Nearly Gorenstein polytopes

大阪大学大学院情報科学研究科情報基礎数学専攻
宮下 空 (Sora MIYASHITA) *

概 要

格子多面体から生じる Ehrhart 環の nearly Gorenstein 性に関する結果について紹介する. 格子多面体の Ehrhart 環が nearly Gorenstein になるための必要条件と十分条件をそれぞれ与える. 特に nearly Gorenstein 多面体が持つ分解について考察する. さらに, 多面体の分解を考察することで得られる nearly Gorenstein$(0,1)$-多面体の構造定理について紹介する.

1 導入

1.1 背景

本稿は Thomas Hall, Max Kölbl, 松下 光虹さんとの共著論文 [HKMM] の内容に基づく.

$\mathbf{k}$ を無限体とし, 非負整数, 整数, 有理数と実数全体の集合をそれぞれ $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ で表す.

空間 $\mathbb{R}^d$ の空でない有限集合 X の凸包 $\mathrm{conv}(X)$ を**多面体**という. すべての頂点の各成分が整数である多面体 $P \subset \mathbb{R}^d$ のことを**格子多面体**という. P を $\mathbb{R}^{d+1}$ に $d+1$ 番目の座標を 1 として埋め込み, その錐をとると $C_P \subset \mathbb{R}^{d+1}$ が得られる. P の **Ehrhart 環** $A(P)$ は $\mathbf{k}[C_P \cap \mathbb{Z}^{d+1}]$ のことである. ここで各格子点 $(x_1, \ldots, x_d, k) \in \mathbb{Z}^{d+1}$ は Laurent 単項式 $t_1^{x_1} \cdots t_d^{x_d} s^k$ と同一視する. この古典的構成で多面体と組合せ論が環論的概念の研究と結びつく.

Cohen–Macaulay 環と Gorenstein 環は可換代数における中心的な役割を果たしている. Cohen–Macaulay だが Gorenstein でない環の研究では, Gorenstein という強い性質をどう弱めるべきかということに焦点がおかれ, 数多くの Gorenstein 性を一般化した概念が様々なモチベーションを背景に定義されている. Nearly Gorenstein 環, level 環, そして almost Gorenstein 環と呼ばれるものがその例になっている.

本講演では, [HHS19] で導入された nearly Gorenstein 性に焦点をあてる. R を Cohen–Macaulay $\mathbb{N}$-次数付き $\mathbf{k}$-代数とする. Nearly Gorenstein は, 「R の正準加群のトレース $\mathrm{tr}(\omega_R)$ が non-Gorenstein locus である」という主張 [HHS19, Lemma 2.1] を背景に定義された概念である. この主張から特に, R が Gorenstein であることと, 正準加群のトレースが環全体に一致する (i.e. $\mathrm{tr}(\omega_R) = R$) ことが同値である. R が **nearly Gorenstein** であるとは, このトレースが R の (ただ一つの) 次数付き極大イデアル $\mathbf{m}$ を含む (i.e. $\mathbf{m} \subseteq \mathrm{tr}(\omega_R)$) ことをいう.

日比環 [HHS19, Theorem 5.4] や, エッジ多面体のエッジ環 [HS21], また数値的半群環 [HHS21], そして 2 次元の斉次アファイン半群環 [Miyar] など, 様々な組合せ論的対象に付随する環の nearly Gorenstein 性が研究されている.

原点を含む格子多面体の Ehrhart 環の Gorenstein 性は, ある正整数 k が存在して kP が反射的であることと同値 [BN08] という古典的な結果がある. 本稿では, 一般的な格子多面体から生じる Ehrhart 環の nearly Gorenstein 性について議論する.

*E-mail:u804642k@ecs.osaka-u.ac.jp

1.2 Nearly Gorenstein k-代数

R をただ一つの次数付き極大イデアル $\mathbf{m}$ をもつ $\mathbb{N}$-次数付き $\mathbf{k}$-代数とする．以下, R は常に Cohen–Macaulay で, 正準加群 ω_R を持つとする. $a(R)$ を R の a-不変量とする, i.e.

$$a(R) = -\min\{i \in \mathbb{N} : (\omega_R)_i \neq 0\},$$

ただし $(\omega_R)_i$ は ω_R の i-番目の次数付き成分.

