 t}}\left(-\sin^3 t, -\cos^3 t\right)$$

としたとき, (γ,ν) はルジャンドル曲線となり, 曲率 (ℓ,β) は,

$$\ell(t)=-\frac{3\cos^2 t\sin^2 t}{\cos^6 t+\sin^6 t},\ \beta(t)=-\cos t\sin t\sqrt{\cos^6 t+\sin^6 t}$$

となる. $k_1(t)=-(\cos^6 t+\sin^6 t)^{\frac{3}{2}}$, $k_2(t)=3\cos t\sin t$ とすると, (k_1,k_2) は任意の点 $t \in I$ で $k_1(t)\ell(t)+k_2(t)\beta(t)=0$ となる滑らかな写像となる. このとき,

$$\dot{k}_1(t)=9\cos 2t\cos t\sin t\sqrt{\cos^6 t+\sin^6 t},\ \dot{k}_2(t)=3\cos 2t$$

となることから,

$$\dot{k}_1(t)k_2(t)-k_1(t)\dot{k}_2(t)=3\cos 2t\sqrt{\cos^6 t+\sin^6 t}(9\cos^2 t\sin^2 t+\cos^6 t+\sin^6 t)$$

が得られる. したがって定義 2.6 より, $\cos 2t=0$ となる $t=\pi/4, 3\pi/4$, $5\pi/4, 7\pi/4$ の 4 点では $\dot{k}_1(t)k_2(t)-k_1(t)\dot{k}_2(t)=0$ となることから, フロンタル γ の頂点となる.

例 2.11. $(\gamma,\nu): [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2 \times S^1$ を

$$\gamma(t)=\left(\cos t, \frac{1}{3}\sin^3 t\right),\ \nu(t)=-\frac{1}{\sqrt{\cos^2 t\sin^2 t+1}}(\cos t\sin t, 1)$$

としたとき, (γ,ν) はルジャンドル曲線となり, 曲率 (ℓ,β) は,

$$\ell(t)=-\frac{\cos 2t}{\cos^2 t\sin^2 t+1},\ \beta(t)=-\sin t\sqrt{\cos^2 t\sin^2 t+1}$$

となる. このとき (γ,ν) は $(\ell,\beta)\neq(0,0)$ であることからルジャンドルはめ込みであり, ℓ と β の符号が t の値によって変わるため, γ は凸ではなく, $t=0,\pi$ の 2 点は γ の特異点であり, $t=\pi/4, 3\pi/4$, $5\pi/4, 7\pi/4$ の 4 点は γ の変曲点である. $k_1(t)=-\sin t(\cos^2 t\sin^2 t+1)^{\frac{3}{2}}$, $k_2(t)=\cos 2t$ とすると, (k_1,k_2) は任意の点 $t \in I$ で $k_1(t)\ell(t)+k_2(t)\beta(t)=0$ となる滑らかな写像となる. このとき,

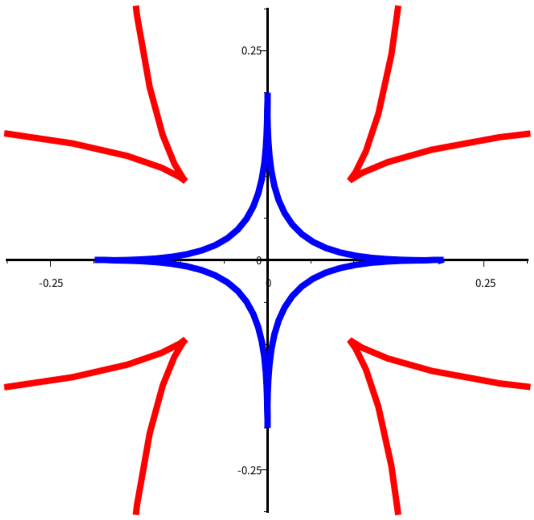
$$\dot{k}_1(t)=-\cos t(\cos^2 t\sin^2 t+1+3\sin^2 t\cos 2t)\sqrt{\cos^2 t\sin^2 t+1},\ \dot{k}_2(t)=-2\sin 2t$$

