Discrete universality theorem for Matsumoto zeta-functions and nontrivial zeros of the Riemann zeta-function

名古屋大学大学院 多元数理科学研究科 多元数理科学専攻
中井啓太 (Keita NAKAI) *

概 要

ある帯領域に含まれる補集合が連結なコンパクト集合上非零な正則関数をゼータ (L) 関数の虚軸方向の平行移動で近似できるとき, ゼータ (L) 関数の普遍性定理が成り立つという. Garunkštis–Laurinčikas–Macaitienė は, Riemann ゼータ関数の非自明零点の虚部による Riemann ゼータ関数の離散普遍性定理を証明した. この Riemann ゼータ関数の非自明零点の虚部による離散普遍性定理は, 様々なゼータ関数や L 関数に一般化されている. 本稿では, Matsumoto ゼータ関数に対するこの離散普遍性定理の拡張を与える.

1 導入

関数 $f(x)$ と非負実数値関数 $g(x)$ に対し, ある絶対定数 $C > 0$ が存在し, ある範囲において, $|f(x)| \leq Cg(x)$ が成り立つとき, $f(x) \ll g(x)$ と書く. また, $f(x) = o(g(x))$ であるとは, $\lim_{x\to\infty} f(x)/g(x) = 0$ が成り立つこととする. さらに, 非負実数値関数 $f(x)$, $g(x)$ に対し, $\lim_{x\to\infty} f(x)/g(x) = 1$ が成り立つとき, $f(x) \sim g(x)$ と書く.

複素数を s とし, その実部を $\Re(s) = \sigma$, 虚部を $\Im(s) = t$ とする. Riemann ゼータ関数とは, $\sigma > 1$ において絶対収束する級数 $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ により定義される関数である. さらに, $\sigma > 1$ において, $\zeta(s) = \prod_p (1 - p^{-s})^{-1}$ という無限積表示を持つ. ただし, p は全ての素数をわたる. Riemann ゼータ関数は, 全平面の有理型関数に解析接続され, 特に関数等式

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \Gamma(1-s) \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \zeta(1-s)$$

が成り立つ. 無限積表示から, Riemann ゼータ関数は $\sigma > 1$ において零点をもたず, 関数等式から, $\sigma < 0$ における零点は $s = -2n$ ($n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$) のみであることが分かる. この零点を自明零点といい, 自明零点以外の $0 \leq \sigma \leq 1$ に存在する零点を非自明零点という. 有名な Riemann 予想とは, 非自明零点は全て実部 $1/2$ 上にのみ存在するという予想であり, この予想は素数定理や隣り合う素数の間隔など素数とも関係している. したがって, Riemann ゼータ関数の零点を調べるのは素数分布の観点からも重要である. Riemann ゼータ関数の非自明零点の虚部を γ, γ' とし, また, 虚部が正なものを $0 < \gamma_1 \leq \gamma_2 \leq \dots$ とする. このとき, Montgomery [11] は, 相関予想と呼ばれる次の零点の個数に関する漸近を予想した. $\alpha_1 < \alpha_2$ に対し, $T \to \infty$ において

$$\sum_{\substack{0<\gamma,\gamma'\leq T \\ 2\pi\alpha_1/\log T \leq \gamma-\gamma' \leq 2\pi\alpha_2/\log T}} 1 \sim \left(\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \left(1 - \left(\frac{\sin \pi u}{\pi u} \right)^2 \right) du + \delta(\alpha_1, \alpha_2) \right) \frac{T}{2\pi} \log T.$$

*E-mail:m21029d@math.nagoya-u.ac.jp

ただし, $0 \in [\alpha_1, \alpha_2]$ のとき, $\delta(\alpha_1, \alpha_2) = 1$ であり, それ以外のとき $\delta(\alpha_1, \alpha_2) = 0$ である.

以下, Riemann ゼータ関数の零点のみならず, その値の挙動自体を考える. 1975 年に Voronin は, Riemann ゼータ関数に対し次の普遍性定理と呼ばれる定理を証明した.

Theorem 1.1 ([13])**.** K を帯領域 $1/2 < \sigma < 1$ に含まれる補集合が連結なコンパクト集合とする. f を K 上非零な連続関数かつ K の内部で正則とする. このとき, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し,

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} \mathrm{meas} \left\{ \tau \in [0, T] : \sup_{s\in\mathcal{K}} |\zeta(s + i\tau) - f(s)| < \varepsilon \right\} > 0.$$

ただし, meas を 1 次元 Lebesgue 測度とする.

