Hopf 群代数を用いた 4 次元多様体の不変量

東北大学大学院理学研究科数学専攻
持田知朗 (Tomoro MOCHIDA) *

概要

本稿では，Hopf 群代数を用いて構成した 4 次元多様体とその基本群の表現の組に対する不変量について紹介する．Hopf 群代数とは Hopf 代数の一般化であり，群による次数付けの情報を備えたものである．基本群の表現を通じて 4 次元多様体と群を関連付け，この情報を Hopf 群代数の次数付けと適切に対応させることで構成を実現している．さらに適当な有限性の条件を満たすとき，ここから 4 次元多様体の不変量を定義した．

1 導入

低次元トポロジーにおいて不変量は主要な研究対象であり，これまでにも結び目，3 次元多様体，4 次元多様体を主な対象として様々な不変量が扱われてきた．これらの構成は基本，幾何的対象の組み合わせ的な表示（三角形分割や Kirby 図式）とその上の基本変形（Pachner 移動や Kirby 移動）に代数的な対象（Hopf 代数やある種の圏）を適切に対応させるという手順を取る．この対応付けが基本変形で不変であることをもって不変性が示されるのである．このようにして不変量が構成されると，そこに潜む幾何学的な情報や既存の不変量との関係，位相的場の理論への拡張など様々なことが調べられていく．

本稿では代数的対象に Hopf 代数の一般化である Hopf 群代数を用いて 4 次元多様体とその表現の組に対しての不変量の構成を行う．

2 Hopf 群代数

ここでは Hopf 群代数の定義と不変量の構成に必要となる性質について簡単にまとめる．Hopf 群代数は Hopf 代数の一般化であり Turaev [Tur00] のより提案された．この双対には Hopf 群余代数という対象が当てはまり，この代数的性質については Virelizier [Vir02; Vir05] が詳しく調べている．そして Hopf 群代数の性質の多くはこれらの性質の双対を考えることで得ることができる．より詳細な議論は例えば Hopf 代数については [Rad12] を，Hopf 群（余）代数については [Vir02; Vir05; ZW22] を参照されたい．

以降本稿では G を群とし，$1 = 1_G \in G$ をその単位元とする．またベクトル空間は全て複素数体 $\mathbb{C}$ 上であるものとし，線形写像や双対空間，テンソル積等も全て $\mathbb{C}$ 上のものと仮定する．そして二

* E-mail: tomorou.mochida.r5@dc.tohoku.ac.jp

つのベクトル空間 U, V に対して $\tau_{U,V}\colon U \otimes V \to V \otimes U; u \otimes v \mapsto v \otimes u$ を成分を入れ替える写像とする．

定義 2.1. Hopf $\boldsymbol{G}$ 代数 (Hopf G-algebra) $\mathcal{A} = (\{A_\alpha\}_{\alpha \in G}, m, \eta, \Delta, \varepsilon, S)$ とは，G で添字付けられたベクトル空間の族 $\{A_\alpha\}_{\alpha \in G}$ と，五つの線形写像（の族）

- 積の族 $m = \{m_{\alpha,\beta}\colon A_\alpha \otimes A_\beta \to A_{\alpha\beta}\}_{\alpha,\beta \in G}$,
- 単位射 $\eta\colon \mathbb{C} \to A_1$,
- 余積の族 $\Delta = \{\Delta_\alpha\colon A_\alpha \to A_\alpha \otimes A_\alpha\}_{\alpha \in G}$,
- 余単位射の族 $\varepsilon = \{\varepsilon_\alpha\colon A_\alpha \to \mathbb{C}\}_{\alpha \in G}$,
- 対合射の族 $S = \{S_\alpha\colon A_\alpha \to A_{\alpha^{-1}}\}_{\alpha \in G}$

