Left Regular Band を用いた推移確率行列の固有値と重複度の考察

東北大学大学院　理学研究科　数学専攻
中川　由宇斗 (Yuto NAKAGAWA) *

概要

$x^2 = x, xyx = xy$ を満たす半群を Left Regular Band という．S 上の分布 $\{w_x\}$ を与え，「確率 w_x で $x \in S$ を左からかける」という操作を行うことで，それに対応したマルコフ連鎖を考えることができる．Kenneth S. Brown (2000) の手法を用い，具体的なマルコフ連鎖の問題に対して，その推移確率行列の固有値と重複度を求めた．

1　導入

確率論及び代数学並びに解析学の基本的な事項を紹介する．

Definition 1 (条件付き確率)**.** X, Y を確率変数とし，$\mathbb{P}(Y = y) > 0$ であるとする．このとき，

$$\mathbb{P}(X = x | Y = y) = \frac{\mathbb{P}(X = x, Y = y)}{\mathbb{P}(Y = y)}$$

を X **の** Y **による条件付き確率**という．

Definition 2 (マルコフ連鎖)**.** Ω を有限集合，Ω に値をとる確率変数列を $\{X_n\}_{n\geq 0}$ とする．式 (1) を満たすとき，確率変数列 $\{X_n\}_{n\geq 0}$ が有限**マルコフ連鎖**であるという．

$$\begin{aligned} &\forall t \geq 0\ ,\ x, y, x_0, \ldots, x_{t-1}\ \in \Omega \\ &\mathbb{P}(X_{t+1} = y | X_t = x) = \mathbb{P}(X_{t+1} = y | X_0 = x_0, X_1 = x_1, \ldots, X_{t-1} = x_{t-1}, X_t = x_t) \end{aligned} \tag{1}$$

すなわち，X_{t+1} における状態が直前の状態 X_t にのみ依存し，それ以前の状態 $\{X_0, \ldots, X_{t-1}\}$ に依存しないとき，確率変数列 $\{X_n\}_{n\geq 0}$ が有限**マルコフ連鎖**であるという．

$\{X_n\}_{n\geq 0}$ の確率分布を $\{\mu_n = (a_1, \ldots, a_{|\Omega|}) \mid \sum_{k=1}^{|\Omega|} a_k = 1)\}_{n\geq 0}$ とする．$\{X_n\}_{n\geq 0}$ がマルコフ連鎖であるとき，下のような行列 P が存在して $\mu_{t+1} = \mu_t P$ とかける．

$$P = \begin{pmatrix} p_{1,1} & \cdots & p_{1,|\Omega|} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{|\Omega|,1} & \cdots & p_{|\Omega|,|\Omega|} \end{pmatrix}\ ,\ (p_{i,j}) = \mathbb{P}(X_{k+1} = j \mid X_k = i)$$

* E-mail:yuto.nakagawa.r5@dc.tohoku.ac.jp
本研究は JST 次世代研究者挑戦的研究プログラム JPMJSP2114 の支援を受けたものである。

この行列 P を推移確率行列という.

Definition 3 (半群)**.** 集合 S の演算 $(*)$ が結合則 $((x*y)*z = x*(y*z))$ を満たすとき, $(S,*)$ は**半群**であるという. 今後, 演算に関する記述を省略して, 単に集合 S が半群であるという.

Definition 4 (LRB)**.** 半群 S が次の式 (2) を満たすとき, S は **LRB(Left-Regular Band)** であるという.

$$x^2 = x \quad , \quad xyx = xy \quad \forall x, y \in S \tag{2}$$

Definition 5 (S 上の順序)**.** $x, y \in S$ に対して S 上の順序 $\leq$ を次で定義する.

$$x \leq y \quad \Leftrightarrow \quad xy = y$$

Definition 6 ($y \preceq x$)**.** S 上の二項関係 $\preceq$ を次で定義する.

$$y \preceq x \quad \Leftrightarrow \quad xy = x$$

Definition 7 ($a \sim b$)**.** $\preceq$ を用いて, S 上の同値関係 $\sim$ を次で定める.

