

# ヒルツェブルフ曲面の SYZ ミラーとモースホモトピー

千葉大学大学院融合理工学府 数学情報科学専攻  
中西隼斗 (Hayato NAKANISHI) \*

## 概要

ヒルツェブルフ曲面  $\mathbb{F}_k$  を複素多様体として考えた場合のホモロジー的ミラー対称性を SYZ 構成とモースホモトピーを用いて考える。 $k = 1$  の場合にはホモロジー的ミラー対称性が成り立つことが知られている (二木-梶浦, 2020)。本講演では、この結果を拡張し正整数  $k$  に対してヒルツェブルフ曲面  $\mathbb{F}_k$  のホモロジー的ミラー対称性が成り立つことを示す。

## 1 導入

ミラー対称性とは、シンプレクティック多様体  $X$  と複素多様体  $\check{X}$  との間のある種の対称性のことであり、その定式化の一つとして Kontsevich によるホモロジー的ミラー対称性予想がある [8]。このホモロジー的ミラー対称性予想とは、シンプレクティック多様体  $X$  におけるラグランジュ部分多様体からなる深谷圏  $Fuk(X)$  と呼ばれる  $A_\infty$  圏と、複素多様体  $\check{X}$  上の接続層の導来圏  $D^b(Coh(\check{X}))$  が等価になるという予想である。より正確に言えば、深谷圏から誘導される三角圏と接続層の導来圏が三角圏として同値になるという予想である。一般に、 $A_\infty$  圏から三角圏を構成する方法が知られており [1, 8]、 $A_\infty$  擬同型な 2 つの  $A_\infty$  圏から誘導される三角圏は互いに三角圏として同型となることが知られている。そのため、接続層の導来圏が  $A_\infty$  圏から構成される場合は、元となる  $A_\infty$  圏と深谷圏が  $A_\infty$  擬同型となることを示すことができれば誘導される三角圏の間の同型が得られ、ホモロジー的ミラー対称性予想が肯定的に解決する。

一方で、ミラー対称性があるようなシンプレクティック多様体と複素多様体の組 (ミラー対) を構成する方法として Strominger-Yau-Zaslow らにより提案された構成 (SYZ 構成) がある [13]。これは、与えられたカラビ・ヤウ多様体  $M$  をトーラス束として表すことでミラー多様体  $\check{M}$  が双対トーラス束として構成されるというものである (図 1)。この構成のもとで、Kontsevich-Soibelman らは底

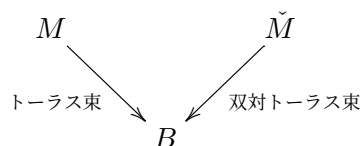


図 1 SYZ 構成

\* E-mail: hayato\_nakanishi@chiba-u.jp

空間がコンパクト多様体であって特異ファイバーがない場合にモースホモトピーを用いてホモロジー的ミラー対称性の議論をおこなった [9]。これは深谷-Oh らによる余接束における深谷圏と底空間におけるモースホモトピーの圏が同値になるという結果 [3] に基づいており、ファイバー毎に  $\mathbb{Z}^n$  作用を考えることでトラス束の場合に拡張されたモースホモトピーの圏を用いて議論がなされている。

本稿では、ヒルツェブルフ曲面  $\mathbb{F}_k$  を複素多様体とし、SYZ 構成によりそのミラー多様体を考え、モースホモトピーの圏を用いてホモロジー的ミラー対称性を考察する。 $k = 1$  の場合は二木-梶浦らによる結果 [6] があり、接続層の導来圏を生成するような正則直線束からなる DG 圏と、対応するラグランジュ切断からなるモースホモトピーの圏が擬同型になることが知られている。この結果を拡張し、正整数  $k$  の場合でも成り立つことを示す。また、 $k = 1$  の場合はモースホモトピーの圏は極小な DG 圏となるが、 $k \geq 2$  の場合は極小性が成り立たないことが明らかになった。これについても説明する。

## 2 準備

### 2.1 ヒルツェブルフ曲面 $\mathbb{F}_k$ と SYZ 構成

ヒルツェブルフ曲面  $\mathbb{F}_k$  は次で定義されるケーラー多様体である。

$$\mathbb{F}_k := \{([s_0 : s_1], [t_0 : t_1 : t_2]) \mid (s_0)^k t_0 = (s_1)^k t_1\} \subset \mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^2.$$

開被覆を

$$U_1 = \{t_1 \neq 0, s_0 \neq 0\}, \quad U_2 = \{t_0 \neq 0, s_1 \neq 0\}, \quad U_3 = \{t_2 \neq 0, s_0 \neq 0\}, \quad U_4 = \{t_2 \neq 0, s_1 \neq 0\}$$