の組であり，次の条件を満たすもののことをいう：$\alpha, \beta, \gamma \in G$ を任意の元とする．

(HA1) $m_{\alpha\beta,\gamma}(m_{\alpha,\beta} \otimes \mathrm{id}_{A_\gamma}) = m_{\alpha,\beta\gamma}(\mathrm{id}_{A_\alpha} \otimes m_{\beta,\gamma})$,
(HA2) $m_{1,\alpha}(\eta \otimes \mathrm{id}_{A_\alpha}) = \mathrm{id}_{A_\alpha} = m_{\alpha,1}(\mathrm{id}_{A_\alpha} \otimes \eta)$,
(HA3) $(\Delta_\alpha \otimes \mathrm{id}_{A_\alpha})\Delta_\alpha = (\mathrm{id}_{A_\alpha} \otimes \Delta_\alpha)\Delta_\alpha$,
(HA4) $(\varepsilon_\alpha \otimes \mathrm{id}_{A_\alpha})\Delta_\alpha = \mathrm{id}_{A_\alpha} = (\mathrm{id}_{A_\alpha} \otimes \varepsilon_\alpha)\Delta_\alpha$,
(HA5) $\Delta_{\alpha\beta} m_{\alpha,\beta} = (m_{\alpha,\beta} \otimes m_{\alpha,\beta})(\mathrm{id}_{A_\alpha} \otimes \tau_{A_\alpha,A_\beta} \otimes \mathrm{id}_{A_\beta})(\Delta_\alpha \otimes \Delta_\beta)$,
(HA6) $\varepsilon_{\alpha\beta} m_{\alpha,\beta} = \varepsilon_\alpha \otimes \varepsilon_\beta$,
(HA7) $\Delta_1 \eta = \eta \otimes \eta$,
(HA8) $\varepsilon_1 \eta = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$,
(HA9) $m_{\alpha^{-1},\alpha}(S_\alpha \otimes \mathrm{id}_{A_\alpha})\Delta_\alpha = \eta\varepsilon_\alpha = m_{\alpha,\alpha^{-1}}(\mathrm{id}_{A_\alpha} \otimes S_\alpha)\Delta_\alpha$.

また全ての $\alpha \in G$ に対して A_α が有限次元のとき $\mathcal{A}$ は**有限型** (finite type) であるという．

注意 2.2. このとき $A_1 = (A_1, m_1, \eta, \Delta_{1,1}, \varepsilon_1, S_1)$ は通常の Hopf 代数となる．また各 $\alpha \in G$ に対して $(A_\alpha, \Delta_\alpha, \varepsilon_\alpha)$ は $\mathbb{C}$ 余代数となっている．群 G が自明な群 $G = \{1\}$ のときこの定義は Hopf 代数の定義と一致する．この意味で Hopf 群代数は Hopf 代数の一般化といえる．

記号. これ以降では適宜次の記法を用いる：

$$m_{\alpha,\beta}(x \otimes y) = xy, \quad \eta(1) = 1_{A_1}, \quad \Delta_\alpha(x) = x^{(1)} \otimes x^{(2)},$$
$$\Delta_\alpha^{(n-1)}(x) = x^{(1)} \otimes \cdots \otimes x^{(n)} \quad (\alpha, \beta \in G, x \in A_\alpha, y \in A_\beta).$$

次の性質は有限次元 Hopf 代数の理論において重要な役割を果たす積分と呼ばれる概念の拡張である．

定義 2.3. $\mathcal{A}$ を有限型 Hopf G 代数とする．A_α たちの元の族 $\Lambda = (\Lambda_\alpha)_{\alpha \in G} \in \prod_{\alpha \in G} A_\alpha$ が $\mathcal{A}$ の**左** (left)（resp. **右** (right)）**$\boldsymbol{G}$ 積分** (G-integral) であるとは，任意の $\alpha, \beta \in G$, $x \in A_\alpha$ に対して

$$x\Lambda_\beta = \varepsilon_\alpha(x)\Lambda_{\alpha\beta} \quad (\text{resp. } \Lambda_\beta x = \varepsilon_\alpha(x)\Lambda_{\beta\alpha})$$

が成り立つときをいう．Λ が左かつ右積分であるとき**両側 $\boldsymbol{G}$ 積分** (two-sided G-integral) という．

またある $\alpha \in G$ に対して $\Lambda_\alpha \neq 0$ となるとき Λ は**非零** (non-zero) であるという．