$$a \sim b \quad \Leftrightarrow \quad a \preceq b \text{ かつ } b \preceq a$$

Definition 8 (L, supp)**.** 集合 L を S の $\sim$ による商集合で定義する. また, S から $S/{\sim}$ への自然な全射写像を supp とかく.

$$\begin{array}{cccc} & S & \twoheadrightarrow & S/{\sim} =: L \\ \mathrm{supp}: & x & \longmapsto & \mathrm{supp}\, x \end{array}$$

Definition 9 (L 上の順序)**.** L 上の順序 (二項関係) $\leq$ を次で定義する.

$$\mathrm{supp}\, y \leq \mathrm{supp}\, x \quad \Leftrightarrow \quad xy = x$$

Definition 10 (チャンバー)**.** S を LRB とし, $\forall x \in S, cx = c$ を満たす $c \in S$ を**チャンバー**という. チャンバー全体の集合を $C \subset S$ とかく.

Definition 11 ($C_{\geq x}, c_X$)**.**

$$C_{\geq x} = \{c \in C \mid xc = c\} \ , \ c_X := \#\{c \mid \mathrm{supp}\, x = X, xc = c\}$$

Remark 12. S が LRB である. $\Leftrightarrow$ L が束である (任意の 2 元に対して, 上限・下限を持つ).
$C \subset S$ であり, $\forall x \in S, c \in C \to xc \in C$ となる.
$\mathrm{supp}\, x = \mathrm{supp}\, x', \mathrm{supp}\, y = \mathrm{supp}\, y'$ のとき, $\mathrm{supp}\, x \leq \mathrm{supp}\, y \Leftrightarrow \mathrm{supp}\, x' \leq \mathrm{supp}\, y'$ が成り立つ.
$\mathrm{supp}\, x = \mathrm{supp}\, x'$ のとき, $\#C_{\geq x} = \#C_{\geq x'}$ となる.

Definition 13 (指示関数)**.** $q(s)$ を s に関する命題とする. 命題 $q(s)$ によって定まる変数 s の**指示関数**は以下で定義される.

$$1_{q(s)} = \begin{cases} 1 & (\text{命題 } q(s) \text{ が成立する}) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

Definition 14 (メビウス関数)**.** S を束とする．S 上の**メビウス関数** μ を次の式で定める．

$$\sum_{s \leq t \leq u} \mu(s,t) = 1_{s=u}$$

具体的な値は $\mu(s,s) = 1$ から順に帰納的に定まる．

Definition 15 (q 類似)**.** q **類似**とは，$q \to 1$ の極限を考えることで，元の形と同じようになるものをいう．即ち，X が変数 q を含む式であり，$\lim_{q \to 1} X = Y$ が成立するとき，X が Y の q **類似**であるという．

Definition 16 (超平面・超平面配置)**.** $\mathbb{R}^n$ に対して，$A_i \sim \mathbb{R}^{n-1}$ を満たす A_i を**超平面**という．本発表ではより制限して，以下のような超平面 H $\{H \subset \mathbb{R}^n \mid a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b\}$ $(a_i \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^n)$ を考える．有限個の超平面の組を**超平面配置**といい，$\mathcal{A} := \{A_i\}_{i \in I}$ $(|I| < \infty)$ とかく．

2　先行研究

Theorem 17 ([4])**.** S を単位元を持つ有限の Left Regular Band とする．$\{w_x\}$ を S 上の確率分布とする．C 上のマルコフ連鎖を，確率 w_x で選んだ $x \in S$ を左からかけることによって定義する．このマルコフ連鎖の推移確率行列を P とすると，P は対角化可能である．また，各 $X \in L$ に対して，重複度が m_X であるような固有値 λ_X を持つ．

$$\lambda_X = \sum_{\mathrm{supp}\, y \leq X} w_y \qquad m_X = \sum_{Y \geq X} \mu(X,Y) c_Y \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{Y \geq X} m_Y = c_X$$

Problem 18. Tsetlin library ([4]) $[n] = \{1, \ldots .n\}$ 上の確率分布 $\{v_i\}_{i=1}^n$ が与えられている．本棚に n 冊の異なる種類の本がある．「本 i $(1 \leq i \leq n)$ を確率 v_i で取り出し，それを一番左に移動する」という操作を考える．この操作を繰り返して得られる S_n 上のマルコフ連鎖を，**Tsetlin library** という．

