

Toric rings of perfectly matchable subgraph polytopes

関西学院大学大学院理工学研究科数理科学専攻
毛利健太 (Kenta MORI) *

概要

Perfectly matchable subgraph polytope はグラフのマッチングによって生起される多面体である。この多面体の compressed 性と Gorenstein 性について [7] に基づいて、講演する。特に compressed 性に関しては完全な特徴付けが得られた。

1 トーリック環

任意の頂点が格子点の凸多面体 \mathcal{P} を **格子凸多面体** という。体 K に対して K 上 $n+1$ 変数ローラン多項式環を $K[\mathbf{x}^{\pm 1}, s] = K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}, s]$ で表す。格子点 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n$ に対して、 $\mathbf{x}^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \in K[\mathbf{x}^{\pm 1}, s]$ とする。このとき $\mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^n = \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m\}$ ならば \mathcal{P} の **トーリック環** $K[\mathcal{P}]$ は単項式 $\mathbf{x}^{\mathbf{a}_1} s, \dots, \mathbf{x}^{\mathbf{a}_m} s \in K[\mathbf{x}^{\pm 1}, s]$ で生成される $K[\mathbf{x}^{\pm 1}, s]$ の K -部分代数である。さらに **トーリックイデアル** $I_{\mathcal{P}}$ は $K[\mathcal{P}]$ の定義イデアルである。すなわち $i = 1, 2, \dots, m$ に対して $\pi(y_i) = \mathbf{x}^{\mathbf{a}_i} s$ をとる環準同型写像 $\pi : K[y_1, \dots, y_m] \rightarrow K[\mathcal{P}]$ の核である。 $I_{\mathcal{P}}$ は斉次二項式で生成されることが知られている。トーリックイデアル $I_{\mathcal{P}}$ のイニシャルイデアルが任意の逆辞書式順序にて平方自由な単項式で生成されるとき、格子凸多面体 \mathcal{P} は **compressed** であるという [8]。詳しくは [4] が参考になる。

他方、 $K[\mathcal{P}]$ が正規半群環であるとき $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ は **正規** であるという。正規性に関して以下が知られている。

- \mathcal{P} が正規であることと任意の $v \in k\mathcal{P} \cap L_{\mathcal{P}}$ が $\mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^n$ の k 個のベクトルで表せることは同値である。ただし $L_{\mathcal{P}}$ は $\mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^n$ で張られる \mathbb{Z}^n の部分格子である;
- トーリックイデアル $I_{\mathcal{P}}$ のイニシャルイデアルが平方自由な単項式で生成されるような単項式順序が存在するとき、 \mathcal{P} は正規である。

任意の $v \in k\mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^n$ が $\mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^n$ の k 個のベクトルで表せるとき格子凸多面体は integer decomposition property (IDP) を持つという。特に \mathcal{P} が IDP を持つのであれば、 \mathcal{P} は正規である。

格子凸多面体 $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ は $\mathbf{0}$ が内部に存在するただ一つの格子点で、 \mathcal{P} の双対多面体

$$\mathcal{P}^* := \{x \in \mathbb{R}^n : \text{任意の } y \in \mathcal{P} \text{ に対して } x \cdot y \leq 1\}$$

は格子凸多面体となるとき **reflexive** と呼ばれる。ただし $x \cdot y$ は x と y の内積である。次元 n の多

* E-mail: k-mori@kwansei.ac.jp

面体 \mathcal{P} に対して、次元 $n-1$ の面を多面体 \mathcal{P} の **ファセット** と呼ぶ。 \mathcal{P}^* の各頂点は \mathcal{P} のファセットに対応している。次元 n の格子凸多面体 $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ について $\delta\mathcal{P} = \{\delta a : a \in \mathcal{P}\}$ が reflexive polytope と unimodularly equivalent となるとき \mathcal{P} は **指数 δ の Gorenstein** であるという。また格子凸多面体 \mathcal{P} が Gorenstein であることと \mathcal{P} の **エルハート環**

$$K[\mathbf{x}^\alpha s^m : \alpha \in m\mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^n, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}] \subset K[\mathbf{x}^{\pm 1}, s]$$