次は Hopf 代数における準三角性を拡張する概念である．

定義 2.4. **交差 Hopf G 代数** (crossed Hopf G-algebra) $(\mathcal{A},\varphi)$ とは，Hopf G 代数 $\mathcal{A}$ と**交差** (crossing) と呼ばれる線形写像の族 $\varphi=\{\varphi_\beta^\alpha\colon A_\alpha\to A_{\beta\alpha\beta^{-1}}\}_{\alpha,\beta\in G}$ の組であり，次の条件を満たすもののことをいう：$\alpha,\beta,\beta',\gamma\in G$ を任意の元とする．

(CHA1) $\varphi_\beta^\alpha\colon A_\alpha\to A_{\beta\alpha\beta^{-1}}$ は $\mathbb{C}$ 余代数としての同型射である，
(CHA2) $m_{\beta\alpha\beta^{-1},\beta\gamma\beta^{-1}}(\varphi_\beta^\alpha\otimes\varphi_\beta^\gamma)=\varphi_\beta^{\alpha\gamma}m_{\alpha,\gamma}\colon A_\alpha\otimes A_\gamma\to A_{\beta\alpha\gamma\beta^{-1}}$,
(CHA3) $\varphi_\beta^1(1_{A_1})=1_{A_1}$,
(CHA4) $\varphi_{\beta\beta'}^\alpha=\varphi_\beta^{\beta'\alpha\beta'^{-1}}\varphi_{\beta'}^\alpha\colon A_\alpha\to A_{\beta\beta'\alpha\beta'^{-1}\beta^{-1}}$.

定義 2.5. **準三角 Hopf G 代数** (quasitriangular Hopf G-algebra) $(\mathcal{A},\varphi,R)$ とは，交差 Hopf G 代数 $(\mathcal{A},\varphi)$ と**普遍 R 行列** (universal R-matrix) と呼ばれる可逆元 $R\in A_1\otimes A_1$ の組であり，次の条件を満たすもののことをいう：$\alpha,\beta\in G$, $x\in A_\alpha$ を任意の元とする．

(QHA1) $(\Delta_1\otimes\mathrm{id}_{A_1})(R)=R_{13}R_{23}$,
(QHA2) $(\mathrm{id}_{A_1}\otimes\Delta_1)(R)=R_{13}R_{12}$,
(QHA3) $R\Delta_\alpha(x)=\Delta_\alpha^{\mathrm{cop}}(x)R$,
(QHA4) $(\varphi_\beta^1\otimes\varphi_\beta^1)(R)=(R)$.

但し，$R_{12}\coloneqq R\otimes 1_{A_1}$, $R_{23}\coloneqq 1_{A_1}\otimes R$, $R_{13}\coloneqq(\mathrm{id}_{A_1}\otimes\tau_{A_1,A_1})(R_{12})\in A_1^{\otimes 3}$, $\Delta_\alpha^{\mathrm{cop}}\coloneqq\tau_{A_\alpha,A_\alpha}\Delta$ である．

最後に次の仮定を満たす Hopf 群代数が必要になる．

定義 2.6. Hopf G 代数 $\mathcal{A}$ に対してその対合射 $S=\{S_\alpha\}_{\alpha\in G}$ が任意の $\alpha\in G$ に対して $S_{-\alpha}S_\alpha=\mathrm{id}_{A_\alpha}$ を満たすとき $\mathcal{A}$ は **対合的** (involutory) であるという．[*1]

3 色付き Kirby 図式

本稿で扱う多様体は特に断らない限り滑らかで向き付けられた連結な閉多様体であるとする．

3.1 Kirby 図式

4 次元多様体の Kirby 図式 (Kirby diagram) とは，多様体のハンドル分解における 1 ハンドルと 2 ハンドルの接着の情報を表す S^3 内のフレーミング付き絡み目図式のことであった．この図式は 1 ハンドルの接着を表すフレーミング 0 の互いに交わらない自明結び目達（2 ハンドルと区別するためこれらにはドットを付けておく）と，2 ハンドルの接着を表すフレーミング付き結び目達からなり，ここから 4 次元多様体（の微分同相類）が特定できる．ここではこの図式を平面に射影したものを考え，フレーミングはブラックボードフレーミングで与えられているとする．例を図 1, 2 に載せた．不