端的に書くと, 臨界帯に含まれる補集合が連結なコンパクト集合上で定義される非零な正則関数は, Riemann ゼータ関数の $+i\tau(\tau \in \mathbb{R}_{\geq 0})$ の平行移動で一様に近似できるという定理である. この普遍性定理において, $f(s) = 0$ とすると, Riemann ゼータ関数は任意の精度でいくらでも 0 に近づきうることが分かる. このような事実が Riemann 予想の困難さの理由の 1 つであると考えることが出来る. ただし, 定理の主張からは恒等的に 0 である関数を取ることは出来ないが, 例えば $0 < |a| < \varepsilon/2$ となるような定数 a に対し, $f(s) = a$ とし, Theorem 1.1 の ε を $\varepsilon/2$ に置き換え適用することにより, 恒等的に 0 である関数を近似する普遍性定理を考えることが出来る.

もし, この平行移動させる τ がある離散集合上の点を動き, このような近似定理が成り立つとき, その近似定理を離散普遍性定理という. 普遍性定理は, 離散普遍性定理以外にも様々な一般化や拡張がされている. 例えば, サーベイ論文 [9] を参照されたい.

ここで Montgomery の相関予想より弱い予想

$$\sum_{\substack{0<\gamma,\gamma'\leq T \\ |\gamma-\gamma'|<c/\log T}} 1 \ll T \log T, \quad T \to \infty \tag{1.1}$$

を考える. ただし, $c > 0$ とする. この弱い予想の下, Garunkštis–Laurinčikas–Macaitienė [3] は次の離散普遍性定理を証明した.

Theorem 1.2. K を帯領域 $1/2 < \sigma < 1$ に含まれる補集合が連結なコンパクト集合, f を K 上非零な連続かつ K の内部で正則とし, (1.1) を仮定する. このとき, 任意の $\varepsilon > 0$ と $h > 0$ に対し,

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N} \# \left\{ 1 \leq k \leq N : \sup_{s\in K} |\zeta(s + ih\gamma_k) - f(s)| < \varepsilon \right\} > 0$$

が成り立つ. ただし, $\#A$ は, 集合 $A \subset \mathbb{N}$ の個数とする.

この離散普遍性定理は, [5], [7], [6], [2], [1], [4] において, Hurwitz ゼータ関数や Selberg クラスの L 関数などの様々なゼータ関数や L 関数に拡張されている. 本稿では, この離散普遍性定理を Matsumoto ゼータ関数と呼ばれるある無限積により定義されるゼータ関数に拡張できることを紹介する.

2 主定理

Matsumoto ゼータ関数とは, 松本 [8] により導入された

$$\varphi(s) = \prod_{n=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{g(n)} (1 - a_n^{(j)} p_n^{-f(j,n)s})^{-1}$$

により定義される関数である. ただし, $g(n) \in \mathbb{N}$, $f(j,n) \in \mathbb{N}$, $a_n^{(j)} \in \mathbb{C}$, p_n は n 番目の素数とする. 例えば, Riemann ゼータ関数や Dirichlet の L 関数は, 明らかに Matsumoto ゼータ関数に包含され, さらに代数体の Dedekind ゼータ関数やある cusp form に付随する保型 L 関数も Matsumoto ゼータ関数に包含される (例えば, [8, 5 節] 参照). ここで, ある非負定数 α, β と正定数 c_1 に対し,

$$g(n) \leq c_1 p_n^{\alpha}, \ |a_n^{(j)}| \leq p_n^{\beta} \tag{2.1}$$

が成り立つことを仮定する. この仮定の下, Matsumoto ゼータ関数は, $\sigma > \alpha+\beta+1$ において絶対収束する級数

$$\varphi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s}$$

の表示をもつ. さらに, n の全ての素因子が十分大ならば, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, $b_n \ll n^{\alpha+\beta+\varepsilon}$ が成り立つ. 本稿における Matsumoto ゼータ関数は以下の仮定を満たすとする.

(i) 仮定 (2.1) を満たす.

(ii) ある $\alpha+\beta+1/2 \leq \rho < \alpha+\beta+1$ を満たす ρ が存在し, $\varphi(s)$ は $\sigma \geq \rho$ の有理型関数に解析接続され, 全ての極はあるコンパクト集合に含まれ, $\sigma = \rho$ 上に極は存在しない.

