等質空間上の確率測度に対する Delsarte 理論

広島大学　大学院先進理工系科学研究科　先進理工系科学専攻　数学プログラム
中田彬文 (Akifumi NAKADA)*

概要

Delsarte 理論は符号理論とデザイン理論を，Fourier 解析を通して双対概念として結びつけるものである．従来の有限部分集合に対する Delsarte 理論は，Delsarte's bound と呼ばれる，符号やデザインの研究における基礎的な道具を提供し，接吻数問題や球充填問題の部分的解決にも貢献している．本稿では，確率測度に対する Delsarte 理論の定式化を行う．本稿は奥田隆幸氏（広島大学）との共同研究に基づく．

1　導入

昨今，コンパクト Gelfand 対からくる等質空間上の有限部分集合に対する Delsarte 理論が盛んに研究されている．Delsarte 理論は，組合せ最適化の一部である符号理論とデザイン理論を，Fourier 解析を通して双対概念として結びつけるものである．符号理論は，信頼性の高い情報通信を効率的に行うことを目標に，空間上の点配置であって，2 点間の離れ具合が適切なもの（コード）を探す理論である．特に，濃度が大きいほど良い点配置であるとしている．応用例としては QR コードの誤り訂正がある．一方で，デザイン理論は，誤差の小さい標本調査を効率的に行うことを目標に，空間上の点配置であって，ある種の関数に対して，配置した点上の平均と空間全体での平均が一致するもの（デザイン）を探す理論である．特に，濃度が小さいほど良い点配置であるとしている．応用例としては実験計画法がある．符号理論やデザイン理論では，最良のコード・デザインを見つけることが非常に重要な目標であるが，あるコードやデザインの "最" 良性を示すことがしばしば難しい問題となる．そこで Delsarte 理論が役に立つ．Delsarte 理論はコードやデザインの濃度に Delsarte's bound と呼ばれる制限をかける．この制限がコードやデザインの最良性の指標になるのである．

Delsarte 理論の始まりは 1973 年の Philippe Delsarte による学位論文 [6] である．この論文では，アソシエーションスキームと呼ばれる対象の上で，有限部分集合に対する符号理論とデザイン理論が同時に展開され，これら 2 つの理論が Fourier 解析を通して双対概念として結びつけられた．その後，Delsarte 理論は 1977 年に n 次元球面上でも同様に展開され [7]，1980 年代にランク 1 コンパクト対称空間上に一般化された [4]．さらに，2000 年代に入ってから，ランク 2 以上のコンパクト対称空間である複素・実 Grassmann 多様体とユニタリ群上でも調べられた [1,2,13,14].（2009 年までの進展は [3] に詳しい.）特に，ユニタリ群上のデザイン理論は，量子ゲート（量子コンピュータに用いられる量子回路の部品）の性能評価法の 1 つであるランダマイズド・ベンチマーキングを応用にも

* E-mail: nakada-aki@hiroshima-u.ac.jp

つ [11]．また，Delsarte 理論（や，その発展形）は，組合せ論において非常に重要な問題である接吻数問題（$n-1$ 次元単位球の周りに単位球を重ならないように触れさせる際に，最大でいくつ触れさせられるか調べる問題）や最密球充填問題（n 次元 Euclid 空間に単位球を重ならないように詰める際に，最も密に詰められる配置を調べる問題）の部分的解決に貢献した [5,9,10,12,15]．

本稿では，有限部分集合の代わりに確率測度に対して Delsarte 理論を展開する．確率測度に一般化するメリットとしては，有限とは限らない "良い" 部分空間を見つけることによって，従来の意味で良いデザインを構成できる可能性があることが挙げられる．例えば，[8] ではユニタリ群において，しかるべき部分空間に着目することで，具体的に良いデザインを構成することに成功している．この部分空間の "良さ" は，部分空間に自然に定まる確率測度のデザイン理論的性質により記述できることが期待されている．このことから，確率測度に対して符号理論・デザイン理論・Delsarte 理論を展開することで，より統一的な議論と，難問である具体的な良いデザインの構成が期待できる．