Tsetlin library の状態の変化 $(n = 9)$

8 を選ぶ	v_8		7	3	5	1	<u>8</u>	9	2	4	6
左端に移動	$\to$	<u>8</u>	7	3	5	1		9	2	4	6
	$\to$		8	7	3	5	1	9	2	4	6

Theorem 19 (Tsetlin library の固有値と重複度 [4])**.** Tsetlin library を表す推移確率行列の固有値 (λ_X) と重複度 (m_X) は以下のようになる．

$$\lambda_X = \sum_{i \in X} v_i \qquad m_X = (n - |X|)! \sum_{Z=0}^{n-|X|} \frac{(-1)^Z}{Z!} = d_{n-|X|} \qquad (X \subset [n])$$

$d_k := \#\{\sigma \in S_k \mid \forall i\ \sigma_i \neq i\}$ であり, $d_k = k!\sum_{j=0}^{k} \frac{(-1)^j}{j!}$ となる．すなわち, $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_k) \in S_k$ に対して, 全ての元を動かすような $\sigma \in S_k$ の数であり, **モンモール数**と呼ばれる．

Proof. Tsetlin library は, 次の Left Regular Band S を用いて表現することができる．$S = F_n := \{x = (x_1, \ldots, x_l) \mid 1 \leq l \leq n\} \cup \{e\}$ $(x_i \in [n], x_i \neq x_j)$ （ e : 単位元）．演算 $*$ を次で定める．

$$(x_1, \ldots, x_l) * (y_1, \ldots, y_m) = (x_1, \ldots, x_l, y_1, \ldots, y_m)\%$$

但し, % は「左に既出ならばその元を削除する」という意味とする．

$$\text{例}\quad (217) * (357416) = (217357416)\% = (2173546)$$

$(F_n, *)$ は LRB を満たす．$C = \{(x_1, \ldots, x_n)\}$ となる．また, $C \simeq S_n$ (1 対 1 対応する)．

ここで $\{w_x\}_{x\in S} = \begin{cases} v_i & x = (i) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$ とする．$c \in C$ に, 確率 w_x で選んだ $x \in S$ を左からかけることにより, Tsetlin library の状態の変化を表すことが出来る．

$$\text{例}\ (123456) \xrightarrow{3} (312456) : (3) * (123456) = (3123456)\% = (312456)$$

この S, w_x に対して定理 17 を適用することで求められる． □

超平面配置を用いて表現することもできる [3]．

Proof. $V = \mathbb{R}^n, H_{i,j} := \{x_i = x_j\}$ $(i \neq j)$ とする．この超平面配置を「braid arrangement」という．

$\mathcal{A} = \{H_{i,j}\}_{i,j\in[n],i<j}$ とする．各 $H_{i,j}$ に対して, $\{x_i > x_j\}(i < j)$ の向きを正とする．$\sigma_{i,j} \in \{-1, 0, 1\}$ として, ${H_{i,j}}^{\sigma_{i,j}}$ を以下のように定める．

1. ${H_{i,j}}^{+1} := x_i > x_j$
2. ${H_{i,j}}^{-1} := x_i < x_j$
3. ${H_{i,j}}^{0} := x_i = x_j$

$F^\sigma = \bigcap_{i,j\in[n]} {H_{i,j}}^{\sigma_{i,j}}$ とする．F^σ は, 各超平面 $H_{i,j}$ に対して向きを考えたものである．F^σ 全体の集合を $\mathcal{F}$ とかき, $\mathcal{F}$ の元を「面 (face)」と呼ぶ．但し, 面が存在しないような符号の組み合わせについては面を定義しないものとする．

面は, $\{x_1, \ldots, x_n\}$ を等号を含むことを認めて大小関係で並べたものと考えることができる．すなわち, $\mathcal{F} = \{F \mid F = (x_{i_1} > (=)\ x_{i_2} > (=) \cdots > (=)\ x_{i_n})\}$ と考えることができる．

$\sigma(F)$ を面 F の各超平面 $H_{i,j}$ に対する符号の列 $\{\sigma_{i,j}\}_{i,j\in[n]}$ とする．そのような符号列になる面が存在する場合, 面ごとに符号列は一意に定まり, 符号列ごとに面は一意に定まる．

面の積 (*) を各 $H_{i,j}$ に対する符号を用いて以下のように定める．

$$\sigma_{i,j}(F * G) = \begin{cases} \sigma_{i,j}(F) & (\sigma_{i,j}(F) \neq 0) \\ \sigma_{i,j}(G) & (\sigma_{i,j}(F) = 0) \end{cases}$$

そうすると, $(\mathcal{F}, *)$ は LRB となる.