が Gorenstein であることが同値となる。さらに、 \mathcal{P} が IDP を持つとき、 \mathcal{P} のエルハート環と \mathcal{P} のトーリック環が同型となることが知られている。

2 Perfectly matchable subgraph polytope

頂点集合 $V = [n] = \{1, 2, \dots, n\}$, 辺集合 E で構成される有限グラフを $G = (V, E)$ で表す。本講演では有限かつ単純なグラフを扱う。 $S \subset V$ に対して頂点集合 S , 辺集合 $\{\{i, j\} \in E : i, j \in S\}$ のグラフ $G[S]$ を **誘導部分グラフ** という。グラフにおいて互いに頂点を共有しない k 辺の集合を **k -マッチング** と呼ぶ。有限グラフ G に対して、グラフの全ての頂点を含むマッチングを **完全マッチング** という。グラフの頂点集合の部分集合 S による誘導部分グラフが完全マッチングを持つとき、 S は **perfectly matchable subgraph** を誘導するという。特に \emptyset は perfectly matchable subgraph を誘導する。 $\mathscr{M}(G)$ を perfectly matchable subgraph を誘導するような V の部分集合からなる集合とする。部分集合 $S \subset V$ に対して、 $\rho(S) = \sum_{i \in S} \mathbf{e}_i \in \mathbb{R}^n$ とおく。ただし \mathbf{e}_i は \mathbb{R}^n の i 番目の単位座標ベクトルである。このとき G の **perfectly matchable subgraph polytope** \mathcal{P}_G は $\{\rho(S) \in \mathbb{R}^n : S \in \mathscr{M}(G)\}$ の凸閉包である。この多面体は Balas-Pulleyblank により [2] で定義された。

Example 2.1. G を長さが 4 のサイクルとする。このとき

$$\mathscr{M}(G) = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{1, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$$

である。ここで、2つの 2-マッチング $\{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$ と $\{\{1, 4\}, \{2, 3\}\}$ は同じ頂点集合の部分集合 $\{1, 2, 3, 4\}$ によって誘導されることに注意する。 G から生起される $\mathcal{P}_G \subset \mathbb{R}^4$ は行列

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

の列ベクトルの凸閉包である。

この多面体の次元はグラフが二部グラフであるかどうか依存する。 G を頂点集合 $\{1, 2, \dots, n\}$ の連結グラフとする。このとき

$$\dim \mathcal{P}_G = \begin{cases} n-1 & G \text{ は二部グラフ,} \\ n & \text{その他.} \end{cases}$$

次に、[2, 3] によって与えられた \mathcal{P}_G のファセットを誘導する不等式について記す。まず $x(S)$ を S に対応するベクトルの成分の和とする。次に

$$\mathcal{T} = \{X \subset V : G[X] \text{ の各成分は奇数個の頂点を持つ}\}$$

とする。また、任意の $S \subset V$ に対して S の頂点の少なくとも 1 つに隣接している $V \setminus S$ の部分集合を $\Gamma(S)$ とする。さらに $S \subset V$ に対して $\theta(S)$ を誘導部分グラフ $G[S]$ の連結成分の数とする。

Proposition 2.2 ([3]). 有限グラフ $G = (V, E)$ に対して \mathcal{P}_G は $G[S]$ の任意の連結成分が単独の頂点か頂点数が奇数個の非二部グラフとなるようなすべての $S \in \mathcal{T}$ に対して

$$0 \leq x(v) \leq 1 \quad (\text{任意の } v \in V), \quad (1)$$

$$x(S) - x(\Gamma(S)) \leq |S| - \theta(S) \quad (2)$$

を満たすような $x \in \mathbb{R}^V$ の集合である

グラフ $G = (V, E)$ は任意の $v \in V$ に対して $G \setminus \{v\}$ がパーフェクトマッチングを持つとき G は **critical** (もしくは **factor-critical**) と呼ばれる。任意の critical なグラフは単独の頂点か頂点数が奇数個の連結な非二部グラフである。

Proposition 2.3 ([3]). G を非二部グラフとする。 $S \in \mathcal{T}$ に対して、不等式 (2) が \mathcal{P}_G のファセットを誘導することと S が以下を満たすことが同値。