とし、以下では  $U_2$  上の局所複素座標  $(u, v) := \left(\frac{s_0}{s_1}, \frac{t_2}{t_0}\right)$  を固定する。各成分への射影を  $\text{pr}_1 : \mathbb{F}_k \rightarrow \mathbb{C}P^1$ ,  $\text{pr}_2 : \mathbb{F}_k \rightarrow \mathbb{C}P^2$  とする。このとき、 $\mathbb{F}_k$  上のケーラー形式を  $\mathbb{C}P^n$  のフビニ・スタディ形式  $\omega_{\mathbb{C}P^n}$  を用いて

$$\tilde{\omega} := C_1 \omega_{\mathbb{C}P^1} + C_2 \omega_{\mathbb{C}P^2},$$

と定める。ここで、 $C_1, C_2$  は正の実数である。このとき、実トラス  $T^2$  が

$$(e^{\sqrt{-1}\theta_1}, e^{\sqrt{-1}\theta_2}) \cdot ([s_0 : s_1], [t_0 : t_1 : t_2]) := \left([e^{\sqrt{-1}\theta_1} s_0 : s_1], [t_0 : e^{\sqrt{-1}k\theta_1} t_1 : e^{\sqrt{-1}\theta_2} t_2]\right),$$

により作用し、これに対応してモーメント写像が

$$\mu([s_0 : s_1], [t_0 : t_1 : t_2]) = \left(\frac{2C_1 |s_1|^2}{|s_0|^2 + |s_1|^2} + k \frac{2C_2 |t_1|^2}{|t_0|^2 + |t_1|^2 + |t_2|^2}, \frac{2C_2 |t_2|^2}{|t_0|^2 + |t_1|^2 + |t_2|^2}\right),$$

で与えられる。このモーメント写像  $\mu : \mathbb{F}_k \rightarrow \mathbb{R}^2$  の像  $P := \mu(\mathbb{F}_k)$  は

$$P = \{(x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x^1 \leq 2(C_1 + kC_2) - kx^2, 0 \leq x^2 \leq 2C_2\},$$

となり、これをモーメント多面体と呼ぶ (図 2)。以下では  $C_1 = C_2 = 1$  とする。ここで、

$$\check{M} := U_1 \cap U_2 \cap U_3 \cap U_4, \quad B := \text{Int}(P),$$

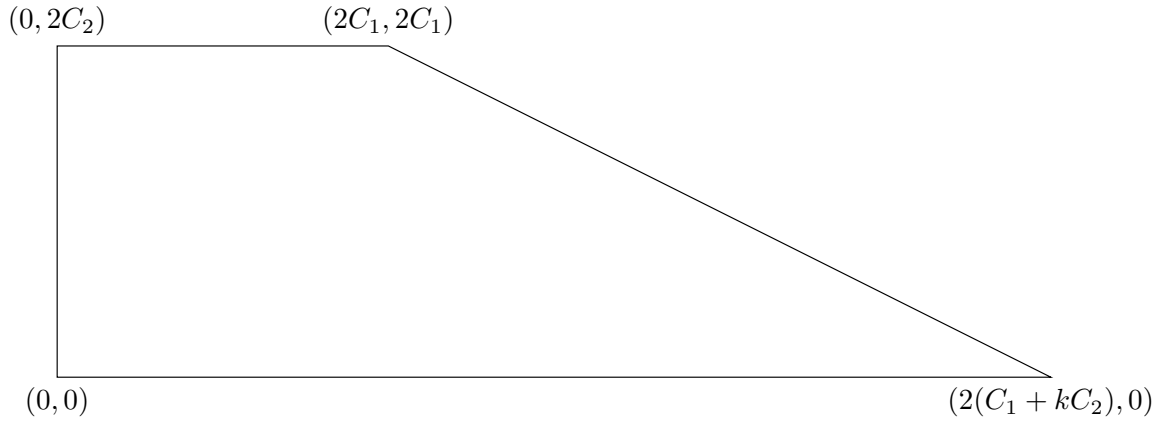


図2  $\mathbb{F}_k$  のモーメント多面体.

とすると、モーメント写像の  $\check{M}$  への制限はトーラス束となる。このとき、 $\check{M}$  には  $(u, v) = (e^{x_1 + \sqrt{-1}y_1}, e^{x_2 + \sqrt{-1}y_2})$  によりアフィン構造が入る。このアフィン座標において  $\mathbb{F}_k$  から誘導される  $\check{M}$  上のケーラー形式は

$$\check{\omega} = 4 \frac{k^2(1+t)s^k dx_1 \wedge dy_1 - ks^k t dx_1 \wedge dy_2 - ks^k t dx_2 \wedge dy_1 + (1+s^k)t dx_2 \wedge dy_2}{(1+s^k+t)^2} + 4 \frac{s dx_1 \wedge dy_1}{(1+s)^2},$$

と表される。これにより  $B$  上の計量  $\{g^{ij}\}$  が

$$\begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4s}{(1+s)^2} + \frac{4k^2(1+t)s^k}{(1+s^k+t)^2} & \frac{-4ks^k t}{(1+s^k+t)^2} \\ \frac{-4ks^k t}{(1+s^k+t)^2} & \frac{4(1+s^k)t}{(1+s^k+t)^2} \end{pmatrix},$$

により与えられる。ここで、 $s := |u|^2 = e^{2x_1}$ ,  $t := |v|^2 = e^{2x_2}$  であり、 $\check{M} \cong T^*B/2\pi\mathbb{Z}^2$  とみなすことができる。このとき、関数  $\psi := \log(1 + e^{2kx_1} + e^{2x_2}) + \log(1 + e^{2x_1})$  を考えると  $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_j} = g^{ij}$  となるので、双対座標が次のようにして定まる。

$$(x^1, x^2) := \left( \frac{\partial \psi}{\partial x_1}, \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \right) = \left( \frac{2e^{2x_1}}{1 + e^{2x_1}} + k \frac{2e^{2kx_1}}{1 + e^{2kx_1} + e^{2x_2}}, \frac{2e^{2x_2}}{1 + e^{2kx_1} + e^{2x_2}} \right).$$