2　有限部分集合に対する Delsarte 理論

まずは，コンパクト Gelfand 対からくる等質空間上の有限部分集合に対する符号理論・デザイン理論・Delsarte 理論について，よく知られた事実を紹介する．

2.1　符号理論

符号理論は，空間上の点配置であって，2 点間の離れ具合が適切なもの（コード）を探す理論であった．これを数学的に記述する．G をコンパクト Hausdorff 位相群とし，H をその閉部分群とする．ここで，M をコンパクト G 等質空間 G/H とし，$R\colon M\times M\to\mathcal{I}$ を対角作用 $G \curvearrowright M\times M$ による商とする．また，$i_0\in\mathcal{I}$ を $M\times M$ の対角集合とおく．さらに，$X\subset M$ を空でない有限部分集合とし，$\mathcal{A}\subset\mathcal{I}$ とする．ここで，$R(X\times X)\subset\mathcal{A}$ であるとき，X を $\mathcal{A}$ **コード**と呼ぶ．

例 2.1. G を 2 次元実直交群 $O(2)$ とし，H を $O(1)$ とする．このとき，M は単位円 S^1 となり，R は標準実内積となり，$\mathcal{I}=[-1,1]$ となる．ここで，$\mathcal{A}\coloneqq[-1,1/2]\cup\{\,1\,\}$ とおき，X を正 6 角形の頂点集合とおくと，X は濃度最大の $\mathcal{A}$ コードである (cf. 図 1)．

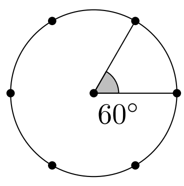

図 1　円周 S^1 と正 6 角形の頂点

2.2　デザイン理論

デザイン理論は，空間上の点配置であって，ある種の関数に対して，配置した点上の平均と空間全体での平均が一致するもの（デザイン）を探す理論であった．これを数学的に記述する．M 上の複素

数値連続関数を $C(M)$ と書き，G 上の確率 Haar 測度の商写像 $G \to M$ による像を μ_M と書く．このとき，μ_M は M 上の G 不変確率 Radon 測度である．また，μ_M による M 上の L^2 空間を $L^2(M)$ と書き，ユニタリ正則表現 $G \curvearrowright L^2(M)$ の既約部分表現全体の成す離散位相空間を $\mathcal{J}$ と書き，M 上の複素数値定数関数全体の成す空間を V_0 と書く．今，$V_0 \in \mathcal{J}$ であり，Peter–Weyl の定理より，各 $V \in \mathcal{J}$ は有限次元であり，$V \subset C(M)$ である．さらに，$X \subset M$ を空でない有限部分集合とし，$\mathcal{T} \subset \mathcal{J}$ とし，$V_0 \in \mathcal{T}$ とする．ここで，任意の $V \in \mathcal{T}$ と $f \in V$ に対して，

$$\int f \, d\mu_M = \frac{1}{\#X} \sum_{p \in X} f(p)$$

が成り立つとき，X を $\mathcal{T}$ **デザイン**と呼ぶ.

例 2.2. $(G, H) \coloneqq (O(2), O(1))$ とする．このとき，μ_M は S^1 上の標準測度となり，$S^1 \subset \mathbb{C}$ とみなすと，$\mathcal{J} = \{ V_n \coloneqq \langle z^n, \overline{z^n} \rangle_{\mathrm{lin}} \mid n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \}$ となる．ここで，$\mathcal{T} \coloneqq \{ V_n \mid n = 0, 1, 2 \}$ とおき，X を正 3 角形の頂点集合とおくと，X は濃度最小の $\mathcal{T}$ デザインである (cf. 図 2).