[*1] この仮定は代数の半単純性に対応する．

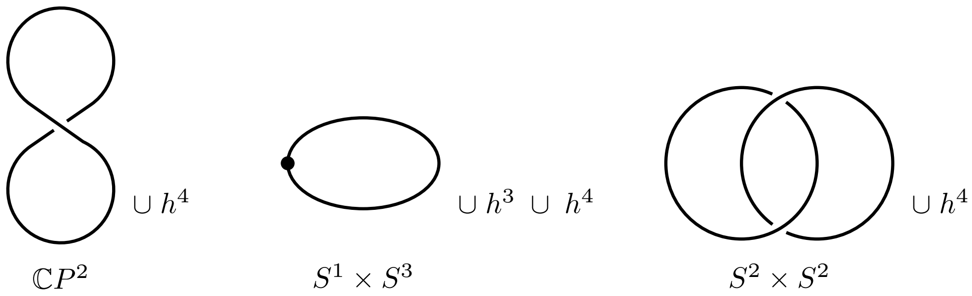


図 1: Kirby 図式の例．3 ハンドルと 4 ハンドルはその個数のみを記載している．

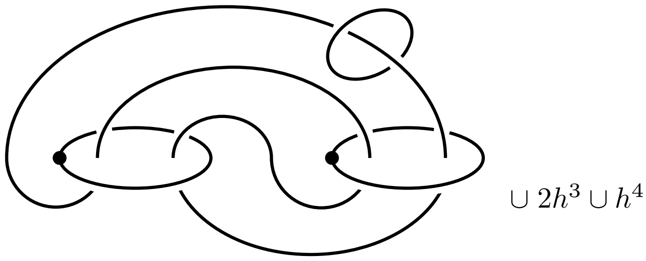


図 2: $S^1 \times S^1 \times S^2$ の Kirby 図式．基本群の表示は左側のドット付き成分に対応する文字を s_1，右側に対応する文字を s_2 とすると $\langle s_1, s_2 \mid s_1 s_2 s_1^{-1} s_2^{-1} \rangle \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ となることが確かめられる．

変量の構成を理解する上ではこれらの図のような絡み目図式をイメージしてもらえれば十分なので，ここでは詳細な議論には立ち入らない．詳しくは例えば [GS99; Akb16] 等を参照されたい．

さて 4 次元多様体 M の Kirby 図式 $L = L_1 \sqcup L_2$ が与えられると，そこから次のようにして M の基本群 $\pi_1(M)$ の生成元と関係式による表示を得ることができる：その方法はまず，L_1 の各成分 ξ_i に生成元 s_i を対応させる．そして L_2 の各成分 η_j に対して任意の地点から任意の向きにこれを辿っていき，L_1 の成分を通過するごとにそれに対応する生成元を，上から下に通過するときはそのまま，下から上に通過するときはインバースをつけて記録する．最後にこれらを辿った向きに掛け合わせたものが関係式 r_j となる．（η_j がどの L_1 の成分も通過しないときは便宜上 $r_j = 1$（自明な関係式）と解釈する．）このとき基本群 $\pi_1(M)$ の表示が

$$\pi_1(M) = \langle s_1, \ldots, s_m \mid r_1, \ldots, r_n \rangle$$

として得られる（m, n はそれぞれ L_1, L_2 の成分の個数)．図 2 が一例である．

3.2　色付き Kirby 図式

不変量の定義では Kirby 図式に基本群の表現を用いて，図式の 1 ハンドルを表す成分（ドット付き成分）に G の元でラベル付けを行う．

定義 3.1. G を群とする．多様体 M の基本群 $\pi_1(M)$ の G への**表現** (representation) とは群準同型写像 $\rho\colon \pi_1(M) \to G$ のことをいう．

M の基本群の二つの表現 $\rho, \rho' \colon \pi_1(M) \to G$ が**同型** (isomorphic) であるとは，これらが G のある元による共役の差を除いて等しいときをいう．すなわち，ある $\beta \in G$ が存在して任意の $s \in \pi_1(M)$ に対して $\rho'(s) = \beta\rho(s)\beta^{-1}$ が成り立つときをいう．また二つの異なる多様体 M, M' の基本群の表現 $\rho \colon \pi_1(M) \to G$, $\rho' \colon \pi_1(M') \to G$ が**同値** (equivalent) であるとは，ある向きを保つ微分同相写像 $h \colon M \to M'$ が存在して ρ と $\rho' h_*$ が同型になるときをいう．ここに $h_* \colon \pi_1(M) \to \pi_1(M')$ は h によって誘導される同型写像である．