また、ファイバー座標  $y_j$  に対しても  $B$  上の計量  $\{g^{ij}\}$  に関する双対座標が  $y^i = \sum_{j=1}^2 g^{ji} y_j$  で与えられる。これにより  $M := TB/2\pi\mathbb{Z}^2$  と置くことでトーラス束  $\mu|_{\check{M}} : \check{M} \rightarrow B$  の双対トーラス束  $\pi : M \rightarrow B$  が得られる。

## 2.2 正則直線束のなす DG 圏

一般に、ヒルツェブルフ曲面  $\mathbb{F}_k$  上の正則直線束は以下の因子の線型結合により構成できる [4]。

$$D_{12} = \{t_2 = 0\}, \quad D_{24} = \{s_0 = t_1 = 0\}, \quad D_{13} = \{s_1 = t_0 = 0\}, \quad D_{34} = \{t_0 = t_1 = 0\}.$$

因子  $D$  に対応する正則直線束を  $\mathcal{O}(D)$  と書くことにする。このとき、 $\mathbb{C}P^n$  上の正則直線束  $\mathcal{O}_{\mathbb{C}P^n}(1)$  の  $\text{pr}_j$  による引き戻しは次のように同一視される。

$$\pi_1^* \mathcal{O}_{\mathbb{C}P^1}(1) = \mathcal{O}(D_{24}), \quad \pi_2^* \mathcal{O}_{\mathbb{C}P^2}(1) = \mathcal{O}(D_{12}).$$

これらを用いることでヒルツェブルフ曲面  $\mathbb{F}_k$  上の正則直線束を生成できる。そこで

$$\mathcal{O}(a, b) := \mathcal{O}(aD_{24} + bD_{12}).$$

とする。この  $\mathcal{O}(a, b)$  には自然な接続が

$$D_{(a,b)} := d - a \frac{s(dx_1 + \sqrt{-1}dy_1)}{1+s} - b \frac{ks(dx_1 + \sqrt{-1}dy_1) + t(dx_2 + \sqrt{-1}dy_2)}{1+s^k+t}.$$

で与えられる。

次に  $\mathbb{F}_k$  上の正則直線束からなる DG 圏  $DG(\mathbb{F}_k)$  を考える。対象は上記の正則直線束と接続形式の組  $(\mathcal{O}(a, b), D_{(a,b)})$  とする。射の空間を次で定める。

$$DG(\mathbb{F}_k)^*((\mathcal{O}(a_1, b_1), D_{(a_1, b_1)}), (\mathcal{O}(a_2, b_2), D_{(a_2, b_2)})) := \Gamma(\mathcal{O}(a_1, b_1), \mathcal{O}(a_2, b_2)) \otimes_{C^\infty(\mathbb{F}_k)} \Omega^{0,*}(\mathbb{F}_k)$$

ここで、 $\Gamma(\mathcal{O}(a_1, b_1), \mathcal{O}(a_2, b_2))$  は  $\mathcal{O}(a_1, b_1)$  から  $\mathcal{O}(a_2, b_2)$  への滑らかなベクトル束写像の空間であり、 $\Omega^{0,*}(\mathbb{F}_k)$  は反正則微分形式の空間である。射の合成はベクトル束写像の合成とウェッジ積により定まる。また、DG 構造が次のようにして入る。接続を  $D_{(a,b)} = D_{(a,b)}^{(1,0)} + D_{(a,b)}^{(0,1)}$  と正則部分と反正則部分に分解し、 $\psi \in DG(\mathbb{F}_k)^r((\mathcal{O}(a_1, b_1), D_{(a_1, b_1)}), (\mathcal{O}(a_2, b_2), D_{(a_2, b_2)}))$  に対して線形写像を

$$d(\psi) := 2D_{(a_2, b_2)}^{(0,2)}\psi - (-1)^r 2\psi D_{(a_1, b_1)}^{(0,2)},$$

と定める。対象が正則直線束であることから、この線形写像  $d$  は  $d^2 = 0$  を満たし、射の合成と両立する。特に、構成より

$$DG(\mathbb{F}_k)(\mathcal{O}(a_1, b_1), \mathcal{O}(a_2, b_2)) \simeq DG(\mathbb{F}_k)(\mathcal{O}, \mathcal{O}(a_2 - a_1, b_2 - b_1)).$$

となり、ゼロ次のコホモロジーは正則な大域切断の空間となる。すなわち

$$\begin{aligned} H^0(DG(\mathbb{F}_k)(\mathcal{O}(a_1, b_1), \mathcal{O}(a_2, b_2))) &\simeq H^0(DG(\mathbb{F}_k)(\mathcal{O}(0, 0, 0), \mathcal{O}(a_2 - a_1, b_2 - b_1))) \\ &\simeq \Gamma(\mathbb{F}_k, \mathcal{O}(a_2 - a_1, b_2 - b_1)), \end{aligned}$$

となり、局所座標  $(u, v)$  を用いると  $\Gamma(\mathbb{F}_k, \mathcal{O}(a, b))$  の生成元は

$$\psi_{(i_1, i_2)} := u^{i_1} v^{i_2} \quad (0 \leq i_2 \leq b, 0 \leq i_1 \leq a + k(b - i_2)),$$

