行列因子化の圏とその変形について

千葉大学　大学院融合理工学府　数学情報科学専攻
中谷友哉 (Tomoya NAKATANI)

概要

多項式環 $S := \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ の非零元 f に対する行列因子化は超曲面 $S/(f)$ 上の Cohen-Macaulay 加群を研究するために Eisenbud[1] と Knörrer[2] により導入された概念である. その中でも, 可逆多項式といわれるクラスの多項式に対する行列因子化の圏は Kajiura-Saito-Takahashi[3],[4] によってホモロジー的ミラー対称性の枠組みで定式化された. 一方で Kontsevich は, ホモロジー的ミラー対称性において複素幾何側に定まる圏の変形が複素構造の変形に対応して得られる, と予想している. 本講演では複素幾何の圏として ADE 型可逆多項式といわれる多項式の行列因子化の圏を考え, その変形の定式化を目指す中で得られた結果を紹介する.

1　導入

1.1　可逆多項式

可逆多項式は組み合わせ論的に良い性質を持つ重み付き斉次多項式であることに加え, 特異点論においても重要なクラスの特異点を定める.

定義 1.1. $f(x_1, \ldots, x_n) \in S$ に対して, 正整数の組 $(w_1, \ldots, w_n; h)$ であり任意の $\lambda \in \mathbb{C}^*$ に対して

$$f(\lambda^{w_1} x_1, \ldots, \lambda^{w_n} x_n) = \lambda^h f(x_1, \ldots, x_n)$$

となるものが存在するとき f を重み付き斉次多項式といい, 組 $(w_1, \ldots, w_n; h)$ を f のウェイト系という.

定義 1.2. 以下の条件を満たす重み付き斉次多項式 $f \in S$ を**可逆多項式**という.

(1) f は $a_i \in \mathbb{C}^*$ および非負整数 $\mathbb{E}_{ij},\ i, j = 1, \ldots, n$ を用いて

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i \prod_{j=1}^{n} x_j^{\mathbb{E}_{ij}}$$

とあらわされる.

(2) n 次正方行列 $\mathbb{E} := (\mathbb{E}_{ij})$ は $\mathbb{Q}$ 上可逆な行列である.

(3) f の Jacobi 環

$$\mathrm{Jac}(f) := S \Big/ \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

は $\mathbb{C}$ 上有限次元である.

条件 (3) は正則関数 $f:\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}$ が原点に孤立特異点を持つことと同値である. また, Jacobi 環の次元を μ_f であらわし f の Milnor 数という.

可逆多項式 $f(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{i=1}^n a_i\prod_{j=1}^n x_j^{\mathbb{E}_{ij}}$ に対して, 以下の方程式

$$\mathbb{E}\begin{pmatrix}w_1\\ \vdots\\ w_n\end{pmatrix}=\det(\mathbb{E})\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}\ ,\ h:=\det(\mathbb{E})$$

の解 $W_f:=(w_1,\ldots,w_n;h)$ は f のウェイト系になる. このとき, W_f を f の標準ウェイト系といい, W_f は定数 $\mathrm{gcd}_f:=\gcd(w_1,\ldots,w_n,h)$ 倍を除いて一意に定まる. $\mathrm{gcd}_f=1$ のとき標準ウェイト系は簡約であるという. W_f は定義 1.2 (2) から決まる組み合わせ的な数である. また, f の Gorenstein パラメーター ε_f を以下で定義する.

$$\varepsilon_f:=\frac{1}{\mathrm{gcd}_f}\Big[\Big(\sum_{i=1}^n w_i\Big)-h\Big]$$

命題 1.3. 3 変数可逆多項式 $f\in\mathbb{C}[x_1,x_2,x_3]$ で $\varepsilon_f>0$ となるものは以下で分類される.