となることから,

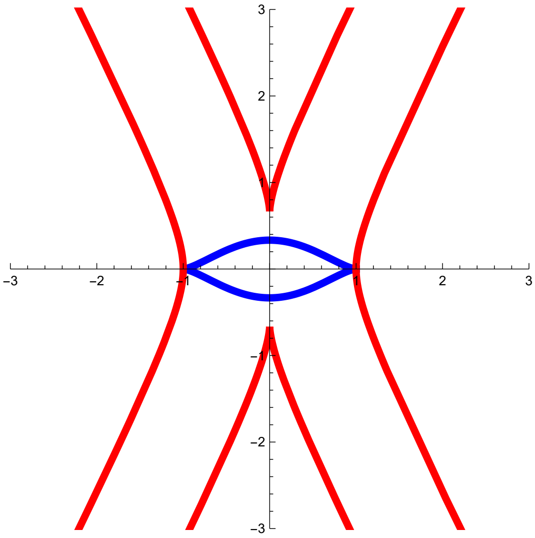
$$\dot{k}_1(t)k_2(t)-k_1(t)\dot{k}_2(t)=-\cos t\sqrt{\cos^2 t\sin^2 t+1}(\cos 2t(\cos^2 t\sin^2 t+1+3\sin^2 t\cos 2t)+4\sin^2 t(\cos^2 t\sin^2 t+1))$$

が得られる. したがって定義 2.6 より, $\cos t=0$ となる $t=\pi/2, 3\pi/2$ の 2 点でのみ $\dot{k}_1(t)k_2(t)-k_1(t)\dot{k}_2(t)=0$ となることから, フロンタル γ の頂点となり, 頂点を 4 つ持たない. このとき γ は凸ではないことからも 4 つ頂点を持たないことがいえる.

以下の左図は例 2.10, 右図は例 2.11 であり, 青線が γ, 赤線が $\mathcal{E}v(\gamma)$ である.



$\gamma(t)=(\frac{1}{5}\cos^5 t, \frac{1}{5}\sin^5 t)$



$\gamma(t)=(\cos t, \frac{1}{3}\sin^3 t)$

参考文献

[1] A. Kneser, Bemerkungen über die Anzahl der Extrema der Krümmung auf geschlossenen Kurven und über verwandte Fragen in einer nichteuklidischen Geometrie. Festschrift zum 70. Geburtstag von H. Weber, (1912), 170–180.

[2] S. Mukhopadhyaya, New methods in the geometry of a plane arc I. *Bull. Calcutta Math. Soc.*, **1** (1909), 31–37.

[3] T. Fukunaga and M. Takahashi, Existence and uniqueness for Legendre curves. J. Geom. **104** (2013), 297–307 https://doi.org/10.1007/s00022-013-0162-6.

[4] T. Fukunaga and M. Takahashi, Evolutes of fronts in the Euclidean plane. J. Singul. **10** (2014), 92–107 http://doi.org/10.5427/jsing.2014.10f.

[5] T. Fukunaga and M. Takahashi, Evolutes and involutes of frontals in the Euclidean plane. Demonstr. Math. **48** (2015), 147–166 https://doi.org/10.1515/dema-2015-0015.

[6] T. Fukunaga and M. Takahashi, On convexity of simple closed frontals. Kodai Math. J. **39** (2016), 389–398 https://doi.org/10.2996/kmj/1467830145.

[7] A. Gray, E. Abbena and S. Salamon, Modern differential geometry of curves and surfaces with Mathematica. Third edition. Studies in Advanced Mathematics. Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, FL, (2006).

[8] N. Nakatsuyama and M. Takahashi, On vertices of frontals in the Euculidean plane, Preprint (2024).

[9] M. Umehara, The four-vertex theorems. (Japanese) Sūgaku **50** (1998), no.4, 420–427.