と表される [4]。

次に  $\check{M}$  上の正則直線束からなる DG 圏  $\mathcal{V}$  を定める。対象を  $\check{M}$  上の正則直線束  $V$  であって次のような  $U(1)$  接続  $D$  を持つものとする。

$$D := d - \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \sum_{i=1}^2 y^i(x) dy_i,$$

射の空間や射の合成、DG 構造は  $DG(\mathbb{F}_k)$  と同様にして定義される。

最後に  $DG(\mathbb{F}_k)$  から  $\mathcal{V}$  への忠実関手  $I : DG(\mathbb{F}_k) \rightarrow \mathcal{V}$  を考える。 $\mathcal{O}(a, b)$  のファイバーを同型  $\Psi_{(a,b)} := (1+s)^{\frac{a}{2}}(1+s^k+t)^{\frac{b}{2}}$  で捻ることで  $A_{(a,b)}$  から  $dx_j$  の項を消去することができる。このようにして同型で捻った正則直線束を  $\tilde{\mathcal{O}}(a, b)$  と書くことにする。この  $\tilde{\mathcal{O}}(a, b)$  を  $\check{M}$  に制限することで忠実関手  $I : DG(\mathbb{F}_k) \rightarrow \mathcal{V}$  が定まる。 $DG(\mathbb{F}_k)$  の  $I$  による像を  $\mathcal{V}' := I(DG(\mathbb{F}_k))$  と書くことにする。

## 2.3 ラグランジュ切断と SYZ 変換

$\pi : M \rightarrow B$  の切断を  $s : B \rightarrow M$  を考え、そのリフト  $\underline{s} : B \rightarrow TB$  のグラフを考える。ここで、 $TB \cong T^*B$  であることから  $\underline{s}$  のグラフがラグランジュ部分多様体であるかどうかを  $T^*B$  において確認することができる。すなわち、切断を  $\underline{s} : B \rightarrow T^*B$  とみなし、ラグランジュ部分多様体かどうかを確認する。 $T^*B$  の切断は 1-形式  $\sum y_j dx^j$  であり、そのグラフがラグランジュ部分多様体となることとある局所的な関数  $f$  が存在して  $df = \sum y_j dx^j$  となることが同値である。このような関数  $f$  をラグランジュ切断のポテンシャルと呼ぶことにする。ここで、 $y_j = \sum g_{ji} y^i$ ,  $dx_i = \sum g_{ji} dx^i$ ,  $y^i = s^i$  であるから

$$df = \sum_{j=1}^2 y_j dx^j = \sum_{i=1}^2 y^i dx_i = \sum_{i=1}^2 s^i dx_i$$

となる。

次に、 $\check{M}$  上の正則直線束と  $\pi : M \rightarrow B$  のラグランジュ切断の間の対応 (SYZ 変換) を復習する。 $\pi : M \rightarrow B$  の切断  $s : B \rightarrow M$  に対して、 $\check{M}$  上の直線束  $V$  であって次の形の接続  $D$  を持つもの考える。

$$D := d - \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \sum_{i=1}^2 s^i(x) dy_i,$$

このとき、この接続  $D$  が正則直線束構造を定めることは曲率形式の  $(0, 2)$ -部分が消えることと同値であり、これは行列  $(\frac{\partial s^i}{\partial x_j})$  が対称行列になることと同値となる。このとき  $d(\sum s^i dx_i) = 0$  となるので、Poincaré の補題より、ある局所的な関数  $f$  が存在して  $df = \sum s^i dx_i$  となる。以上をまとめると、切断  $s : B \rightarrow TB$  のグラフがラグランジュ部分多様体になることと、 $\check{M}$  上の直線束における接続  $D = d - \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \sum_{i=1}^2 s^i(x) dy_i$  が正則直線束構造を定めることが同値となる。すなわち、 $\check{M}$  上の正則直線束であって上記の形の接続を持つものが与えられたとき、 $dy$  項の係数としてラグランジュ切断が得られ、この対応を SYZ 変換と呼ぶ [10, 2]。

## 2.4 モースホモトピーの圏

次に、モースホモトピーの圏  $Mo(P)$  を復習する [5, 6, 11, 12]。対象は 2.2 節にて構成した  $\check{M}$  上の正則直線束  $\tilde{O}(a, b)$  に対応するラグランジュ切断  $L(a, b)$  であってモーメント多面体  $P$  を含む開集合上に滑らかに拡張できるものとする。2つのラグランジュ切断  $L, L'$  のポテンシャルをそれぞれ  $f_L, f_{L'}$  とし、その差  $f_L - f_{L'}$  が Bott-Morse 関数になるとする。このとき、clean に交わる<sup>\*1</sup>2つのラグランジュ切断の順序付けられた組  $(L, L')$  を考える。射の空間  $Mo(P)(L, L')$  を条件 (M1), (M2) を満たすような  $\pi(L \cap L') \subset P$  の連結成分で張られる  $\mathbb{Z}$ -次数付きベクトル空間として定義する。