特異点型	$f(x_1,x_2,x_3)$	$(w_1,w_2,w_3;h)$
$A_\mu(\mu\geq 1)$	$x_1^{\mu+1}+x_2^2+x_3^2$	$(2,\mu+1,\mu+1;2(\mu+1))$
$D_\mu(\mu\geq 4)$	$x_1^2x_2+x_2^{\mu-1}+x_3^2$	$(\mu-2,2,\mu-1;2(\mu-1))$
E_6	$x_1^3+x_2^4+x_3^2$	$(4,3,6;12)$
E_7	$x_1^3+x_1x_2^3+x_3^2$	$(6,4,9;18)$
E_8	$x_1^3+x_2^5+x_3^2$	$(10,6,15;30)$

表 1　ADE 型可逆多項式

上の表の可逆多項式を総称して ADE 型可逆多項式といい, これらの多項式は特異点論においても ADE 型 (Klein) 特異点を定めることが知られている. Klein 特異点は正多面体群に由来する特異点でありその研究の歴史は長い. Klein 特異点に関しては [5] に詳しい解説がかかれている.

1.2　(次数付き) 行列因子化の圏

ここでは $f\in S$ を可逆多項式と仮定し, その標準ウェイト系を $(w_1,\ldots,w_n;h)$ とする. 標準ウェイト系によって多項式環 S には自然に次数付き代数の構造が定まる.

定義 1.4. $f(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{i=1}^n a_i\prod_{j=1}^n x_j^{\mathbb{E}_{ij}}$ を可逆多項式とする. 各変数 x_i と f に文字 $\vec{x_i},\vec{f}$ を対応させ, それらで生成される自由アーベル群 $\oplus_{i=1}^n\mathbb{Z}\vec{x_i}\oplus\mathbb{Z}\vec{f}$ を考える. 階数 1 のアーベル群

$$L_f:=\Big(\bigoplus_{i=1}^n\mathbb{Z}\vec{x_i}\oplus\mathbb{Z}\vec{f}\Big)/\Big(\vec{f}-\sum_{j=1}^n\mathbb{E}_{ij}\vec{x_j}\ ;\ i=1,\ldots,n\Big)$$

を f の極大次数という.

S は f の極大次数 L_f によって次数付き代数とみなせる．

$$S=\bigoplus_{\vec{l}\in L_f} S_{\vec{l}}$$

つまり, 任意の $\vec{l},\vec{l'}\in L_f$ に対して $S_{\vec{l}}\cdot S_{\vec{l'}}\subset S_{\vec{l+l'}}$ が成り立つ．各変数 x_i の次数 $\deg(x_i)$ を次数写像 $L_f\to\mathbb{Z}$, $\vec{x_i}\mapsto w_i/\mathrm{gcd}_f$, $\vec{f}\mapsto h/\mathrm{gcd}_f$ によって定める．$\deg(x_i)$ は f の標準ウェイト系 $(w_1,\ldots,w_n;h)$ の次数としてみることができる．

M を L_f 次数付き S 加群とすると, M の $\vec{l}\in L_f$ による次数シフト $M(\vec{l})$ が

$$M(\vec{l}):=\bigoplus_{\vec{l'}\in L_f} M(\vec{l})_{\vec{l'}}\ ,\ M(\vec{l})_{\vec{l'}}:=M_{\vec{l}+\vec{l'}}$$

で定まる. 次数シフトによって, 任意の $\vec{l}\in L_f$ に対して L_f 次数付き S 加群の圏 gr^{L_f}-S に自己同型関手 $(\vec{l})$ が定まる．

定義 1.5 (Eisenbud [1])**.** F_0,F_1 を L_f 次数付き自由 S 加群とし, $f_0:F_0\to F_1, f_1:F_1\to F_0(\vec{f})$ を $f_1\cdot f_0=f\cdot\mathrm{id}_{F_0}$, $f_0(\vec{f})\cdot f_1=f\cdot\mathrm{id}_{F_1}$ を満たす S 準同型写像とする．このとき, 組 (F_0,F_1,p_0,p_1) を f の L_f 次数付き行列因子化といい

$$\overline{F}:=\left(F_0 \underset{f_1}{\overset{f_0}{\rightleftarrows}} F_1\right)$$