M を 4 次元多様体とし，$L = L_1 \sqcup L_2$ を M の Kirby 図式とする．M の基本群の G への表現 $\rho \colon \pi_1(M) \to G$ を一つ取る．上述の要領で基本群を $\pi_1(M) = \langle s_1, \ldots, s_m \mid r_1, \ldots, r_n \rangle$ と表示し，L_1 の各成分 ξ_i を $\alpha_i := \rho(s_i)$ でラベル付けする．この α_i を $\xi_i \in L_1$ の**色** (color)，このラベル付けを ***G* 彩色** (G-coloring)，そして G 彩色を備えた Kirby 図式を ***G* 色付き Kirby 図式** (G-colored Kirby diagram) と呼ぶ．

ある多様体の二つのハンドル分解は接着写像のアイソトピーと消去対の生成・除去で移り合った．4 次元多様体ではこれらはアイソトピーと Kirby 移動 (Kirby moves) と呼ばれる五つの移動で達成される [GS99, Section 5.1]．これに関連して，二つの同値な表現から得られる G 色付き Kirby 図式は次の操作で移り合う：

- 図式の射影の仕方に関するアイソトピー．[*2]
- （平面的）Kirby 移動（図 3）．
- L_1 の全ての成分の色を一斉に G のある元の共役だけ変更する．

4　不変量

4.1　不変量の構成

本章にて主結果である 4 次元多様体とその基本群の表現の組に対する不変量の構成を行う．構成は Hennings 型と呼ばれるプロセスの 4 次元版 [Hen96; BM03] を用いる．

$(\mathcal{A}, \varphi, R)$ を有限型対合的準三角 Hopf G 代数とし，$\Lambda = (\Lambda_\alpha)_{\alpha \in G}$ を $\mathcal{A}$ の（両側）G 積分，λ を A_1^* の（両側）積分[*3]で（正規化をして）$\lambda(\Lambda_1) = 1, \varepsilon_1(\Lambda_1) = 1$ を満たすものとする．そして M を 4 次元多様体，$L = L_1 \sqcup L_2$ をその Kirby 図式とする．基本群の表現 $\rho \colon \pi_1(M) \to G$ を固定して，3.2 節の要領で L に G 彩色を与える．さらに L_2 の各成分に任意に向きをつけておく．

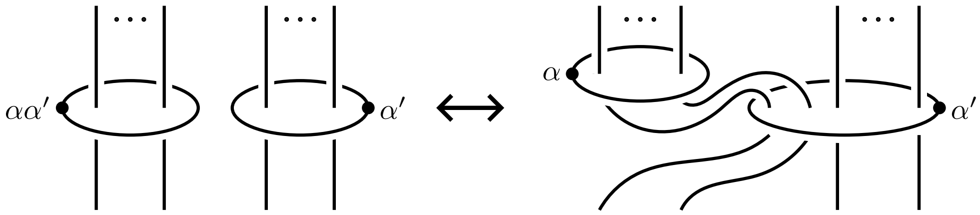
次のルールに基づいて L_2 の各成分に $\mathcal{A}$ の元を割り当てていく：

まず L_2 の成分 η 上の特異点でない点 q に対して σ_q をこの付近で η が下向きのとき 0 と，上向きのとき 1 と定める．

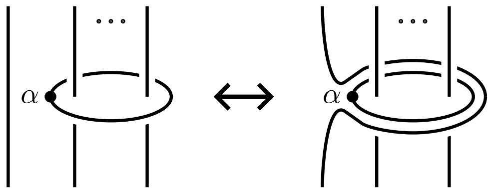
- L_1 の各成分 ξ に対しては，その色を α として，ξ が囲う円板と L_2 の成分との交点を左から

[*2] この移動も局所的な図形の変形で実現される．

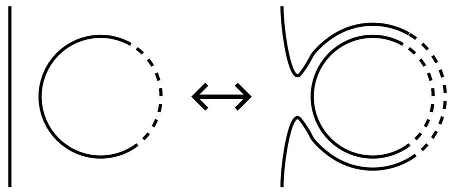
[*3] 線形写像 $\lambda \colon A_1 \to \mathbb{C}$ で任意の $x \in A_1$ に対して $(\mathrm{id}_A \otimes \lambda)\Delta(x) = \lambda(x) 1_A$ を満たすもの．