(M1) 連結成分  $V \subseteq \pi(L \cap L')$  に対して、一般の点  $v \in V$  での勾配ベクトル場  $-\text{grad}(f_L - f_{L'})$  の安定多様体  $S_v \subseteq \check{B}$  の次元が定数となる。このとき  $V$  の次数を  $|V| := \dim(S_v)$  で定める。

<sup>\*1</sup> 2つの対象  $L, L'$  が clean に交わるとは、 $x \in L \cap L'$  に対して  $T_x L \cap T_x L' = T_x(L \cap L')$  となることである。

(M2) 連結成分  $V \subset \pi(L \cap L')$  に対して、一般の点  $v \in V$  であって  $S_v \cap P \subset S_v$  の内点になるようなものが存在する。

次に、射の空間における  $A_\infty$  構造について考える。一般に、高次の積が定義できるが、本稿では微分構造  $m_1$  と射の合成  $m_2$  についてのみ扱う。まずは微分構造  $m_1$  について考える。2つのラグランジュ切断  $L, L'$  に対して、 $V, V' \subset \pi(L \cap L')$  をそれらの交叉をモーメント多面体に射影したものの連結成分とし、これらの次数は  $|V'| = |V| + 1$  を満たすとする。このとき、 $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow P$  を  $v \in V$  を始点とし  $v' \in V'$  を終点とするような勾配ベクトル場  $-\text{grad}(f_L - f_{L'})$  の積分曲線を考える。このような積分曲線の重み付き数え上げ<sup>\*2</sup>により  $m_1: Mo(P)(L, L') \rightarrow Mo(P)(L, L')$  を定義する。

$$m_1; V \mapsto \sum_{\substack{V' \in Mo(P)(L, L') \\ |V'| = |V| + 1}} \sum_{[\gamma]} e^{-A(\gamma)} V',$$

ここで、 $A(\gamma)$  は  $\pi^{-1}(\gamma(\mathbb{R}))$  における  $L$  と  $L'$  に囲まれる円盤のシンプレクティック面積である。次に射の合成  $m_2$  について考える。3つのラグランジュ切断  $L_1, L_2, L_3$  に対して、 $V_{12}, V_{23}, V_{13} \subset P$  をそれぞれ交叉  $L_1 \cap L_2, L_2 \cap L_3, L_1 \cap L_3$  をモーメント多面体に射影したものの連結成分とし、これらの次数は  $|V_{13}| = |V_{12}| + |V_{23}|$  を満たすとする。このとき、 $\Gamma$  を  $v_{12} \in V_{12}$  と  $v_{23} \in V_{23}$  を始点とし  $v_{13} \in V_{13}$  を終点とするような勾配木を考える (図3)。 $m_1$  と同様に、このような勾配木の重み付

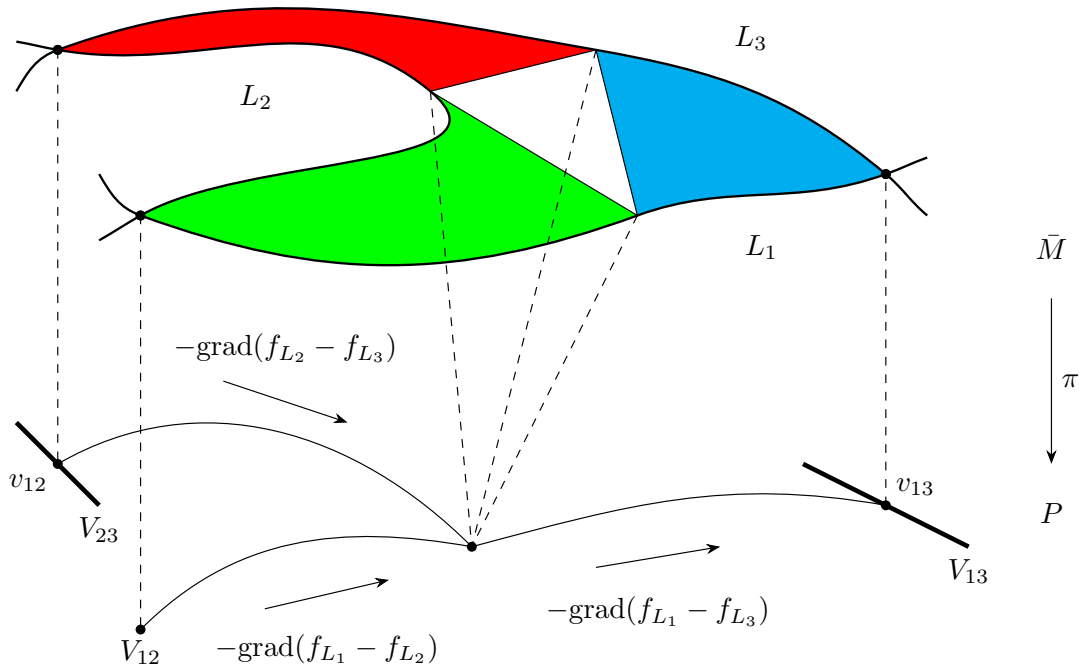


図3 ラグランジュ切断と勾配木のイメージ図

<sup>\*2</sup> より具体的には、始点と終点をそれぞれ  $V, V'$  内全体で考える。ポテンシャルの差が Bott-Morse 関数であり  $V$  と  $V'$  の次数が  $|V'| = |V| + 1$  であることから、そのような積分曲線のモジュライ空間が 0 次元となり、特に、有限集合になるので数え上げることができる。