であらわす．L_f 次数付き行列因子化 $\overline{F}$ のサイズを F_0 の自由 S 加群の階数として定める．

定義 1.6. $\overline{F}=\left(F_0 \underset{f_1}{\overset{f_0}{\rightleftarrows}} F_1\right)$, $\overline{F'}=\left(F'_0 \underset{f_1}{\overset{f_0}{\rightleftarrows}} F'_1\right)$ を f の L_f 次数付き行列因子化とする．

(1) L_f 次数付き行列因子化の射とは, S 加群準同型 $\phi_0:F_0\to F'_0$, $\phi_1:F_1\to F'_1$ で $\phi_1\cdot p_0=p'_0\cdot\phi_0$, $\phi_0(\vec{f})\cdot p_1=p'_1\cdot\phi_1$ を満たすものの組 $\phi:=(\phi_0,\phi_1)$ である．

(2) L_f 次数付き行列因子化の射 $\phi,\psi:\overline{F}\to\overline{F'}$ がホモトピックであるとは, S 加群準同型の組 $h_0:F_0\to F'_1(-\vec{f})$, $h_1:F_1\to F'_0$ で

$$\phi_0-\psi_0=h_1\cdot f_0+f'_1(\vec{f})\cdot h_0\ ,\ \phi_1-\psi_1=f'_0\cdot h_1+h_0(\vec{f})\cdot f_1$$

を満たすものが存在することをいい $\phi\sim\psi$ とかく．

定義 1.7. f の L_f **次数付き行列因子化の圏** $\mathrm{HMF}^{L_f}_S(f)$ を以下で定義する. 対象を f の L_f 次数付き行列因子化全体とし, 任意の対象 $\overline{F},\overline{F'}\in\mathrm{HMF}^{L_f}_S(f)$ に対して射の空間 $\mathrm{HMF}^{L_f}_S(f)(\overline{F},\overline{F'})$ は定義 1.6 (1) を満たす射の空間を定義 1.6 (2) によるホモトピーで割った商空間とする．

命題 1.8 (Happel [6])**.** f の L_f 次数付き行列因子化の圏 $\mathrm{HMF}^{L_f}_S(f)$ は三角圏である．

$\mathrm{HMF}^{L_f}_S(f)$ のシフト関手 T が, 対象 $\overline{F}=\left(F_0 \underset{f_1}{\overset{f_0}{\rightleftarrows}} F_1\right)$ に対して以下で定まる．

$$T\overline{F}:=\left(F_1 \underset{-f_0(\vec{f})}{\overset{-f_1}{\rightleftarrows}} F_0(\vec{f})\right)$$

また, 射 $\phi=(\phi_0,\phi_1)$ に対して $T(\phi):=(\phi_1,\phi_0(\vec{f}))$ とする.

任意の $\vec{l}\in L_f$ に対して, gr^{L_f}-S の自己同型関手 $(\vec{l})$ から $\mathrm{HMF}_S^{L_f}(f)$ の自己同型関手が以下のように自然に定まる. 対象 $\overline{F}=\left(F_0 \underset{f_1}{\overset{f_0}{\rightleftarrows}} F_1\right)$ に対して,

$$\overline{F}(\vec{l}) := \left(F_0(\vec{l}) \underset{f_1(\vec{l})}{\overset{f_0(\vec{l})}{\rightleftarrows}} F_1(\vec{l})\right)$$

とする. また, 射 $\phi=(\phi_0,\phi_1)$ に対して, $\phi(\vec{l}):=(\phi_0(\vec{l}),\phi_1(\vec{l}))$ とする. シフト関手 T と関手 $(\vec{l})$ について $T^2=(\vec{f})$ が成り立つことに注意する.