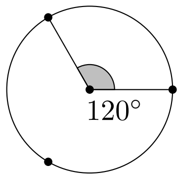

図 2　円周 S^1 と正 3 角形の頂点

2.3　Delsarte 理論

符号理論とデザイン理論を球 Fourier 変換で結びつけ，そこから Delsarte's bound を得る．空でない有限部分集合 $X \subset M$ を固定し，(G, H) は Gelfand 対であるとする．つまり，$G \curvearrowright L^2(M)$ は multiplicity free であるとする．最初に，$\left\{ (a_i)_{i \in \mathcal{I}} \subset \mathbb{C} \;\middle|\; \text{有限個の } i \text{ を除いて } a_i = 0 \right\}$ を $\mathbb{C}_{\mathcal{I}}$ と書き，X の $\mathcal{I}$ **分布** $a^X \in \mathbb{C}_{\mathcal{I}}$ を次で定める.

$$a_i^X \coloneqq \frac{\#R^{-1}(i) \cap X \times X}{\#X \times X} \quad (i \in \mathcal{I}).$$

このように定義すると，$\mathcal{A} \subset \mathcal{I}$ に対して，次の 2 つが同値となる.

(1) X は $\mathcal{A}$ コードである.

(2) 任意の $i \notin \mathcal{A}$ に対して，$a_i^X = 0$ が成り立つ.

この命題によって，符号理論と $\mathcal{I}$ 分布が結びつけられる.

次に，M 上の測度 μ_X を各点 $p \in X$ に対する Dirac 測度の平均と定める．つまり，

$$\int f \, d\mu_X \coloneqq \frac{1}{\#X} \sum_{p \in X} f(p) \quad (f \in C(M))$$

で定める．ここで，X の $\mathcal{J}$ **分布** $b^X \in C(\mathcal{J})$ を次で定める.

$$V \mapsto b_V^X \coloneqq \left(\inf \left\{ \beta \in \mathbb{R} \;\middle|\; \left| \int f \, d\mu_X \right| \leq \beta \|f\|_2 \text{ for all } f \in V \right\} \right)^2 \quad (V \in \mathcal{J}).$$

このように定義すると，$V_0 \in \mathcal{T}$ なる $\mathcal{T} \subset \mathcal{J}$ に対して，次の 2 つが同値となる．

(1) X は $\mathcal{T}$ デザインである．

(2) 任意の $V \in \mathcal{T} - \{ V_0 \}$ に対して，$b^X_V = 0$ が成り立つ．

この命題によって，デザイン理論と $\mathcal{J}$ 分布が結びつけられる．

続いて，$\mathcal{I}$ 分布と $\mathcal{J}$ 分布を結びつける球 Fourier 変換を紹介する．各 $V \in \mathcal{J}$ に対して，$\mathcal{K}_V$ を V に関する再生核とする（つまり，$(e_k)_{k=1}^N$ を V の正規直交基底とし，$\mathcal{K}_V \coloneqq \sum_{k=1}^N e_k \otimes \overline{e_k}$ と定める．）と，商の普遍性より，次の図式を可換にする連続写像 $Q_V \colon \mathcal{I} \to \mathbb{C}$ が一意に存在する．

$$\begin{tikzcd}
M \times M \arrow[d, "R"'] \arrow[dr, "\mathcal{K}_V"] & \\
\mathcal{I} \arrow[r, dashed, "Q_V"'] & \mathbb{C}
\end{tikzcd}$$

この Q_V を V の**球関数**と呼ぶ．これを用いて，**球 Fourier 変換** $\mathcal{F} \colon \mathbb{C}_{\mathcal{I}} \to C(\mathcal{J})$ を次で定める．

$$\mathcal{F}(a) \coloneqq \left(\widehat{a} \colon \mathcal{J} \to \mathbb{C}, \quad V \mapsto \sum_{i \in \mathcal{I}} a_i Q_V(i) \right).$$

このとき，$\mathcal{F}$ は単射線形写像であり，MacWilliams 恒等式 $\widehat{a^X} = b^X$ が成り立つ．以上をまとめると，符号理論とデザイン理論を球 Fourier 変換で結びつけたことになる．

最後に，Delsarte's bound と呼ばれる，X の濃度にかかる制限を紹介する．次の線形計画問題の双対問題の実行可能解を一つ得るたびに，$\mathcal{A}$ コードかつ $\mathcal{T}$ デザインである X に対して，$a^X_{i_0} \in \mathbb{R}$ が取りうる値に制限がかかる．