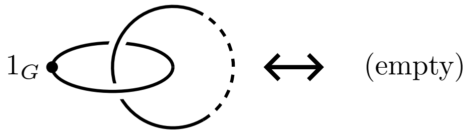
III-1: 1-1 ハンドルスライド



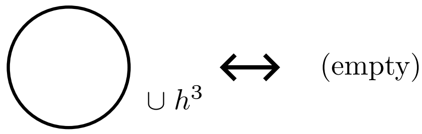
III-2: 1-2 ハンドルスライド



III-3: 2-2 ハンドルスライド



III-4: 1-2 消去対



III-5: 2-3 消去対

図 3: 平面的 Kirby 移動．移動 III-3 ではスライドされる側の成分の点線部分は自分自身や他の成分と自由に絡んでいてよく，またスライドはブラックボードフレーミングに沿って行われる．一方，移動 III-4 ではドット無し成分はドット付き成分を丁度一回通過しており，点線部分では自由に自己交叉を持ってよいがその他の成分とは絡んではいけない．

$q_1, \ldots, q_k$ とする．そしてこれらに左から順に

$$\begin{aligned}&(S_\alpha^{\sigma_{q_1}} \otimes \cdots \otimes S_\alpha^{\sigma_{q_k}})(\Delta_\alpha^{(k-1)}(\Lambda_\alpha))\\ &\quad = S_\alpha^{\sigma_{q_1}}(\Lambda_\alpha^{(1)}) \otimes \cdots \otimes S_\alpha^{\sigma_{q_k}}(\Lambda_\alpha^{(k)}) \in A_{\alpha^{(-1)^{\sigma_{q_1}}}} \otimes \cdots \otimes A_{\alpha^{(-1)^{\sigma_{q_k}}}}\end{aligned}$$

を対応させる（図 4）．ξ を L_2 のどの成分も通過しないときはこの成分の寄与は $\varepsilon_\alpha(\Lambda_\alpha)$ と解釈する．

- L_2 の成分同士の交叉（自己交叉も含む）に対しては，交点付近の上側の成分上の点を q_1，下側の成分上の点を q_2 として交叉の正負を確かめる．そして正の交叉には普遍 R 行列 $R = a_i \otimes b_i \in A_1 \otimes A_1$ を，負の交叉にはその逆元 $R^{-1} = (S_1 \otimes \mathrm{id}_{A_1})(R) \in A_1 \otimes A_1$ を対応させる（図 5）．但し，テンソルの第一成分を q_1 に，第二成分を q_2 に割り当てる．

今，L_2 の各成分には上のルールから得られる $\mathcal{A}$ の元が割り当てられている（この他の場所には便宜上 1 が割り当てられていると解釈する）．各成分に対してこれらの元をその成分の向きに沿って掛け合わせると，基本群の関係式の考察から得られる元は A_1 に属する．従って得られた値に A_1^* の