定義 1.9. 対象 $\overline{F}=\left(F_0 \underset{f_1}{\overset{f_0}{\rightleftarrows}} F_1\right)$, $\overline{F'}=\left(F'_0 \underset{f_1}{\overset{f_0}{\rightleftarrows}} F'_1\right)$ とその間の射 $\phi=(\phi_0,\phi_1)\in \mathrm{HMF}_S^{L_f}(f)(\overline{F},\overline{F'})$ に対して, 対象 $C(\phi)\in\mathrm{HMF}_S^{L_f}(f)$ を

$$C(\phi) := \left(F_1\oplus F'_0 \underset{c_1}{\overset{c_0}{\rightleftarrows}} F_0(\vec{f})\oplus F'_1\right)$$

で定義する. ただし,

$$c_0 := \begin{pmatrix} -f_1 & 0 \\ \phi_1 & f'_0 \end{pmatrix}, c_1 := \begin{pmatrix} -f_0(\vec{f}) & 0 \\ \phi_0(\vec{f}) & f'_1 \end{pmatrix}$$

とする.

命題 1.10. $\mathrm{HMF}_S^{L_f}(f)$ において, 対象 $\overline{F},\overline{F'}$ とその間の射 $\phi\in\mathrm{HMF}_S^{L_f}(f)(\overline{F},\overline{F'})$ に対して

$$\overline{F} \xrightarrow{\phi} \overline{F'} \longrightarrow C(\phi) \longrightarrow T\overline{F}$$

は完全三角系列である.

証明. 完全三角系列の公理を直接確認すればよいが煩雑になるため省略する. □

可逆多項式 f が与えられたとき, f の L_f 次数付き行列因子化を構成する具体的な方法を紹介する.

定義 1.11. 各 i , $1\le i\le s$ に対して $p_i\in S_{\vec{p_i}}$ とし, $p_1,\dots,p_s$ は S の正則列を定めるとする. また, $f\in(p_1,\dots,p_s)$ と仮定する. このとき, $h_i\in S_{\vec{f}-\vec{p_i}}$ が存在して $f=p_1h_1+\cdots+p_sh_s$ とかける. そこで, $P:=\oplus_{i=1}^s S(-\vec{p_i})$ とすると, L_f 次数付き S 加群 $M:=S/(p_1,\dots,p_s)$ の Koszul 複体

$$0\longrightarrow \wedge^s P\longrightarrow \wedge^{s-1}P\longrightarrow\cdots\longrightarrow\wedge^1 P\longrightarrow\wedge^0 P=S\longrightarrow M\longrightarrow 0$$

は, 以下の f の L_f 次数付き行列因子化 $\overline{F}=\left(F_0 \underset{f_1}{\overset{f_0}{\rightleftarrows}} F_1\right)$ を与える.

$$F_0 := \bigoplus_k (\wedge^{2k}P)(k\vec{f}) \ , \ F_1 := \bigoplus_k (\wedge^{2k-1}P)(k\vec{f})$$

である. また, $(h_1,\dots,h_s)$ によって $h^2=0$ を満たす $h:\wedge^i P\to\wedge^{i+1}P$ が定まり, Koszul 複体 $(\wedge^{\cdot} P,d)$ が $d\cdot h+h\cdot d=f\cdot\mathrm{id}_{\wedge^{\cdot}P}$ を満たすことから f_0,f_1 を得る. M の Koszul 複体から構成される f の L_f 次数付き行列因子化を M の stabilization といい M^{stab} であらわす.

例 1.12. $s=2$ のとする．$f=p_1h_1+p_2h_2$ となる S の正則列 $\{p_1,p_2\}$ に対して, L_f 次数付き S 加群 $M=S/(p_1,p_2)$ に対する Koszul 複体

$$0 \longrightarrow S(-\vec{p_1}-\vec{p_2}) \longrightarrow S(-\vec{p_1}) \oplus S(-\vec{p_2}) \longrightarrow S \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