- (i) $G[S]$ のすべての成分は *critical*;
- (ii) $G \setminus (S \cup \Gamma(S))$ のすべての成分は非二部グラフ;
- (iii) $G[S \cup \Gamma(S)]$ から両端が $\Gamma(S)$ に属している辺をすべて取り除くことで得られるグラフが連結である。

特に、 $|S| = 1$ ならば S は条件 (i) と (iii) を満たす。

Proposition 2.4 ([2]). $G = (V, E)$ を頂点集合 $V = V_1 \cup V_2$ の二部グラフとする。このとき \mathcal{P}_G は

$$0 \leq x(v) \leq 1 \quad (\text{任意の } v \in V), \quad (3)$$

$$x(S) - x(\Gamma(S)) \leq 0 \quad (\text{任意の } \emptyset \neq S \subset V_1), \quad (4)$$

$$x(V_1) - x(V_2) = 0 \quad (5)$$

を満たすような $x \in \mathbb{R}^V$ の集合である。

グラフ G において取り除かれることで G が非連結となるようなグラフの頂点を**切断点**という。

Proposition 2.5 ([2]). $G = (V_1 \cup V_2, E)$ を連結二部グラフとする。このとき以下が成り立つ。

- (a) 不等式 $0 \leq x(v)$ が \mathcal{P}_G のファセットを誘導することと v が切断点ではないことが同値;
- (b) G は少なくとも 2 本の辺を持つとする。このとき不等式 $x(v) \leq 1$ が \mathcal{P}_G のファセットを誘導することと $\deg(v) \geq 2$ であることが同値;
- (c) 任意の $\emptyset \neq S \subsetneq V_1$ に対して不等式 (4) が \mathcal{P}_G のファセットを誘導することと $G[S \cup \Gamma(S)]$ と $G[(V_1 \setminus S) \cup (V_2 \setminus \Gamma(S))]$ が連結であることが同値。

3 他の多面体との関係

台集合 $\{1, 2, \dots, n\}$ と基底の集合 \mathcal{B} に対するマトロイドを M とする。マトロイド M の base polytope $B(M)$ は $\{\rho(B) : B \in \mathcal{B}\} \subset \mathbb{R}^n$ の凸閉包である。グラフが二部グラフのとき \mathcal{P}_G は transversal matroid の base polytope と unimodularly equivalent であることが [2] にて触れられている。任意のマトロイドに対してマトロイドの base polytope は IDP を持つ [10]。よって以下が従う。

Proposition 3.1. 連結な二部グラフに対して \mathcal{P}_G は IDP を持つ。

次に有限グラフより生起される多面体との関連について記す。有限グラフ G の頂点集合の部分集合 S に対して、 G の任意の辺が S の部分集合となっていないとき S は **stable** であるという。 $S(G) = \{S_1, \dots, S_t\}$ をグラフ G のすべての stable set からなる集合とする。グラフ G の stable set polytope は $\{\rho(S_1), \dots, \rho(S_t)\}$ の凸閉包で、 $\text{Stab}(G)$ と表記される。

高々一つしかサイクルを持たない連結なグラフを **pseudotree** という。 $G = (V, E)$ に対して線グラフ $L(G)$ は頂点集合 E 、辺集合 $\{\{e, e'\} : e, e' \in E, e \cap e' \neq \emptyset\}$ によるグラフである。

Proposition 3.2. G を偶サイクルを持たない pseudotree とする。このとき \mathcal{P}_G のトーリック環 $K[\mathcal{P}_G]$ と $K[\text{Stab}(L(G))]$ は同型である。

偶サイクルを持たない pseudotree の線グラフは高々一つの奇サイクルと完全グラフのクリーク和である。奇サイクルと完全グラフの stable set polytope はそれぞれ正規であり、クリーク和によって stable set polytope の正規性は保たれる。よって以下が従う。

Proposition 3.3. G を pseudotree とする。このとき \mathcal{P}_G は正規である。

4 主定理

切断点のない極大部分グラフを **ブロック** と呼ぶ。compressed である \mathcal{P}_G に関して以下を明らかにした。

Theorem 4.1. 有限連結グラフ G に対して、 \mathcal{P}_G が compressed であることと G のブロックのうち高々一つが K_4 か $K_{1,1,n}$ でそれ以外は完全二部グラフとなることが同値である。