き数え上げにより  $m_2 : Mo(P)(L_1, L_2) \otimes Mo(P)(L_2, L_3) \rightarrow Mo(P)(L_1, L_3)$  を定義する。

$$m_2; (V_{12}, V_{23}) \mapsto \sum_{\substack{V_{13} \in Mo(P)(L_1, L_3) \\ |V_{13}| = |V_{12}| + |V_{23}|}} \sum_{[\gamma]} e^{-A(\Gamma)} V_{13}.$$

このとき、重み  $A(\Gamma)$  は図 3 における色のついた部分のシンプレクティック面積となる。

### 3 主結果

#### 3.1 主定理とその系

ヒルツェブルフ曲面  $\mathbb{F}_k$  上の接続層の導来圏に対して、強例外的生成系と呼ばれる圏の生成系を具体的に構成する方法が知られている [7]。これを 2.2 節で考えた正則直線束  $\mathcal{O}(a, b)$  を用いて表すと次のとおりである。

$$\mathcal{E}_c := (\mathcal{O}(0, 0), \mathcal{O}(1, 0), \mathcal{O}(c, 1), \mathcal{O}(c+1, 1)).$$

ここで、 $c$  は非負整数である。対象が  $\mathcal{E}_c$  からなる  $DG(\mathbb{F}_k)$  の充満部分圏を  $DG_{\mathcal{E}_c}(\mathbb{F}_k)$  とし、忠実関手  $\mathcal{I} : DG(\mathbb{F}_k) \rightarrow \mathcal{V}$  による像を  $\mathcal{V}'_{\mathcal{E}_c}$  と書くことにする。このとき、次の定理が主定理である。

**定理 3.1.**  $\mathbb{F}_k$  をヒルツェブルフ曲面、 $P$  をモーメント多面体、 $\mathcal{E}_c$  を接続層の導来圏  $D^b(Coh(\mathbb{F}_k))$  の強例外的生成系とする。このとき擬同型

$$Mo_{\mathcal{E}_c}(P) \simeq \mathcal{V}'_{\mathcal{E}_c} \simeq DG_{\mathcal{E}_c}(\mathbb{F}_k),$$

が存在する。

一般に、DG 圏から三角圏を自然に構成することができ、2 つの DG 圏が擬同型な場合はそれらから誘導される三角圏は三角同値となることが知られている [1]。そのため、主定理より次の系が従う。

**系 3.2.** ヒルツェブルフ曲面  $\mathbb{F}_k$  に対して三角圏としての同値

$$Tr(Mo_{\mathcal{E}_c}(P)) \simeq D^b(Coh(\mathbb{F}_k)),$$

が存在する。ここで  $Tr(Mo_{\mathcal{E}_c}(P))$  は DG 圏  $Mo_{\mathcal{E}_c}(P)$  から誘導される三角圏である。

コンパクト多様体  $B$  上のモースホモトピーの圏  $Mo(B)$  を境界付き多様体  $P$  上に拡張したものが  $Mo(P)$  であり、 $T^*B$  におけるラグランジュ切断からなる深谷圏  $Fuk(T^*B)$  と  $Mo(B)$  が  $A_\infty$  同値となる [3] ことから、この系はある種のホモロジー的ミラー対称性と考えることができる。

$k = 1$  の場合、主定理とその系が成り立つことが二木-梶浦らにより示されている [6]。この主定理とその系が  $k \geq 2$  の場合でも成り立つことが本研究により明らかになった [12]。

**注意 3.3.** この主定理はヒルツェブルフ曲面  $\mathbb{F}_k$  に限らずトーリックファノ曲面に対しても成り立つ。 $CP^2$ ,  $CP^1 \times CP^1$ ,  $\mathbb{F}_1$  については二木-梶浦らの結果 [5, 6] であり、残りの  $CP^2$  の 2 点ブローアップと 3 点ブローアップについては講演者のプレプリント [11] を参照いただきたい。

### 3.2 主定理の証明の概略

主定理の証明の概略を説明する。2.2節より、 $DG(\mathbb{F}_k)(\mathcal{O}(0,0), \mathcal{O}(a,b))$  のゼロ次のコホモロジーの生成元は局所座標の単項式  $u^{i_1}v^{i_2}$  により表されるのであった。これを用いると  $\mathcal{V}'(\tilde{\mathcal{O}}(0,0), \tilde{\mathcal{O}}(a,b))$  のゼロ次のコホモロジーは局所座標の単項式の関数倍  $\Psi_{(a,b)}^{-1} u^{i_1}v^{i_2}$  となる。絶対値の最大値が1になるように正規化したもの  $\mathbf{e}_{(a,b);(i_1,i_2)}$  を次のように分解する。

$$\mathbf{e}_{(a,b);(i_1,i_2)}(x) = e^{-f_{(a,b);(i_1,i_2)}(x)} e^{\sqrt{-1}(i_1 y_1 + i_2 y_2)}.$$