を以下で定める．

$$d : S(-\vec{p_1}-\vec{p_2}) \to S(-\vec{p_1}) \oplus S(-\vec{p_2}) \ , \ x \mapsto (p_2x, p_1x)$$

$$d : S(-\vec{p_1}) \oplus S(-\vec{p_2}) \to S \ , \ (x_1,x_2) \mapsto p1x_1 - p_2x_2$$

これに対応する $h : \wedge^i P \to \wedge^{i+1} P$ は

$$h : S \to S(\vec{f}-\vec{p_1}) \oplus S(\vec{f}-\vec{p_2}) \ , \ y \mapsto (h_1y, -h_2y)$$

$$h : S(-\vec{p_1}) \oplus S(-\vec{p_2}) \to S(\vec{f}-\vec{p_1}-\vec{p_2}) \ , \ (y_1,y_2) \mapsto h_2y_1 + h_1y_2$$

である. このとき, M^{stab} は以下のようにかける.

$$M^{stab} = \left(S \oplus S(\vec{f}-\vec{p_1}-\vec{p_2}) \underset{f_1}{\overset{f_0}{\rightleftarrows}} S(\vec{f}-\vec{p_1}) \oplus S(\vec{f}-\vec{p_2}) \right)$$

ここで,

$$f_0 = \begin{pmatrix} h_1 & p_2 \\ -h_2 & p_1 \end{pmatrix} \ , \ f_1 = \begin{pmatrix} p_1 & -p_2 \\ h_2 & h_1 \end{pmatrix}$$

である. 一般の s についても同様に M の stabilization が構成でき、そのサイズは 2^{s-1} となる.

特に $\mathbb{C}=S/(x_1,\ldots,x_n)$ の stabilization は $\mathrm{HMF}_S^{L_f}(f)$ の対象の中でも重要である. その説明のために必要な三角圏に関するいくつかの定義を述べる.

定義 1.13. $\mathcal{T}$ を T をシフト関手とする三角圏とし, 任意の対象 $X,Y\in\mathcal{T}$ に対して射の空間 $\mathcal{T}(X,Y)$ は $\mathbb{C}$ ベクトル空間であり, $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{T}(X,T^kY)<\infty$ が成り立つとする.

(1) 対象 $E\in\mathcal{T}$ が例外的対象であるとは $\mathcal{T}(E,E)=\mathbb{C}$ かつ $\mathcal{T}(E,T^kE)=0$, $k\neq 0$ が成り立つことをいう.
(2) $E_1,\ldots,E_n\in\mathcal{T}$ を例外的対象とする．$\mathcal{E}=(E_1,\ldots,E_n)$ が例外的対象系であるとは, $i>j$ ならば任意の $k\neq 0$ に対して $\mathcal{T}(E_i,T^kE_j)=0$ が成り立つことをいう.
(3) 例外的対象系 $\mathcal{E}=(E_1,\ldots,E_n)$ が強例外的対象系であるとは, 任意の i,j と $k\neq 0$ に対して $\mathcal{T}(E_i,T^kE_j)=0$ が成り立つことをいう.
(4) 例外的対象系 $\mathcal{E}$ が $\mathcal{T}$ の例外的生成系であるとは, $\mathcal{E}$ を含む $\mathcal{T}$ の最小の充満三角部分圏 $\langle\mathcal{E}\rangle$ が $\mathcal{T}$ と三角圏同値となることをいう.

命題 1.14 (Dyckerhoff [7])**.** f を可逆多項式とする．$\mathcal{E}$ を $\mathrm{HMF}_S^{L_f}(f)$ の例外的対象系とし, $\mathcal{E}$ を含む最小の充満三角部分圏を $\langle\mathcal{E}\rangle$ とする．このとき,

(1) $\langle\mathcal{E}\rangle$ は $\mathbb{C}^{stab}$ を含む.
(2) $\langle\mathcal{E}\rangle$ は次数シフトで閉じる.

が成り立つならば, $\mathcal{E}$ は $\mathrm{HMF}_S^{L_f}(f)$ の例外的生成系になる.