探索物 $a \in \mathbb{C}_{\mathcal{I}}$,

目的関数 $a \mapsto a_{i_0}$,

制約条件 $a \geq 0, \quad a = 0 \text{ on } \mathcal{A}^c, \quad \widehat{a} \geq 0, \quad \widehat{a} = 0 \text{ on } \mathcal{T} - \{ V_0 \}, \quad \sum_{i \in \mathcal{I}} a_i = 1.$

この制限と $a^X_{i_0} = 1/\#X$ から，X の濃度にも制限がかかる．この制限（のうち最良のもの）を Delsarte's bound と呼ぶ．

3　確率測度に対する Delsarte 理論（主結果）

上で紹介した Delsarte 理論を確率測度に対して拡張する．M 上の確率 Radon 測度全体が成す集合を $\mathcal{P}(M)$ と書く．

3.1　符号理論

測度 μ_X の台 $\operatorname{supp} \mu_X \subset M$ は X に一致することを参考に，確率測度に対してコード性を定義する．$\mu \in \mathcal{P}(M)$ とし，$\mathcal{A} \subset \mathcal{I}$ とする．ここで，$R(\operatorname{supp} \mu \times \operatorname{supp} \mu) \subset \mathcal{A}$ であるとき，μ を $\mathcal{A}$ **コード**と呼ぶ．

3.2 デザイン理論

こちらも自然に拡張する．$\mu \in \mathcal{P}(M)$ とし，$\mathcal{T} \subset \mathcal{J}$ とし，$V_0 \in \mathcal{T}$ とする．ここで，任意の $V \in \mathcal{T}$ と $f \in V$ に対して，$\int f \, d\mu_M = \int f \, d\mu$ が成り立つとき，μ を $\mathcal{T}$ **デザイン**と呼ぶ．

3.3 Delsarte 理論

$\mu \in \mathcal{P}(M)$ を固定する．最初に，μ の $\mathcal{I}$ **分布** $a^\mu \in \mathcal{P}(\mathcal{I})$ を，測度の積と像を用いて $a^\mu \coloneqq R_*(\mu \otimes \mu)$ と定める．さらに，$a_i^\mu \coloneqq a^\mu(\{ i \})$ と定める．このように定義すると，有限部分集合の場合と同様に，次の命題によって符号理論と $\mathcal{I}$ 分布が結びつけられる．

命題 3.1. $\mathcal{A} \subset \mathcal{I}$ とする．このとき，次の 2 つが同値となる．

(1) μ は $\mathcal{A}$ コードである．

(2) $\operatorname{supp} a^\mu \subset \mathcal{A}$ である．

次に，μ の $\mathcal{J}$ **分布** $b^\mu \in C(\mathcal{J})$ を次で定める．

$$V \mapsto b_V^\mu \coloneqq \left(\inf \left\{ \beta \in \mathbb{R} \,\middle|\, \left| \int f \, d\mu \right| \le \beta \|f\|_2 \text{ for all } f \in V \right\} \right)^2 \quad (V \in \mathcal{J}).$$

このように定義すると，有限部分集合の場合と同様に，次の命題によってデザイン理論と $\mathcal{J}$ 分布が結びつけられる．

命題 3.2. $\mathcal{T} \subset \mathcal{J}$ とし，$V_0 \in \mathcal{T}$ とする．このとき，次の 2 つが同値となる．

(1) μ は $\mathcal{T}$ デザインである．

(2) $\operatorname{supp} b^\mu \subset \mathcal{T}^c \cup \{ V_0 \}$ である．

続いて，**球 Fourier 変換** $\mathcal{F}$ を次のように拡張する．

$$\mathcal{F}(a) \coloneqq \left(\widehat{a} \colon \mathcal{J} \to \mathbb{C}, \quad V \mapsto \int Q_V \, da \right).$$

このとき，$\mathcal{F} \colon \mathcal{P}(\mathcal{I}) \to C(\mathcal{J})$ は単射線形写像であり，次の定理が成り立つ．

定理 3.3 (MacWilliams 恒等式)**.** $\widehat{a^\mu} = b^\mu$.