このとき

$$\{x \in P \mid f_{(a,b);(i_1,i_2)}(x) = 0\} = V_{(a,b);(i_1,i_2)},$$

となることが直接計算によりわかる\*3。一方で、 $Mo_{\mathcal{E}_c}(P)$  は極小な DG 圏となるので、 $Mo_{\mathcal{E}_c}(P)$  の射の空間はそのコホモロジーと一致する。これにより対応  $\iota: V_{(a,b);(i_1,i_2)} \rightarrow \mathbf{e}_{(a,b);(i_1,i_2)}$  が擬同型

$$\iota: Mo_{\mathcal{E}_c}(P)(L(0,0), L(a,b)) \rightarrow \mathcal{V}'_{\mathcal{E}_c}(\tilde{\mathcal{O}}(0,0), \tilde{\mathcal{O}}(a,b))$$

を与える。これが射の合成と両立することを示すことで、擬同型関手  $\iota: Mo_{\mathcal{E}_c}(P) \rightarrow \mathcal{V}'_{\mathcal{E}_c}$  が得られる。また、忠実関手  $\mathcal{I}: DG_{\mathcal{E}_c}(\mathbb{F}_k) \rightarrow \mathcal{V}'_{\mathcal{E}_c}$  は擬同型関手であることから主定理が従う。

### 3.3 $Mo(P)$ の極小性

次に、 $Mo(P)$  の極小性について考える。 $k=1$  の場合、ラグランジュ切断の交叉は連結となることから射の空間は微分が自明な鎖複体となる。これにより  $\mathbb{F}_1$  に対しては  $Mo(P)$  は極小な DG 圏となることがわかっている。しかし、 $k \geq 2$  の場合はラグランジュ切断の交叉が必ずしも連結にならないことが本研究により明らかになった。これにより、 $k \geq 2$  の場合には  $\mathbb{F}_k$  に対する  $Mo(P)$  は極小な DG 圏にならない。その例を  $k=2$  の場合で明示的に構成する。

射の空間  $Mo(P)(L(0,0), L(-7,3))$  について考える。ラグランジュ切断  $L(0,0)$  と  $L(-7,3)$  の交叉は、トーラス束の切断のリフトであることを考慮すると次のように表される。

$$i_1 = -7 \frac{s}{1+s} + 6 \frac{s^2}{1+s^2+t}, \quad i_2 = 3 \frac{t}{1+s^2+t}. \quad (1)$$

ここで  $(i_1, i_2) \in \mathbb{Z}^2$  であり  $s = e^{2x_1}$ ,  $t = e^{2x_2}$  である。 $(i_1, i_2)$  に対して方程式 (1) を満たすような  $s, t$  を求める。ここでは  $Mo(P)(L(0,0), L(-7,3))$  が非自明な微分を持つことを確かめるために、 $(i_1, i_2) = (0,0)$  の場合のみを考える。まずは第2式から考える。 $s=0$  であれば  $t=0$ 、 $s \neq 0$  であれば  $\frac{t}{s} = 0$  が第2式を満たす。このもとで第1式を考えると、 $(s, t) = (0,0)$  または  $(3 \pm \sqrt{2}, 0)$  となる。ここで、モーメント多面体の座標は

$$(x^1, x^2) = \left( \frac{2s}{1+s} + 2 \frac{2s^2}{1+s^2+t}, \frac{2t}{1+s^2+t} \right),$$

\*3 トーラス束の切断  $s$  のリフトをとると  $y^j = s^j + 2\pi i_j$  と表される。このとき、 $L(0,0)$  のリフトとして  $(i_1, i_2) \in \mathbb{Z}^2$  を取り、 $L(a,b)$  のリフトとして  $(0,0)$  を取る。このとき、 $L(0,0)$  と  $L(a,b)$  の交叉をモーメント多面体に射影したものを  $V_{(a,b);(i_1,i_2)}$  としている。



であったから、ラグランジュ切断  $L(0,0)$  と  $L(-7,3)$  の交叉をモーメント多面体に射影したものの  $V_{(-7,3);(0,0)}$  は次のようになる。

$$V_{(-7,3);(0,0)} = \{(0,0)\} \cup \left\{ \left( \frac{100-10\sqrt{2}}{21}, 0 \right) \right\} \cup \left\{ \left( \frac{100+10\sqrt{2}}{21}, 0 \right) \right\}.$$

これは明らかに連結でないことがわかる。この交叉に対応する勾配ベクトル場は

$$2\pi \left( -7 \frac{s}{1+s} + 6 \frac{s^2}{1+s^2+t} \right) \frac{\partial}{\partial x^1} + 2\pi \left( 3 \frac{t}{1+s^2+t} \right) \frac{\partial}{\partial x^2},$$

で与えられる (図 4)。

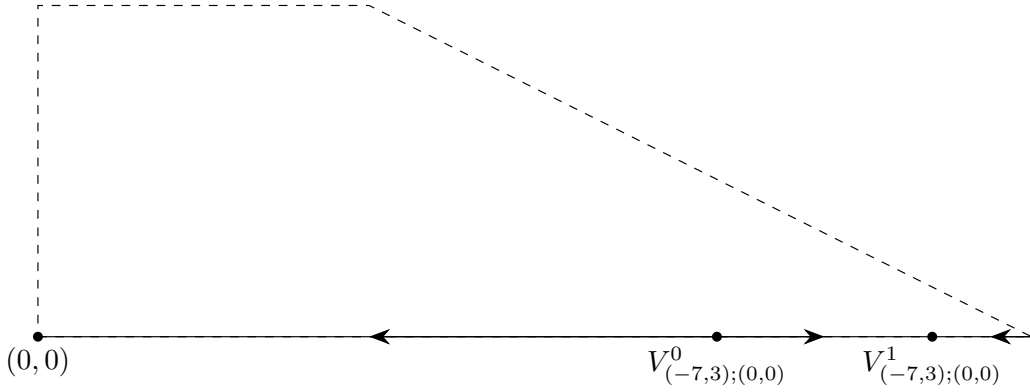


図 4  $V_{(-7,3);(0,0)}$  とモーメント多面体の底辺における  $f_{(-7,3);(0,0)} - f_{(0,0);(0,0)}$  の勾配ベクトル場の様子。