1.3 特異点の普遍開折

この節における命題は事実として扱うことにする. より詳しい解説は [8] にかかれている. ここでは f を命題 1.3 の ADE 型可逆多項式とする. 正則関数 $f:\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}$ は原点に孤立特異点を持つが普遍開折はその特異点の変形を与える. $(t_1,\dots,t_{\mu_f})$ を座標系とする μ_f 次元複素多様体 $B=\mathbb{C}^{\mu_f}$ と $(\mathbf{x};\mathbf{t})=(x_1,x_2,x_3;t_1,\dots,t_{\mu_f})$ を座標系とする $3+\mu_f$ 次元複素多様体 $\mathcal{X}=\mathbb{C}^3\times B$ を考える. $p:\mathcal{X}\to B$ を B への射影

$$p:\mathcal{X}=\mathbb{C}^3\times B\to B\ ,\ (x_1,x_2,x_3;t_1,\dots,t_{\mu_f})\mapsto(t_1,\dots,t_{\mu_f})$$

とする.

定義 1.15. $\{u_i(\mathbf{x})\}_{i=1}^{\mu_f}$ を f の Jacobi 環 $\mathrm{Jac}(f)$ の単項式基底とし, $u_1(\mathbf{x}):=1$ とする. $F(\mathbf{x};\mathbf{t})$ を

$$F(\mathbf{x};\mathbf{t}):=f(\mathbf{x})+\sum_{i=1}^{\mu_f}t_iu_i(\mathbf{x})$$

で定める. また, $\mathcal{C}$ を射影 $p:\mathcal{X}\to B$ に関して相対的な F の臨界点集合とする. つまり,

$$\mathcal{O}_{\mathcal{C}}:=\mathcal{O}_{\mathcal{X}}\Big/\left(\frac{\partial F(\mathbf{x};\mathbf{t})}{\partial x_1},\frac{\partial F(\mathbf{x};\mathbf{t})}{\partial x_2},\frac{\partial F(\mathbf{x};\mathbf{t})}{\partial x_3}\right)$$

を構造層とする $\mathcal{X}$ の解析的部分集合を $\mathcal{C}$ とする.

命題 1.16. 定義 1.15 で定めた $F(\mathbf{x};\mathbf{t})$ は以下の性質を満たす.

(1) F は f の開折である. つまり, $F(\mathbf{x};\mathbf{0})=f(\mathbf{x})$ が成り立つ.

(2) T_B を B の接束とする. 小平-Spencer 写像といわれる $\mathcal{O}_B$ 準同型写像

$$T_B\to p_*\mathcal{O}_{\mathcal{C}}\ ,\ \delta\mapsto\left[\hat{\delta}F\right]$$

は同型である. ここで, $\hat{\delta}$ は $\delta\in T_B$ の p に関する持ち上げとする.

定義 1.17. ADE 型可逆多項式 f に対して組 $(F;p:\mathcal{X}\to B)$ を f の**普遍開折**という.

命題 1.18. B の一般の点 $\mathbf{t}$ に対して以下が成り立つ.

(1) $\mathcal{C}\cap p^{-1}(\mathbf{t})$ は互いに相異なる μ_f 個の点 $\{\mathbf{p_1},\dots,\mathbf{p_{\mu_f}}\}$ である.

(2) 各点 $\mathbf{p_i}$ における正則関数 F の臨界値 $F(\mathbf{p_i};\mathbf{t})$ は互いに相異なる.

(3) 各点 $\mathbf{p_i}$ について, 組 $(F^{-1}(F(\mathbf{p_i};\mathbf{t})),\mathbf{p_i})$ は A_1 型特異点を定める.