(iii) ある正定数 c_2 が存在し, $\varphi(\sigma+it) \ll |t|^{c_2}, \ |t| \to \infty$ が $\sigma > \rho$ に対し成り立つ.

(iv) $\rho \leq \sigma < \min\{\Re(s) : s \text{ は} \varphi \text{ の極}\}$ なる σ に対し,

$$\int_{-T}^{T} |\varphi(\sigma+it)|^2 \, dt \ll T$$

が成り立つ.

(v) ある正定数 κ が存在し,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\pi(x)} \sum_{p_n \leq x} \left| \sum_{\substack{j=1 \\ f(j,n)=1}}^{g(n)} a_n^{(j)} \right|^2 p_n^{-2(\alpha+\beta)} = \kappa,$$

が成り立つ. ここで, $\pi(x)$ は x 以下の素数の個数である.

例えば, Riemann ゼータ関数, Dirichlet の L 関数, $SL(2,\mathbb{Z})$ の cusp form に付随する保型 L 関数などは上記の仮定を満たす. このような Matsumoto ゼータ関数に対し成り立つ次の離散普遍性定理が本稿の主結果である.

Theorem 2.1. K を帯領域 $\rho < \sigma < \alpha+\beta+1$ に含まれる補集合が連結なコンパクト集合, f を K 上非零な連続かつ K の内部で正則とし, (1.1) を仮定する. このとき, 任意の $\varepsilon > 0$ と $h > 0$ に対し,

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \# \left\{ N \leq k \leq 2N : \sup_{s\in K} |\varphi(s+ih\gamma_k) - f(s)| < \varepsilon \right\} > 0 \tag{2.2}$$

が成り立つ.

Remark 2.2. Sourmelidis–Srichan–Steuding [12] は, unconditional に Riemann ゼータ関数に対し, 同様の離散普遍性定理に対し証明している. 彼らの結果は, Riemann ゼータ関数の非自明零点の虚部のみならず, より広く Selberg クラスの L 関数の α 点の虚部について得られている. しかしながら, 彼らの結果では, Selberg クラスの L 関数の α 点の虚部の部分列を取る必要がある.

3 仮定 (1.1) について

この節では, 仮定 (1.1) を用いることについて解説する.

以下, Theorem 2.1 の仮定を満たすコンパクト集合 K を 1 つ固定する. まず, 全ての極が半平面 $\sigma_0 < \sigma$ に含まれるような $\rho < \sigma_0 < \min_{s\in K} \Re(s)$ を固定する. さらに, R を $\sigma_0 < \sigma < \alpha + \beta + 1$ に含まれ, $K \subset R$ を満たす開長方形領域とする.

次に, C^∞ 級実関数 ψ を $[0, \infty)$ で定義され, 任意の $x \in [0, \infty)$ に対し, $0 \le \psi(x) \le 1$ かつ任意の $x \in [0, 1]$ に対し $\psi(x) = 1$ であり,

$$\mathrm{supp}(\psi) = \overline{\{x \in [0, \infty) : \psi(x) \neq 0\}}$$

がコンパクトとなるとする. このとき, $X \ge 2$ に対し,

$$\varphi_X(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n \psi(n/X)}{n^s}$$

を定める. これは無限和の表示であるが, $\mathrm{supp}(\psi)$ がコンパクトなので, 実際には有限和である. このとき, 次の補題が成り立つ.

Lemma 3.1. 任意のコンパクト集合 $C \subset R$ に対し,

$$\lim_{X\to\infty} \limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \sum_{k=N}^{2N} \sup_{s\in C} |\varphi(s + ih\gamma_k) - \varphi_X(s + ih\gamma_k)| = 0.$$

この補題の証明に入る前に離散平均における Gallagher の補題を準備する.