以上をまとめると，確率測度に対しても符号理論とデザイン理論を球 Fourier 変換で結びつけたことになる．

最後に，Delsarte's bound を拡張する．まずは有限部分集合の濃度の代わりを考える．ここでは，$\#X = 1/a_{i_0}^X = \int \chi_{i_0} \, da^{\mu_X}$（$\chi_{i_0}$ は指示関数）を参考にして，実数値連続関数 $\varphi \in C(\mathcal{I})$ を考え，$\int \varphi \, da^\mu \neq 0$ の場合に，$1/\int \varphi \, da^\mu$ を μ の φ **濃度**と呼ぶこととする．このとき，次の命題が成り立つ．

命題 3.4. $X \subset M$ を空でない有限部分集合とし，φ を $\mathcal{I}$ 上の実数値連続関数とし，$\varphi(i_0) = 1$ と $\varphi^{-1}(0)^c \cap R(X \times X) = \{ i_0 \}$ を満たすとする．このとき，μ_X の φ 濃度は X の濃度と一致する．

ここで,

$$C^{\top}_{\mathbb{R}}(\mathcal{I}) \coloneqq \left\{ \psi \in C(\mathcal{I}) \;\middle|\; \overline{\psi([p,q])} = \psi([p,q]) = \psi([q,p]) \text{ for all } [p,q] \in \mathcal{I} \right\},$$
$$C^{\top}_{c,\mathbb{R}}(\mathcal{J}) \coloneqq \left\{ \xi \in C(\mathcal{J}) \;\middle|\; \overline{\xi(V)} = \xi(V) = \xi(\overline{V}) \text{ for all } V \in \mathcal{J},\ \operatorname{supp}\xi \text{ はコンパクト} \right\}$$

とおくと,次の定理が成り立つ.

定理 3.5 (Delsarte's bound). $\varphi \in C^{\top}_{\mathbb{R}}(\mathcal{I})$ とする.このとき,

$$c_{\varphi} \coloneqq \sup\left\{ \xi(V_0) \in \mathbb{R} \;\middle|\; \xi \in C^{\top}_{c,\mathbb{R}}(\mathcal{J}),\ \xi \geq 0 \text{ on } \mathcal{T}^c,\ \varphi - \sum_{V \in \mathcal{J}} \xi(V) Q_V \geq 0 \text{ on } \mathcal{A} \right\},$$
$$d_{\varphi} \coloneqq \inf\left\{ \xi(V_0) \in \mathbb{R} \;\middle|\; \xi \in C^{\top}_{c,\mathbb{R}}(\mathcal{J}),\ \xi \leq 0 \text{ on } \mathcal{T}^c,\ \varphi - \sum_{V \in \mathcal{J}} \xi(V) Q_V \leq 0 \text{ on } \mathcal{A} \right\}$$

とおくと,$\mathcal{A}$ コードかつ $\mathcal{T}$ デザインな $\mu \in \mathcal{P}(M)$ に対して,$c_{\varphi} \leq \int \varphi \, da^{\mu} \leq d_{\varphi}$ が成り立つ.

このことから,μ の φ 濃度にも制限がかかる.この制限(のうち最良のもの)を Delsarte's bound と呼ぶ.

3.4 有限部分集合に対する符号理論・デザイン理論・Delsarte 理論との対応

ここまで,コンパクト Gelfand 対からくる等質空間上の確率測度に対して,符号理論・デザイン理論・Delsarte 理論を展開した.表 1 は有限部分集合に対するものと確率測度に対するものの用語の対応表である.これらの定義から,M の空でない有限部分集合 X が $\mathcal{A}$ コードであることと,μ_X が $\mathcal{A}$ コードであることは同値となり,X が $\mathcal{T}$ デザインであることと,μ_X が $\mathcal{T}$ デザインであることも同値となる.さらに,$a^X_i = a^{\mu_X}_i$ $(i \in \mathcal{I})$ と $b^X = b^{\mu_X}$ が成り立つ.また,従来の Delsarte's bound は $c_{\chi_{i_0}} \leq a^X_{i_0} \leq d_{\chi_{i_0}}$ と表現できる.