例 1.19. A_μ 型特異点の普遍開折を与える正則関数 F は以下で与えられる.

$$F(\mathbf{x};\mathbf{t}):=x_1^{\mu+1}+x_2^2+x_3^2+\sum_{i=1}^{\mu}t_ix_1^{\mu-i}$$

2　主結果

L_f 次数付き行列因子化の圏 $\mathrm{HMF}_S^{L_f}(f)$ の変形を前節で定義した f の普遍開折 $(F; p: \mathcal{X} \to B)$ を用いて定式化したい. つまり, $\mathrm{HMF}_S^{L_f}(f)$ を変形した圏は命題 1.18 の圏化となるように定式化する. そのために, f の普遍開折を与える正則関数 F の行列因子化の圏を考えるが, F は一般に定数項や線形項を含むため非自明な行列因子化が存在しない. そこで, 筆者は F に仮想定数 q を加え, F を重み付き斉次多項式とみなすことで次数付き行列因子化の圏を構成した.

定義 2.1. f を ADE 型可逆多項式とし, F を定義 1.15 で定義される正則関数とする. F を $\mathbf{x}$ を変数とする多項式とみて, 重み付き斉次多項式 F_q を

$$F_q(\mathbf{x}, q) := f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{\mu_f} t_i u_i(\mathbf{x}) \cdot q^{h-\deg(u_i)}$$

で定義する. ただし, q は f の標準ウェイト系 $(w_1, \ldots, w_n; h)$ において次数 1 の変数とする. つまり, F_q は $(w_1, \ldots, w_n, 1; h)$ をウェイト系とする重み付き斉次多項式である.

F_q とそのウェイト系 $(w_1, \ldots, w_n, 1; h)$ に関して L_{F_q} 次数付き行列因子化の圏 $\mathrm{HMF}_{S[q]}^{L_{F_q}}(F_q)$ を考えることができる. A_μ 型多項式について, 例 1.19 より F_q は以下のようにかける.

$$F_q(x_1, x_2, x_3, q) = x_1^{\mu+1} + x_2^2 + x_3^2 + \sum_{i=1}^{\mu} t_i x_1^{\mu-i} \cdot q^{2i+2}$$

Knörrer's Periodicity[2] より $F_q(x, q) = x^{\mu+1} + \sum_{i=1}^{\mu} t_i x^{\mu-i} \cdot q^{i+1}$ の行列因子化の圏をみれば十分である. 以下, 一般の点として $(t_1, \ldots, t_\mu) = (1, \ldots, 1)$ とした場合について議論する.

補題 2.2. $F_q(x, q) = x^{\mu+1} + \sum_{i=1}^{\mu} x^{\mu-i} \cdot q^{i+1}$ に対して, $L_{F_q} \simeq \mathbb{Z}\vec{x}$ が成り立つ.

以下 $\mu = 2$ とする. 可逆多項式の行列因子化の圏は命題 1.14 より, $\mathbb{C}^{stab}$ とその次数シフトと T シフトとそれらの直和たちで生成される. いま, $F_q = x^3 + xq^2 + q^3$ は可逆多項式ではないが $\mathrm{HMF}_{S[q]}^{L_{F_q}}(F_q)$ の構造をみるために, 筆者は $\mathbb{C}^{stab}$ とその次数シフトと T シフトたちの直和からなる $\mathrm{HMF}_{S[q]}^{L_{F_q}}(F_q)$ の充満部分加法圏の構造を明らかにした.

$\mathrm{HMF}_{S[q]}^{L_{F_q}}(F_q)$ における $\mathbb{C}^{stab}$ は以下のようにかける.

$$\mathbb{C}^{stab} = \left(S \oplus S(\vec{x}) \underset{f_1}{\overset{f_0}{\rightleftarrows}} S(2\vec{x}) \oplus S(2\vec{x}) \right)$$

$$f_0 = \begin{pmatrix} x^2 & q \\ -q(x+q) & x \end{pmatrix}, \ f_1 = \begin{pmatrix} x & -q \\ q(x+q) & x^2 \end{pmatrix}$$

命題 2.3. 上の $\mathbb{C}^{stab}$ に関して次が成り立つ.