Example 4.2. 図 1 のグラフによって生起される perfectly matchable subgraph polytope は compressed である。

また、Gorenstein である \mathcal{P}_G に関して以下の 2 つを示した。

Theorem 4.3. 連結二部グラフ $G = (V_1 \cup V_2, E)$ が $\deg(v) \geq 2$ を満たすような切断点ではない頂点 v を持つとする。このとき以下は同値:

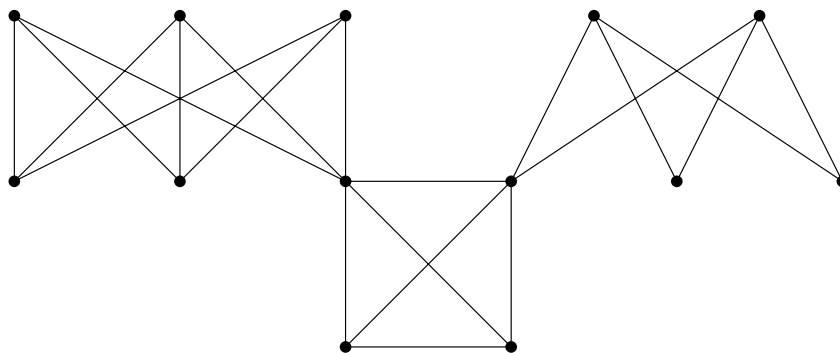


図1 完全二部グラフ $K_{3,3}$ 、 $K_{2,3}$ と完全グラフ K_4 をブロックに持つグラフ

- (i) $K[\mathcal{P}_G]$ は *Gorenstein* である;
- (ii) \mathcal{P}_G は *Gorenstein* である;
- (iii) \mathcal{P}_G は指数 2 の *Gorenstein* である;
- (iv) G は完全マッチングを持ち、 $G[S \cup \Gamma(S)]$ と $G[(V_1 \setminus S) \cup (V_2 \setminus \Gamma(S))]$ が連結になるような任意の空でない部分集合 $S \subseteq V_1$ に対して、 $|S| + 1 = |\Gamma(S)|$ が成り立つ。

さらに、 G が 2-連結ならば上記の条件は以下とも同値となる。

- (v) G の *edge polytope* が *Gorenstein* である。

次数が 2 種類のグラフを **bidegreed graph** という。

Theorem 4.4. 有限グラフ G は *pseudotree* とする。このとき、 $K[\mathcal{P}_G]$ が *Gorenstein* であることと G が以下のいずれかを満たすことは同値:

- (i) G は K_1, K_2 もしくは *bidegreed tree*;
- (ii) G は C_5 ;
- (iii) G は三角形 C を持ち、

$$\begin{cases} \deg(v) \in \{2, 3\} & v \in V(C) \text{ のとき} \\ \deg(v) \in \{1, 3\} & \text{その他;} \end{cases}$$
- (iv) G は偶サイクル C を持ち、以下を満たす $\delta \geq 2$ が存在する。

$$\begin{cases} \deg(v) = \delta & v \in V(C) \text{ のとき} \\ \deg(v) \in \{1, \delta - 1\} & \text{その他。} \end{cases}$$

Example 4.5. 図 2 のグラフによって生起される *perfectly matchable subgraph polytope* のトーリック環は *Gorenstein* である。