Lemma 3.2 (Gallagher)**.** T_0 と $T \ge \delta > 0$ を実数とし, $\mathcal{T}$ を $[T_0 + \delta/2, T_0 + T - \delta/2]$ に含まれる有限集合とし,

$$N_\delta(x) = \sum_{\substack{t\in\mathcal{T} \\ |t-x|<\delta}} 1$$

を定義する. S を $[T_0, T + T_0]$ 上の複素数値連続関数で $(T_0, T + T_0)$ で微分可能とする. このとき,

$$\begin{aligned}\sum_{t\in\mathcal{T}} N_\delta^{-1}(t)|S(t)|^2 \le & \frac{1}{\delta} \int_{T_0}^{T_0+T} |S(x)|^2\, dx \\ & + \left(\int_{T_0}^{T_0+T} |S(x)|^2\, dx \int_{T_0}^{T_0+T} |S'(x)|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

が成り立つ.

証明は, 例えば [10] を参照してほしい. この補題を用いて Lemma 3.1 の証明の概略を述べていく.

Sketch of proof of Lemma 3.1. まず, φ の極を $z_1, \dots, z_M$ と置き, その留数をそれぞれ $r_1, \dots, r_M$ とする. $\Re(z) > \sigma_0$ なる複素数 z に対し, 正の実数 $\delta(z)$ を $\Re(z) - \delta(z) = \sigma_0$ となるように定義する. このとき, 逆 Mellin 変換と留数定理と仮定 (iii) から

$$\varphi(z) - \varphi_X(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\delta(z)-i\infty}^{-\delta(z)+i\infty} \varphi(z + w)\hat{\psi}(w) X^w\, dw - \sum_{j=1}^{M} r_j \hat{\psi}(z_j - z) X^{z_j - z}.$$

が成り立つ. また, N を十分大とすると, $N \le k \le 2N$ なる k に対し, $\varphi(s+ih\gamma_k) - \varphi_X(s+ih\gamma_k)$ は $\overline{R}$ 上正則である. したがって, Cauchy の積分公式から, $N \le k \le 2N$ に対し

$$\varphi(s+ih\gamma_k) - \varphi_X(s+ih\gamma_k) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathcal{R}} \frac{\varphi(z+ih\gamma_k) - \varphi_X(z+ih\gamma_k)}{z-s}\,dz$$

が成り立つ. この 2 つの式を用いることにより, 不等式

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=N}^{2N} \sup_{s\in C} |\varphi(s+ih\gamma_k) - \varphi_X(s+ih\gamma_k)| \\
&\le \frac{|\partial\mathcal{R}|}{4\pi^2 \mathrm{dist}(C,\partial\mathcal{R})} \sup_{z\in\partial\mathcal{R}} X^{-\delta(z)} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=N}^{2N} |\varphi(\Re(z) - \delta(z) + i\tau + ih\gamma_k)||\hat{\psi}(-\delta+i\tau)|\,d\tau \\
&\quad + \frac{|\partial\mathcal{R}|}{2\pi \mathrm{dist}(C,\partial\mathcal{R})} \sup_{z\in\partial\mathcal{R}} \sum_{k=N}^{2N}\sum_{j=1}^{M} |r_j||\hat{\psi}(z_j - z - ih\gamma_k)| X^{\Re(z_j - z)},
\end{aligned}$$

を得る. ただし, $\mathrm{dist}(C,\partial\mathcal{R})$ は C と ∂R の最短距離の長さとし, $|\partial R|$ は ∂R の長さとする.

まず, 第 1 項目から考えていく. 零点の虚部に関して, ある正定数 C_1, C_2 が存在し,

$$C_2 \frac{k}{\log k} \le \gamma_k \le C_1 \frac{k}{\log k} \tag{3.1}$$

が成り立つことに注意する. Lemma 3.2 において, $\delta = h/\log(2C_1 N/\log 2N)$, $T_0 = h\gamma_N - \delta$, $T = h\gamma_{2N} - h\gamma_N + 2\delta$, $\mathcal{T} = \{h\gamma_N, \ldots, h\gamma_{2N}\}$ と置く. このとき, 仮定 (1.1) より,

$$\sum_{k=N}^{2N} N_\delta(h\gamma_k) = \sum_{\substack{k=N \\ |\gamma_k - \gamma_l| < \delta/h}}^{2N} \sum_{l=N}^{2N} 1 \ll \sum_{\substack{0<\gamma,\gamma' \le C_1 2N/\log 2N \\ |\gamma-\gamma'| < 1/\log(2C_1 N/\log 2N)}} 1 \ll N \tag{3.2}$$

が成り立つ. したがって, $\Re(z) - \delta(z) = \sigma_0$ と Cauchy–Schwarz の不等式と Lemma 3.2 より,