図 4: L_1 と L_2 の間での寄与

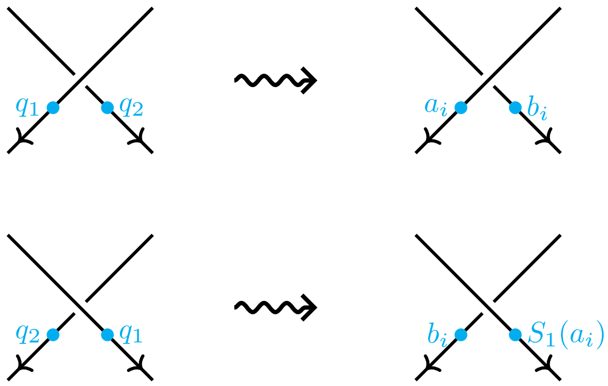


図 5: 正の交叉での寄与（上）と負の交叉での寄与（下）

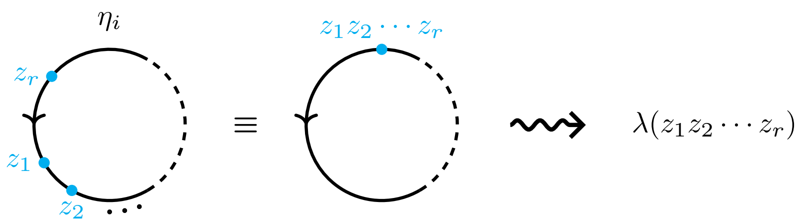


図 6: 各成分の評価

積分 λ を適用できる（図 6）．[*4]全ての L_2 の成分に対してこれを行いそれらを掛けたものを $\langle L, \rho \rangle_{\mathcal{A}}$ とかく（ブラケットと呼ぶ）．最後にこの値を $1/\dim(A_1)^{|L_2|-|L_1|}$ で正規化したものを $I_{\mathcal{A}}(M, \rho, L)$ と定める（$|L_i|$ は i ハンドルの個数）：

$$I_{\mathcal{A}}(M, \rho, L) \coloneqq \frac{1}{\dim(A_1)^{|L_2|-|L_1|}} \langle L, \rho \rangle_{\mathcal{A}}.$$

このとき次が成り立つ：

定理 4.1. 上の設定において $I_{\mathcal{A}}(M, \rho, L)$ は 4 次元多様体とその基本群の表現の組に対する不変量となる．

証明の概略. 示すべきことは次である：

[*4] この値が掛け合わせる際の始点の取り方に依らないことは $\mathcal{A}$ の対合性から導かれる．

- L_2 の成分の向きの取り方に依らないこと．
- 3.2 節で挙げた図式の変形で不変なこと．

一つ目は，L_2 の一つの成分の向きを変えることは元々の向きでその成分に割り当てられた元に対合射を作用させ，積を取る順番を逆にすることに相当する，これに注意すれば対合性から得られる $\lambda S = \lambda$ という関係式を用いることで一つ目が従う．

二つ目は図式の局所的な変形の前後において不変量への寄与が同じことを示す．その際に Hopf G 代数の性質を様々用いる． □

不変性が証明されたことにより以下では $I_{\mathcal{A}}(M, \rho, L)$ を単に $I_{\mathcal{A}}(M, \rho)$ と記す．

4.2　誘導される 4 次元多様体の不変量

構成から分かるように不変量の定義には与えられた 4 次元多様体 M の他に付加構造として基本群の G への表現を必要とする．ここから表現に依らない多様体 M のみに関する不変量を考察することは自然な発想といえる．一つのアプローチとしてここでは G が有限群のとき，考えられる全ての表現に渡って不変量を足し合わせることで 4 次元多様体の不変量を定義する：

$$I_{\mathcal{A}}(M) \coloneqq \sum_{\rho} I_{\mathcal{A}}(M, \rho),$$

ここに和は M の基本群の G への表現の同型類全てに渡って取る．

参考文献

[Akb16] S. Akbulut. *4-manifolds.* Vol. 25. Oxford University Press, 2016.

[BM03] I. Bobtcheva and M. G. Messia. “HKR-type invariants of 4–thickenings of 2–dimensional CW complexes”. In: *Algebr. Geom. Topol.* 3.1 (2003), pp. 33–87.

[GS99] R. E. Gompf and A. I. Stipsicz. *4-Manifolds and Kirby Calculus.* Graduate studies in mathematics. American Mathematical Society, 1999.

[Hen96] M. Hennings. “Invariants of links and 3-manifolds obtained from Hopf algebras”. In: *J. Lond. Math. Soc.* 54.3 (1996), pp. 594–624.

[Rad12] D. E. Radford. *Hopf Algebras.* Vol. 49. Series on knots and everything. World Scientific, 2012.

[Tur00] V. Turaev. Homotopy field theory in dimension 3 and crossed group-categories. arXiv preprint. 2000. arXiv: `math/0005291 [math.GT]`.

[Vir02] A. Virelizier. “Hopf group-coalgebras”. In: *J. Pure Appl. Algebra* 171.1 (2002), pp. 75–122.

[Vir05] A. Virelizier. “Involutory Hopf group-coalgebras and flat bundles over 3-manifolds”. In: *Fundam. Math.* 188 (2005), pp. 241–270.

[ZW22] S. Zhang and S. Wang. “A new approach to braided T-categories and generalized quantum Yang–Baxter equations”. In: *Mathematics* 10.6 (2022), p. 968.