表 1 Delsarte 理論の用語の対応

	有限部分集合	確率測度
対象	M の空でない有限部分集合 X	M 上の確率 Radon 測度 μ
$\mathcal{A}$ コード	$R(X \times X) \subset \mathcal{A}$	$R(\operatorname{supp}\mu \times \operatorname{supp}\mu) \subset \mathcal{A}$
$\mathcal{T}$ デザイン	$\int f \, d\mu_M = \int f \, d\mu_X$	$\int f \, d\mu_M = \int f \, d\mu$
a^{-}_i	$\# R^{-1}(i) \cap X^2 / \# X^2$	$a^{\mu}(\{ i \})$
$\mathcal{I}$ 分布	$a^X \coloneqq (a^X_i)_{i \in \mathcal{I}} \in \mathbb{C}_{\mathcal{I}}$	$a^{\mu} \coloneqq R_*(\mu \otimes \mu) \in \mathcal{P}(\mathcal{I})$
b^{-}_V	$\lVert \mu_X\lvert_V \rVert^2_{\mathrm{op}}$	$\lVert \mu\lvert_V \rVert^2_{\mathrm{op}}$
$\mathcal{J}$ 分布	$b^X \colon V \mapsto b^X_V$	$b^{\mu} \colon V \mapsto b^{\mu}_V$
$\widehat{a}$	$V \mapsto \sum_{i \in \mathcal{I}} a_i Q_V(i)$	$V \mapsto \int Q_V \, da$
球 Fourier 変換 $\mathcal{F}$	$\mathbb{C}_{\mathcal{I}} \to C(\mathcal{J})$	$\mathcal{P}(\mathcal{I}) \to C(\mathcal{J})$

4　2 次元球面上の 1 デザインの例

この節では，$(G,H) \coloneqq (O(3), O(2))$ とする．このとき，M は単位球面 S^2 となり，R は標準実内積となり，$\mathcal{I} = [-1,1]$ となる．また，

$$\mathcal{J} = \left\{ \left\{ \mathbb{R}^3 \text{ 上の斉 } n \text{ 次調和多項式全体} \right\} \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \right\} \cong \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

となり，Q_n は n 次 Legendre 多項式の定数倍となる．特に，$Q_0(t) = 1$, $Q_1(t) = 3t$ $(t \in [-1,1])$ となる．ここで，$\varphi(t) \coloneqq t/2 + 1/2$ $(t \in [-1,1])$ とする．このとき，Delsarte's bound から，$\mathcal{I}$ コードかつ $\{ 0, 1 \}$ デザインな $\mu \in \mathcal{P}(M)$（これを 1 デザインと呼ぶ）の φ 濃度は 2 であることが分かる．以下，S^2 上の具体的な 3 つの測度を観察する．

例 4.1. $X \coloneqq \{ (1,0,0), (-1,0,0) \} \subset M$ とする (cf. 図 3)．このとき，$\mu_X \in \mathcal{P}(M)$ は 1 デザインである．実際，μ_X の φ 濃度は 2 である．

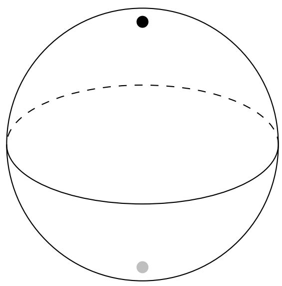

図 3　球面 S^2 と対蹠点

例 4.2. $\mu_0 \in \mathcal{P}(M)$ を $\{ (0, \cos\theta, \sin\theta) \mid \theta \in \mathbb{R} \} \subset M$ 上の標準確率測度とする (cf. 図 4)．このとき，μ_0 は 1 デザインである．実際，μ_0 の φ 濃度は 2 である．