これらの連結成分のうち、 $(0,0)$  は条件 (M2) を満たさないため射の空間の生成元にならず、 $V_{(-7,3);(0,0)}^0 := \left\{ \left( \frac{100-10\sqrt{2}}{21}, 0 \right) \right\}$  は次数 0 の生成元となり、 $V_{(-7,3);(0,0)}^1 := \left\{ \left( \frac{100+10\sqrt{2}}{21}, 0 \right) \right\}$  は次数 1 の生成元となる。さらに  $V_{(-7,3);(0,0)}^0$  を始点とし  $V_{(-7,3);(0,0)}^1$  を終点とするような勾配ベクトル場  $-\text{grad}(f_{(0,0);(0,0)} - f_{(-7,3);(0,0)})$  の積分曲線が存在することより、 $V_{(-7,3);(0,0)}^0$  に対して非自明な微分が次で与えられる。

$$\begin{aligned} \mathfrak{m}_1(V_{(-7,3);(0,0)}^0) &= e^{-A} V_{(-7,3);(0,0)}^1, \\ A &= \int_{x^1 = \frac{100-10\sqrt{2}}{21}}^{x^1 = \frac{100+10\sqrt{2}}{21}} d(f_{(-7,3);(0,0)} - f_{(0,0);(0,0)})|_{t=0} \\ &= \int_{x_1 = \frac{1}{2} \log(3-\sqrt{2})}^{x_1 = \frac{1}{2} \log(3+\sqrt{2})} df_{(-7,3);(0,0)}|_{t=0} \\ &= \left[ -7\pi \log(1+s) + 3\pi \log(1+s^2) \right]_{s=3-\sqrt{2}}^{s=3+\sqrt{2}} \\ &= 3\pi \log \left( \frac{12+6\sqrt{2}}{12-6\sqrt{2}} \right) - 7\pi \log \left( \frac{4+\sqrt{2}}{4-\sqrt{2}} \right). \end{aligned}$$

ここで  $A$  は  $\pi^{-1}$  (勾配ベクトル場の積分曲線) における  $L(0,0)$  と  $L(-7,3)$  によって囲まれる円盤のシンプレクティック面積である。これにより、射の空間には非自明な微分が存在するがわかり、ヒルツェブルフ曲面  $\mathbb{F}_k$  に対して  $Mo(P)$  が極小でないことが従う。

## 参考文献

- [1] A.I. Bondal and M.M. Kapranov. *Enhanced triangulated categories*. Math. USSR-Sb., 1991, 70:93-107.
- [2] K. Chan. *Holomorphic line bundles on projective toric manifolds from Lagrangian sections of their mirrors by SYZ transformations*. International Mathematics Research Notices. 2009.24 (2009), 4686-4708.
- [3] K. Fukaya and Y.-G. Oh. *Zero-loop open strings in the cotangent bundle and morse homotopy*. Asian J. Math., 1:96–180, 1997.
- [4] W. Fulton. *Introduction to toric varieties*. Number 131. Princeton University Press, 1993.
- [5] M. Futaki and H. Kajiura, *Homological mirror symmetry of  $\mathbb{C}P^n$  and their products via Morse homotopy*. Journal of Mathematical Physics, 62:3, 032307, 2021.
- [6] M. Futaki and H. Kajiura, *Homological mirror symmetry of  $\mathbb{F}_1$  via Morse homotopy*. preprint arXiv:2012.06801, 2020.
- [7] L. Hille and M. Perling. *Exceptional sequences of invertible sheaves on rational surfaces*. Compositio Mathematica, 147(4):1230–1280, 2011.
- [8] M. Kontsevich. *Homological algebra of mirror symmetry*. Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Zürich, 1994), 120–139, Birkhäuser, Basel, 1995.
- [9] M. Kontsevich and Y. Soibelman. *Homological mirror symmetry and torus fibrations*. Symplectic geometry and mirror symmetry (Seoul, 2000), pages 203–263. World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 2001.
- [10] N.C. Leung, S.-T. Yau, and E. Zaslow. *From special Lagrangian to hermitian-Yang-Mills via Fourier-Mukai transform*. Adv. Theor. Math. Phys. 4 (2000), no. 6, 1319–1341.
- [11] H. Nakanishi. *Homological mirror symmetry of toric Fano surfaces via Morse homotopy*. preprint arXiv:2303.07851, 2023.
- [12] H. Nakanishi. *SYZ mirror of Hirzebruch surface  $\mathbb{F}_k$  and Morse homotopy*. preprint arXiv:2312.01329, 2023.
- [13] A. Strominger, S.-T. Yau, and E. Zaslow. *Mirror symmetry is T-duality*. Nucl. Phys. B, 479:243–259, 1996.