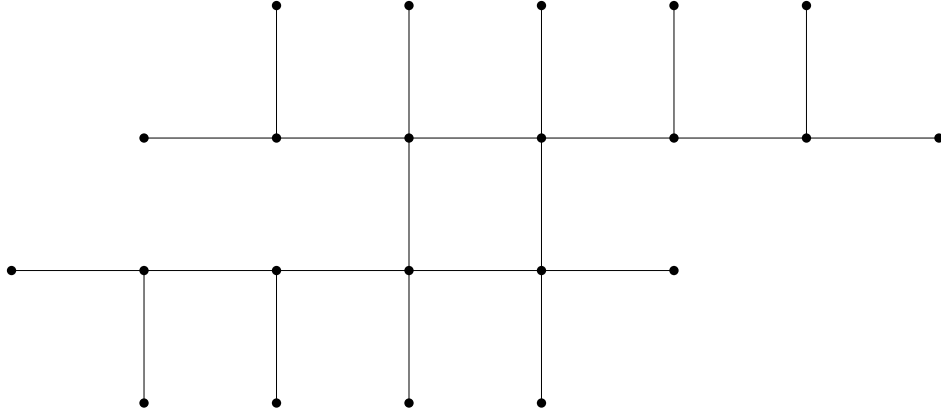


図2 偶サイクルの頂点の次数が4でそれ以外の頂点の次数が3もしくは1の pseudotree

5 Theorem 4.1 の証明の概要

まず Theorem 4.1 については Sullivant による判定法 [8, Theorem 2.4] を使って求めた。

Proposition 5.1 ([8]). \mathcal{P} は冗長でない線形表現 $\mathcal{P} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{x} \geq b_i, i = 1, \dots, s\}$ を持つとする。ただし $i = 1, 2, \dots, s$ に対して、 $\mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^n$ である。このとき \mathcal{P} が *compressed* であることと各 i に対して $\{\mathbf{x} \in L_{\mathcal{P}} : \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{x} = b_i + m_i\} \cap \mathcal{P} \neq \emptyset$ であるような $m_i \in \mathbb{R}$ が高々一つ存在することが同値である。

グラフ G に対して G' を G の誘導部分グラフとする。このとき $\mathcal{P}_{G'}$ は \mathcal{P}_G の面となる。compressed な多面体のすべての面は compressed であることが知られているため以下が従う。

Lemma 5.2. G' を $\mathcal{P}_{G'}$ が *compressed* ではないような連結グラフとする。グラフ G が G' を誘導部分グラフとして持つとき、 \mathcal{P}_G は *compressed* ではない。

以下の補題は Proposition 5.1 によって得られた結果の一つである。

Lemma 5.3. G を連結なグラフとする。 \mathcal{P}_G が *compressed* であるとき、 G は長さが5以上の奇サイクルを部分グラフに持たない。

Proof. G は長さが $2n + 1$ の奇サイクルを部分グラフに持つとする。ただし $n \geq 2$ である。このとき $S = V(C_{2n+1})$ に対して $G' = G[S]$ を考える。Lemma 5.2 より、誘導部分グラフ G' から生じられる $\mathcal{P}_{G'}$ が *compressed* ではないことを示せば十分である。仮定より、 $G' \setminus (S \cup \Gamma(S))$ は空となる。 C_{2n+1} は critical であり C_{2n+1} の頂点集合は G' の頂点集合と一致するため、 $G' = G'[S]$ は critical となる。だらに $\Gamma(S) = \emptyset$ であり $G'[S \cup \Gamma(S)] = G'$ は連結である。したがって、Proposition 2.3 より

$$x(S) \leq |S| - \theta(S) = 2n + 1 - 1 = 2n$$

は $\mathcal{P}_{G'}$ のファセットを誘導する。このとき $x \in \mathcal{P}_{G'} \cap \mathbb{Z}^{2n+1}$ となる $x(S)$ が $n + 1 \geq 3$ 個存在する。

実際、

$$\{x(S) : x \in \mathcal{P}_{G'} \cap \mathbb{Z}^{2n+1}\} = \{0, 2, \dots, 2n\}$$

である。Proposition 5.1 より、 $\mathcal{P}_{G'}$ は compressed ではない。□

さらに以下の結果がグラフ理論では知られている。

Proposition 5.4 ([5, 9]). グラフ G に対して以下は同値:

- (i) G の線グラフ $L(G)$ は *perfect*;
- (ii) G は長さが 5 以上の奇サイクルを部分グラフに持たない;
- (iii) G の各ブロックは二部グラフ、 K_4 、もしくは $K_{1,1,n}$ である。

したがって以下が従う。

Lemma 5.5. G を連結なグラフとする。 \mathcal{P}_G が *compressed* であるとき、 $\text{Stab}(L(G))$ は *perfect* である。

ここでは compressed 性において stable set polytope との興味深い関連が見られる。ここから Proposition 5.1 を用いてグラフをさらに絞り込み、Theorem 4.1 を得た。