また, チャンバー C は, $\sigma_{i,j}(C) \neq 0$ $(\forall i, j)$ を満たす. チャンバー C 全体の集合を $\mathcal{C}$ と書くと, $\mathcal{C} \sim S_n$ となる.

ここで, $\mathcal{F}$ 上の分布 w_F を以下のように定める.

$$w_F = \begin{cases} v_1 & F_1 = (x_1 > x_2 = \cdots = x_n) \\ v_2 & F_2 = (x_2 > x_1 = \cdots = x_n) \\ & \vdots \\ v_n & F_n = (x_n > x_1 = \cdots = x_{n-1}) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

これで, Tsetlin library を表現することができる.

この $\mathcal{F}, w_F$ に対して定理 17 を適用することでも求めることができる. $\square$

Problem 20 (Tsetlin library の q 類似 2 [4])**.** $V = {\mathbb{F}_q}^n \setminus \{\vec{0}\}$ とする. V 上の確率分布 $\{u_v\}_{v \in V}$ が与えられているとする. $A = (a_1, \ldots, a_n)$ $(a_i \in V\ ,\ a_1, \ldots, a_n$ は一次独立$)$ とする. A 全体の集合と $GL_n(\mathbb{F}_q)$ は 1 対 1 対応である.

$A = (a_1, \ldots, a_n)$ に $b \in V$ を左からかけることを, 「$a_i = db + \sum_{j=0}^{i-1} c_j a_j\ ,\ d, c_j \in \mathbb{F}_q$ が成り立つ a_i を削除し, $A' = (b, a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n) \in GL_n(\mathbb{F}_q)$ にする」と定義する. $\{u_b\}_{b \in V}$ を V 上の確率分布とする. 確率 u_b でベクトル b を選び, 上の操作を行う. 行列 A に対して, 次のような増加列 A' を対応させる. 但し, $\dim \operatorname{span}\{a_1, \ldots, a_k\} = k$ となるようにする.

$$A = (a_1, \ldots, a_n) \to A' = (\emptyset \subset \operatorname{span}\{a_1\} \subset \operatorname{span}\{a_1, a_2\} \subset \cdots \subset \operatorname{span}\{a_1, \ldots, a_n\} = {\mathbb{F}_q}^n)$$

この操作によって得られる $\{A'\} :=$ 増加列全体の集合上のマルコフ連鎖を, **Tsetlin library の q 類似 2** と呼ぶ.

増加列の具体例 $(n = 3, q = 3)$

$$A = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} B = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} C = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} * A$$

$$A' = \left(\emptyset \subset \left\{ \begin{matrix} \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} \end{matrix} \right\} \subset \left\{ \begin{matrix} \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} \end{matrix} \right\} \subset {\mathbb{F}_3}^3 \right) = B'$$

$$C' = \left(\emptyset \subset \left\{ \begin{matrix} \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix} \end{matrix} \right\} \subset \left\{ \begin{matrix} \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} \end{matrix} \right\} \subset {\mathbb{F}_3}^3 \right)$$

Theorem 21 (Tsetlin library の q 類似 2 の推移確率行列の固有値と重複度 [4])**.** Tsetlin library の q 類似 2 の推移確率行列は, 重複度 m_X であるような固有値 λ_X を持ち, 次のように表される. 但し, $X = \mathrm{span}\{v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}\} \cup \emptyset$ $(1 \leq k \leq n)$ である.

$$\lambda_X = \sum_{v \in X} w_v \qquad m_X = \|d_{n-\dim X}\|_q = [n-\dim X]_q! \sum_{j=0}^{n-\dim X} \frac{(-1)^j}{[j]_q!} q^{\binom{j}{2}}$$

$\|d_k\|_q$ は**モンモール数の q 類似**と呼ばれる ([1]).