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=N}^{2N} |\varphi(\Re(z) - \delta(z) + i\tau + ih\gamma_k)| \\
&\le \left(\sum_{k=N}^{2N} N_\delta(h\gamma_k) \sum_{k=N}^{2N} N_\delta^{-1}(h\gamma_k) |\varphi(\sigma_0 + i\tau + ih\gamma_k)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\ll \sqrt{N} \Bigg(\log N \int_{h\gamma_N}^{h\gamma_{2N}+1} |\varphi(\sigma_0 + i\tau + it)|^2\,dt \\
&\qquad + \left(\int_{h\gamma_N}^{h\gamma_{2N}+1} |\varphi(\sigma_0 + i\tau + it)|^2\,dt \int_{h\gamma_N}^{h\gamma_{2N}+1} |\varphi'(\sigma_0 + i\tau + it)|^2\,dt \right)^{\frac{1}{2}} \Bigg)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

が成り立つ. σ_0 の取り方と仮定 (iv) より, $\tau \in \mathbb{R}$ に対し,

$$\begin{aligned}
&\int_{-T}^{T} |\varphi(\sigma_0 + i\tau + it)|^2\,dt \ll T(1+|\tau|), \\
&\int_{-T}^{T} |\varphi'(\sigma_0 + i\tau + it)|^2\,dt \ll T(1+|\tau|)
\end{aligned}$$

が成り立つ. 以上より,

$$\frac{1}{N+1}\sum_{k=N}^{2N}|\varphi(\Re(z)-\delta(z)+i\tau+ih\gamma_k)| \ll 1+|\tau|$$

が成り立つので, 第 1 項目に関する評価式が得られる. 次に, 第 2 項目について考える. これは (3.1) の下からの評価より,

$$\sum_{k=N}^{2N}\sum_{j=1}^{M}|r_j||\hat{\psi}(z_j-z-ih\gamma_k)|X^{\Re(z_j-z)} \ll X^{\frac{1}{2}}(\log N)$$

である. $\delta(z)\geq\sigma_1-\sigma_0>0$ と第 1 項目と第 2 項目に関する評価式より,

$$\begin{aligned}&\lim_{X\to\infty}\limsup_{N\to\infty}\frac{1}{N+1}\sum_{k=N}^{2N}\sup_{s\in C}|\varphi(s+ih\gamma_k)-\varphi_X(s+ih\gamma_k)|\\ &\ll \lim_{X\to\infty}\limsup_{N\to\infty}(X^{-(\sigma_1-\sigma_0)}+X^{\frac{1}{2}}(\log N)N^{-1})=0\end{aligned}$$

が成り立つので, 結論を得る. □

上記の議論の (3.2) の評価を用いる点において, 仮定 (1.1) が必要になる. 現状では unconditional には (3.2) の良い評価は得られていない. しかしながら, (3.2) の評価が良くなるような良い性質を満たす部分列を取ることにより, unconditional に証明することは可能である. 実際, 次の定理が成り立つ.

Theorem 3.3 ([12, Corollary 1]). $\mathcal{L}$ を定数でない Selberg クラスの L 関数とし, $b>0$ を実数, α を複素数とする. このとき, ある $\mathcal{L}(s)$ の α 点の部分列 $(\rho_{\alpha,n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ が存在し, $\Im(\rho_{\alpha,n_k})=\gamma_{\alpha,n_k}=bk+o(1)$ が成り立つ. さらに, 任意の $a\notin b^{-1}\mathbb{Q}$ と任意の正整数 m に対し, $(a\gamma_{\alpha,n_{km}})$ は 1 を法として一様分布である.

Selberg クラスの詳細な定義は本稿では省略するが, 大雑把に書くと Riemann 予想を満たすであろうと期待される公理的に定められた Dirichlet 級数の集合である. 後半部分も非常に重要な性質であり, 普遍性定理を証明するためには, この性質を用いる必要があるのだが, 本稿では前半部分のみに着目する. この定理から, 十分大きな自然数 k_1 に対し, $k\geq k_1$ であれば,

$$|\gamma_{\alpha,n_k}-2\pi k|<\frac{\pi}{2} \tag{3.3}$$

が成り立つ. したがって, Lemma 3.2 において, $\delta=h\pi$, $T_0=h\gamma_{\alpha,n_N}-h\pi/2$, $T=h\gamma_{\alpha,n_{2N}}-h\gamma_{\alpha,n_N}+h\pi$, $\mathcal{T}=\{h\gamma_{\alpha,n_N},\dots,h\gamma_{\alpha,n_{2N}}\}$ と置くと,

$$\sum_{k=N}^{2N}N_\delta(h\gamma_{\alpha,n_k})=\sum_{\substack{k=N\\ |\gamma_{\alpha,n_k}-\gamma_{\alpha,n_l}|<\pi}}^{2N}\sum_{l=N}^{2N}1$$