6 Theorem 4.4 の証明の概要

次に Theorem 4.4 について証明を簡単に紹介する。stable set polytope のエルハート環について以下の結果が得られている。

Proposition 6.1 ([6, Theorem 3.8]). グラフ G を *h-perfect graph* とする。このとき $\text{Stab}(G)$ の Ehrhart 環が *Gorenstein* であることと G のすべての極大なクリークは同じ基数 ω で、 G は以下の条件のうち一つを満たす:

- (i) $\omega = 1$;
- (ii) $\omega = 2$ かつ G は長さが 7 以上の誘導奇サイクルを持たない;
- (iii) $\omega \geq 3$ かつ G は長さが 5 以上の誘導奇サイクルを持たない。

これと Lemma 3.2 を併用することで Theorem 4.4 の (i)-(iii) を得られた。残るは偶サイクルを持つ pseudotree の \mathcal{P}_G が *Gorenstein* となる条件 (iv) を示す必要がある。連結な二部グラフの perfectly matchable subgraph polytope については以下の結果を得た。

Proposition 6.2. グラフ G を頂点集合 $V = \{1, 2, \dots, n\} = V_1 \cup V_2$ による連結な二部グラフとする。このとき \mathcal{P}_G が指数 δ の *Gorenstein* であることと以下を満たす $\delta \geq 2$ と $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ が存在することが同値:

- (i) $\alpha(V_1) = \alpha(V_2)$;
- (ii) v が切断点ではないとき、 $\alpha(v) = 1$;
- (iii) $\deg(v) \geq 2$ のとき、 $\alpha(v) = \delta - 1$;

(iv) $\emptyset \neq S \subsetneq V_1$ に対して $G[S \cup \Gamma(S)]$ と $G[(V_1 \setminus S) \cup (V_2 \setminus \Gamma(S))]$ が連結のとき、 $\alpha(S) - \alpha(\Gamma(S)) = -1$ が成り立つ。

これを pseudotree に適用することで Theorem 4.4 の (iv) を得た。

7 今後の展望

この多面体のトーリック環及びトーリックイデアルについてソフトウェア CoCoA[1] を用いて計算実験を行ったが perfectly matchable subgraph polytope のトーリックイデアルが二次生成にならないグラフは見つけられなかった。

Conjecture 7.1. 任意の有限グラフ G に対して、トーリックイデアル $I_{\mathcal{P}_G}$ は二次生成である。

この予想が正しいのであれば以下の予想にも取り組みたい。

Conjecture 7.2. 任意の有限グラフ G に対して $I_{\mathcal{P}_G}$ のグレブナー基底が二次となるような単項式順序が存在する。

参考文献

- [1] J. Abbott, A.M. Bigatti and L. Robbiano, CoCoA: a system for doing Computations in Commutative Algebra. Available at <http://cocoa.dima.unige.it>
- [2] E. Balas and W.R. Pulleyblank, The perfectly matchable subgraph polytopes of a bipartite graph, *Networks* **13** (1983), 495–516.
- [3] E. Balas and W.R. Pulleyblank, The perfectly matchable subgraph polytope of an arbitrary graph, *Combinatorica* **9** (1989), 321–337.
- [4] J. Herzog, T. Hibi and H. Ohsugi, “Binomial ideals”, Graduate Texts in Math. **279**, Springer, Cham, 2018.
- [5] F. Maffray, Kernels in perfect line-graphs, *J. Combin. Theory Ser. B* **55**, (1992) 1–8.
- [6] M. Miyazaki, On the Gorenstein property of the Ehrhart ring of the stable set polytope of an h -perfect graph, *Int. Electron. J. Algebra* **30**, (2021) 269–284.
- [7] K. Mori, Toric rings of perfectly matchable subgraph polytopes, *Graphs Combin.* **39** (2023) 121.
- [8] S. Sullivant, Compressed polytopes and statistical disclosure limitation, *Tohoku Math. J.* **58** (2006), 433–445.
- [9] L.E. Trotter, Line perfect graphs, *Math. Program.* **12** (1977) 255–259.
- [10] N. L. White, The basis monomial ring of a matroid, *Adv. Math.* **24** (1977) 292–297.