3 主結果

本発表では, 問題 22 , 24 , 26, 28 に現れるマルコフ連鎖に関する講演者の研究内容を報告する. 先行研究 18 , 20 を元に以下の問題 22 , 24 , 26, 28 を考えた. これらのマルコフ連鎖を表現できる Left Regular Band を構成し, 定理 17 を用いて対応する推移確率行列の固有値と重複度を明らかにした. 定理 23 については, v_i と c_j が一様分布の時に, 別の方法での証明がある [5]

Problem 22. **p 色版 Tsetlin library** 独立な分布 $\{v_i\}_{i=1}^n, \{c_j\}_{j=0}^{p-1}$ が与えられている. n 冊の本と p 色のカバーがある. 「確率 v_i で本 i を取り除き, その本のカバーを, 確率 c_j で色 j のカバーにに付け替え, 一番左に戻す」という操作を行う. この操作によって得られる $G_{n,p}$ 上のマルコフ連鎖を p **色版 Tsetlin library** と呼ぶ. なお, 色の選び方はそれ以前のカバーの色に依らないものとする.

p 色版 Tsetlin library の状態の変化 $(n=8, p=3), (a,0)=a, (b,1)=b, (c,2)=c$.

v_4		7	3	5	1	$\underline{4}$	2	8	6
数字 4 を選ぶ $\rightarrow$	$\underline{4}$	7	3	5	1		2	8	6
色 1 に変える $\rightarrow$	$\underline{4}$	7	3	5	1		2	8	6
c_1		4	7	3	5	1	2	8	6

Theorem 23 (p 色版 Tsetlin library の固有値とその重複度)**.** p 色版 Tsetlin library を表す推移確率行列の固有値 (λ_X) と重複度 (m_X) は以下のようになる.

$$\lambda_X = \sum_{i \in X} w_i \qquad m_X = (n-|X|)! p^{n-|X|} \sum_{Z=0}^{n-|X|} \frac{(-1)^Z}{Z! p^Z} = D_{n-|X|,p} \qquad (X \subset [n])$$

$D_{k,p} := \#\{\tau \in G_{k,p} \mid \forall i \ \sigma_i \neq i \ \vee \ a_i \neq 0\}$ であり, $D_{k,p} = k! p^k \sum_{j=0}^{k} \frac{(-1)^j}{j! p^j}$ となる. すなわち, $\tau = ((\sigma_1, a_1), \ldots, (\sigma_k, a_k)) \in G_{k,p}$ において, 任意の i に対して「$\sigma_i \neq i$ または $a_i \neq 0$ を満たす」ような $\tau \in G_{k,p}$ の数を, p **色版モンモール数** と呼び, $D_{k,p}$ と書く.

Problem 24 (**Tsetlin library の q 類似**)**.** $V = {\mathbb{F}_q}^n \setminus \{\vec{0}\}$ とする. V 上の確率分布 $\{w_v\}_{v \in V}$ が与えられているとする. $A = (a_1, \ldots, a_n)$ $(a_i \in V$, $a_1, \ldots, a_n$ は一次独立) とする. A 全体の集合 $\mathcal{A}$ と $GL_n(\mathbb{F}_q)$ は 1 対 1 対応である. $A = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathcal{A}, b \in V$ に対して, 「 $bA = (b, a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n) \in \mathcal{A}$」と定義する. 但し a_i は, $a_i = db + \sum_{j=0}^{i-1} c_j a_j$, $d, c_j \in \mathbb{F}_q$ を満

たすものとする．確率 u_b でベクトル b を選び，左から b をかけるという操作を行う．この操作によって得られる $GL_n(\mathbb{F}_q)$ 上のマルコフ連鎖を，**Tsetlin library の q 類似**と呼ぶ．

Tsetlin library の q 類似の状態の変化

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$w\ \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{ベクトルをもってくる}]{\text{左に非 0 の}}\quad \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{表せるのを消す}]{\text{既出の元の線形和で}}\quad \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\because \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+(q-1)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\qquad \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