が成り立つ. ここで, $N\geq k_1$ を満たすとき, $N\leq k,l\leq 2N$ に対し

$$|\gamma_{\alpha,n_k}-\gamma_{\alpha,n_l}|\geq 2\pi|k-l|-\pi$$

が (3.3) より成り立つ．ゆえに，$|\gamma_{\alpha,n_k} - \gamma_{\alpha,n_l}| < \pi$ を満たす $N \le k, l \le 2N$ は，$k = l$ にならざるを得ない．以上より，

$$\sum_{k=N}^{2N} N_\delta(h\gamma_{\alpha,n_k}) = N$$

が成り立つ．以上より，良い性質を満たす部分列に対して，(3.2) の良い評価を unconditional に得ることが出来る．これが，[12] に基づく手法である．

なお，主定理である Theorem 2.1 は，下極限をとる前の (2.2) の左辺を確率測度とみなし，その確率測度の極限測度を Lemma 3.1 等を用いて計算し，その極限測度の台を仮定 (v) を用いて計算することにより得られる．さらに，適宜 α 点の部分列に関する議論に置き換えることにより，unconditional に Theorem 2.1 を α 点の部分列に対して証明することが可能である．

参考文献

[1] A. Balčiūnas, V. Franckevič, V. Garbaliauskienė, R. Macaitienė and A. Rimkevičienė, Universality of zeta-functions of cusp forms and non-trivial zeros of the Riemann zeta-function, Math. Model. Anal. **26**(1), 82–93, 2021.

[2] A. Balčiūnas, V. Garbaliauskienė, J. Karaliūnaitė, R. Macaitienė, J. Petuškinaitė and A. Rimkevičienė, Joint discrete approximation of a pair of analytic functions by periodic zeta-functions, Math. Model. Anal. **25**, no.1, 71–87, 2020.

[3] R. Garunkštis, A. Laurinčikas, and R. Macaitienė, Zeros of the Riemann zeta-function and its universality, Acta Arith., **181**, no. 2, 127–142, 2017.

[4] R. Kačinskaitė, On discrete universality in the Selberg–Steuding class, Sib. Math. J. **63**(2), 277–285, 2022.

[5] A. Laurinčikas, Non-trivial zeros of the Riemann zeta-function and joint universality theorems, J. Math. Anal. Appl., **475**(1), 385–402, 2019.

[6] A. Laurinčkas, Zeros of the Riemann zeta-function in the discrete universality of the Hurwitz zeta-function, Stud. Sci. Math. Hung., **57**, no. 2, 147–164, 2020.

[7] A. Laurinčikas and J. Petuškinaitė. Universality of Dirichlet L-functions and non-trivial zeros of the Riemann zeta-function. Sb. Math., **210**(12), 1753–1773, 2019.

[8] K. Matsumoto, Value-distribution of zeta-functions, in: Lecture Notes in Math. 1434, Springer, 1990, 178–187.

[9] K. Matsumoto, A survey on the theory of universality for zeta and L-functions, Number theory, 95–144, Ser. Number Theory Appl, 11, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2015.

[10] H. L. Montgomery, Topics in Multiplicative Number Theory, Lecture Notes in Math. 227, Springer, Berlin, 1971.

[11] H. L. Montgomery, The pair correlation of zeros of the zeta function, in: Analytic Number Theory (St. Louis, MO, 1972), H. G. Diamond (ed.), Proc. Sympos. Pure Math. **24**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1973, 181–193.

[12] A. Sourmelidis, T. Srichan and J. Steuding, On the vertical distribution of values of L-functions in the Selberg class, Int. J. Number Theory, **18**, No. 02, 277–302, 2022.

[13] S. M. Voronin, Theorem on the universality of the Riemann zeta-function, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **39** (1975) 475–486 (in Russian); Math. USSR Izv. **9** (1975), 443–453.