(1) $\mathrm{HMF}_{S[q]}^{L_{F_q}}(F_q)(\mathbb{C}^{stab}, \mathbb{C}^{stab}) = \mathbb{C}\mathrm{id}$

(2) $\mathrm{HMF}_{S[q]}^{L_{F_q}}(F_q)(\mathbb{C}^{stab}, \mathbb{C}^{stab}(k\vec{x})) = 0 \ , \ k \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\}$

(3) $\mathrm{HMF}^{L_{F_q}}_{S[q]}(F_q)(\mathbb{C}^{stab}, T\mathbb{C}^{stab}(k\vec{x})) = 0\ ,\ k \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$

(4) $\mathrm{HMF}^{L_{F_q}}_{S[q]}(F_q)(\mathbb{C}^{stab}, T\mathbb{C}^{stab}(-\vec{x})) = \mathbb{C}a \oplus \mathbb{C}a'$

(5) $\mathrm{HMF}^{L_{F_q}}_{S[q]}(F_q)(T\mathbb{C}^{stab}(-\vec{x}), \mathbb{C}^{stab}(\vec{x})) = \mathbb{C}b \oplus \mathbb{C}b'$

(6) $\mathrm{HMF}^{L_{F_q}}_{S[q]}(F_q)(\mathbb{C}^{stab}, \mathbb{C}^{stab}(\vec{x})) = \mathbb{C}c$

ただし, a, a', b, b', c は関係式 $ba' = b'a = c, ba = b'a' = 0$ を満たす.

注意 2.4. 命題 2.3 (1), (3) より $\mathbb{C}^{stab}$ は $\mathrm{HMF}^{L_{F_q}}_{S[q]}(F_q)$ の例外的対象であることが分かる.

上の命題より $\mathbb{C}^{stab}(k\vec{x}), T\mathbb{C}^{stab}(k\vec{x}), k \in \mathbb{Z}$ からなる充満部分加法圏の構造は以下のようにかける.

$$
\begin{tikzcd}
 & T\mathbb{C}^{stab}(-2\vec{x}) \arrow[rr, "c'(-\vec{x})"] \arrow[dr, "{b,b'(-\vec{x})}"] & & T\mathbb{C}^{stab}(-\vec{x}) \arrow[rr, "c'"] \arrow[dr, "{b,b'}"] & & T\mathbb{C}^{stab} \\
\mathbb{C}^{stab}(-\vec{x}) \arrow[ur, "{a,a'(-\vec{x})}"] \arrow[rr, "c(-\vec{x})"'] & & \mathbb{C}^{stab} \arrow[ur, "{a,a'}"] \arrow[rr, "c"'] & & \mathbb{C}^{stab}(\vec{x}) \arrow[ur, "{a,a'(\vec{x})}"] &
\end{tikzcd}
$$

参考文献

[1] David Eisenbud. Homological algebra on a complete intersection, with an application to group representations. *Transactions of the American Mathematical Society*, Vol. 260, No. 1, pp. 35–64, 1980.

[2] Horst Knörrer. Cohen-macaulay modules on hypersurface singularities I. *Invent. Math.*, Vol. 88, pp. 153–164, 1987.

[3] Hiroshige Kajiura, Kyoji Saito, and Atsushi Takahashi. Matrix factorizations and representations of quivers Ⅱ: type ADE case. *Advances in mathematics*, Vol. 211, No. 1, pp. 327–362, 2007.

[4] Hiroshige Kajiura, Kyoji Saito, and Atsushi Takahashi. Triangulated categories of matrix factorizations for regular systems of weights with ε=- 1. *Advances in Mathematics*, Vol. 220, No. 5, pp. 1602–1654, 2009.

[5] 松澤淳一. 特異点とルート系. 朝倉書店, 2002.

[6] Dieter Happel. *Triangulated categories in the representation of finite dimensional algebras*, Vol. 119. Cambridge University Press, 1988.

[7] Tobias Dyckerhoff. Compact generators in categories of matrix factorizations. 2011.

[8] 高橋篤史. 原始形式・ミラー対称性入門. 岩波書店, 2021.