Theorem 25 (**Tsetlin library の q 類似 の推移確率行列の固有値と重複度**)**.** Tsetlin library の q 類似を表す推移確率行列の固有値 (λ_X) と重複度 (m_X) は以下のようになる．但し，$\langle 0\rangle! = 1$ ，$\langle n\rangle! = q^{\binom{n}{2}}\prod_{k=1}^{n}(q^k-1)\ (n\geq 1)$ ，$X = \mathrm{span}\{v_{i_1},\ldots,v_{i_k}\}\cup\emptyset\ (1\leq k\leq n)$ ．

$$\lambda_X=\sum_{v\in X}w_v\qquad m_X=\langle n-\dim X\rangle!\sum_{j=0}^{n-\dim X}\frac{(-1)^j q^{\binom{j}{2}}q^{\dim X(n-\dim X-j)}}{\langle j\rangle!}=F_n(\dim X)$$

$F_n(k)=\langle n-k\rangle!\sum_{j=0}^{n-k}\frac{(-1)^j q^{\binom{j}{2}}q^{k(n-k-j)}}{\langle j\rangle!}$ であり，[2] の式 (3.4) を一部変形したものである．

Problem 26 (**超立方体の頂点上のランダムウォーク**)**.** 原点中心長さ 2 の超立方体において，「確率 v_j で j の符号を変化させる」という操作を行う．この操作によって得られる $\{\pm 1\}^n$ 上のマルコフ連鎖を**超立方体の頂点上のランダムウォーク**という．

超立方体の頂点上のランダムウォークの状態の変化 $(n=7)$

$$v_3\quad (+1,-1,-1,-1,+1,-1,+1)$$
$$\rightarrow\quad (+1,-1,{\color{red}+1},-1,+1,-1,+1)$$

Theorem 27 (**超立方体の頂点上のマルコフ連鎖の lazy 版の固有値と重複度**)**.** 超立方体の頂点上のマルコフ連鎖の lazy 版の固有値とその重複度は以下のようになる．但し，$(X\subset[n])$ とする．

$$\lambda_X=\sum_{i\notin X}v_i\quad m_X=1$$

Problem 28 (**riffle shuffle**)**.** $1, \ldots, n$ の順列のそれぞれの数字に対し, $(0,1)$ のいずれかの番号を一様に割り振る．元の順列の順番からの変更を行わないで, 0 を割り振った数字のみを左に移動するという操作を行う．この操作によって得られる S_n 上のマルコフ連鎖を **riffle shffle** という．

riffle shuffle の状態の変化 $(n=7)$

$$\begin{matrix} 2 & 5 & 3 & 1 & 4 & 6 & 7 & \to & 5 & 1 & 4 & 2 & 3 & 6 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix}$$

Theorem 29 (**riffle shuffle の固有値と重複度**)**.** 超立方体の頂点上のマルコフ連鎖の lazy 版の固有値とその重複度は以下のようになる．但し, $(X \subset [n])$ とする．riffle shuffle の推移確率行列の固有値と重複度は以下のように表される．但し, $(0 \leq k \leq n)$ とする

$$\lambda_k = 2^{n-k} \quad , \quad m_k = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$$

但し, $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ は第一種スターリング数といい, n 個の要素を k 個の巡回列に分割する個数である．

参考文献

[1] Wachs, M. L., On q-derangement numbers, Proc. Amer. Math. Soc., **106**, (1989), no. 1, 273–278.

[2] Chen, W. Y. C., Rota, G., q-analogs of the inclusion-exclusion principle and permutations with restricted position, Discrete Math., **104** (1992), no. 1, 7–22.

[3] Bidigare, P., Hanlon, P., Rockmore, D., A combinatorial description of the spectrum for the Tsetlin library and its generalization to hyperplane arrangements, Duke Math. J., **99** (1999), no. 1, 135–174.

[4] Brown, K. S., Semigroups, rings, and Markov chains, J. Theoret. Probab., **13** (2000), no. 3, 871–938.

[5] Nakano , F., Sadshiro , T., Sakurai , T. Top to random shuffles on colored permutations, preprint, arXiv : 2207.08071, (2022),