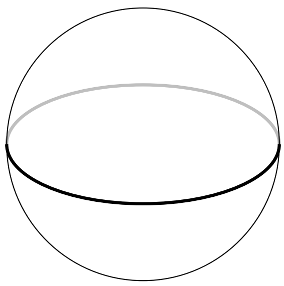

図 4　球面 S^2 と大円

例 4.3. $\mu_{1/2} \in \mathcal{P}(M)$ を $\left\{ (1/2, \sqrt{3}/2\cos\theta, \sqrt{3}/2\sin\theta) \,\middle|\, \theta \in \mathbb{R} \right\} \subset M$ 上の標準確率測度とする (cf. 図 5)．このとき，$\mu_{1/2}$ の φ 濃度は $8/5 < 2$ である．実際，$\mu_{1/2}$ は 1 デザインではない．

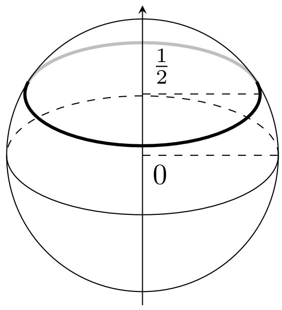

図 5　球面 S^2 と小円

5　まとめ

本研究の主結果は，コンパクト Gelfand 対からくる等質空間上の符号理論・デザイン理論・Delsarte 理論を，有限部分集合に対するものから確率測度に対するものに拡張したことである．

今後の課題を 3 つ挙げる．1 つ目は，φ 濃度の応用上の解釈を与えることである．2 つ目は，コンパクト Gelfand 対からくるという M の仮定を弱めることである．3 つ目は，球 Fourier 変換 $\mathcal{F}\colon \mathcal{P}(\mathcal{I}) \to C(\mathcal{J})$ の像を綺麗に表示することである．

参考文献

[1] C. Bachoc, E. Bannai, and R. Coulangeon. Codes and designs in Grassmannian spaces. Discrete Math., 277(1-3):15–28, 2004.

[2] C. Bachoc, R. Coulangeon, and G. Nebe. Designs in Grassmannian spaces and lattices. J. Algebraic Combin., 16(1):5–19, 2002.

[3] E. Bannai and E. Bannai. A survey on spherical designs and algebraic combinatorics on spheres. European J. Combin., 30(6):1392–1425, 2009.

[4] E. Bannai and S. G. Hoggar. On tight t-designs in compact symmetric spaces of rank one. Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci., 61(3):78–82, 1985.

[5] H. Cohn, A. Kumar, S. D. Miller, D. Radchenko, and M. Viazovska. The sphere packing problem in dimension 24. Ann. of Math. (2), 185(3):1017–1033, 2017.

[6] P. Delsarte. An algebraic approach to the association schemes of coding theory. Philips Res. Rep. Suppl., (10):vi+97, 1973.

[7] P. Delsarte, J. M. Goethals, and J. J. Seidel. Spherical codes and designs. Geometriae Dedicata, 6(3):363–388, 1977.

[8] H. Kurihara and T. Okuda. Great antipodal sets on complex Grassmannian manifolds as designs with the smallest cardinalities. J. Algebra, 559:432–466, 2020.

[9] V. I. Levenshtein. On bounds for packings in n-dimensional euclidean space. Dokl. Akad. Nauk SSSR, 245:1299–1303, 1979.

[10] O. R. Musin. The kissing number in four dimensions. Ann. of Math. (2), 168(1):1–32, 2008.

[11] Y. Nakata et al. Quantum circuits for exact unitary t-designs and applications to higher-order randomized benchmarking. PRX Quantum, 2(3), 9 2021.

[12] A. M. Odlyzko and N. J. A. Sloane. New bounds on the number of unit spheres that can touch a unit sphere in n dimensions. J. Combin. Theory Ser. A, 26(2):210–214, 1979.

[13] A. Roy. Bounds for codes and designs in complex subspaces. J. Algebraic Combin., 31(1):1–32, 2010.

[14] A. Roy and A. J. Scott. Unitary designs and codes. Des. Codes Cryptogr., 53(1):13–31, 2009.

[15] M. S. Viazovska. The sphere packing problem in dimension 8. Ann. of Math. (2), 185(3):991–1015, 2017.