Definition 1.1. 次数付き R-加群 M に対して, $\mathrm{tr}_R(M)$ を $\phi \in \mathrm{Hom}_R(M,R)$ が全てを渡るときのイデアル $\phi(M)$ の和として定義する, i.e.

$$\mathrm{tr}_R(M) = \sum_{\phi \in \mathrm{Hom}_R(M,R)} \phi(M).$$

環について混同の恐れがないときは, これを単に $\mathrm{tr}(M)$ で表す.

Remark 1.2 ([HHS19, Lemma 2.1])**.** A を正準加群 ω_A をもつ Cohen–Macaulay 可換環とする. A の素イデアル全体の集合を $\mathrm{Spec}(A)$ で表すと, 次が正しい:

$$\{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) \ : \ A_\mathfrak{p} \text{が Gorenstein でない}\} = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) \ : \ \mathrm{tr}(\omega_A) \subset \mathfrak{p}\}.$$

Definition 1.3 ([HHS19, Definition 2.2])**.** R が **nearly Gorenstein** とは, $\mathrm{tr}(\omega_R) \supseteq \mathbf{m}$ となることをいう. 特に R が Gorenstein であることと $\mathrm{tr}(\omega_R) = R$ は同値である.

Proposition 1.4 ([HHS19, Lemma 1.1])**.** R を環として, I を R の非零因子を含むイデアルとする. $Q(R)$ を R の全商環とし, $I^{-1} := \{x \in Q(R) : xI \subseteq R\}$ とする. このとき,

$$\mathrm{tr}(I) = I \cdot I^{-1}.$$

後のため, 別の Gorenstein の一般化である level 環についてもここで定義する.

Definition 1.5 ([Sta07, Chapter III, Proposition 3.2])**.** R が **level** とは, ω_R の極小生成系の次数が全て等しいことをいう. R が Gorenstein ならば, ω_R はただ 1 つの元で生成されるので level になる.

1.3 格子多面体と Ehrhart 環

以下, $\mathbb{R}^d$ (resp. $\mathbb{Z}^d$) の双対空間を $(\mathbb{R}^d)^* := \mathrm{Hom}_\mathbb{R}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ (resp. $(\mathbb{Z}^d)^* := \mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(\mathbb{Z}^d, \mathbb{Z})$) で表す. 対 $n \in (\mathbb{R}^d)^*$ と $x \in \mathbb{R}^d$ の内積を $n(x)$ で表し, $P \subset \mathbb{R}^d$ を格子多面体, $\mathcal{F}(P)$ を P の facet 全体の集合, そして $\mathrm{vert}(P)$ を P の頂点全体の集合とする. さらに, P は $\dim P = d$ を満たすとし, 次のファセット表示を持つとする:

$$\text{各 } F \in \mathcal{F}(P) \text{ に対して } P = \left\{x \in \mathbb{R}^d : n_F(x) \geqslant -h_F\right\}, \tag{1}$$

ここでそれぞれの高さ h_F は整数で, 各法線ベクトル $n_F \in (\mathbb{Z}^d)^*$ は**原始的**格子点, i.e. その各座標成分の最大公約数が 1 となる格子点とする.

C_P を P **上の錐**とする, すなわち,

$$C_P = \mathbb{R}_{\geqslant 0}(P \times \{1\}) = \left\{(x,k) \in \mathbb{R}^{d+1} : \ \text{各 } F \in \mathcal{F}(P) \text{ に対して } n_F(x) \geqslant -kh_F\right\}.$$

P の **Ehrhart 環**を次で定める,

$$A(P) = \mathbf{k}[C_P \cap \mathbb{Z}^{d+1}] = \mathbf{k}[\mathbf{t}^x s^k : k \in \mathbb{N}, x \in kP \cap \mathbb{Z}^d],$$

ここで $\mathbf{t}^x = t_1^{x_1} \cdots t_d^{x_d}$, $x = (x_1, \ldots, x_d) \in kP \cap \mathbb{Z}^d$. P の Ehrhart 環は正規アファイン半群環 (従って Cohen–Macaulay) であることに注意. さらに, $A(P)$ を各 $x \in kP \cap \mathbb{Z}^d$ に対して, 次数を $\deg(\mathbf{t}^x s^k) = k$ で定めて得られる $\mathbb{N}$-次数付き $\mathbf{k}$-代数とする.

Definition 1.6. P が **Gorenstein** (resp. **nearly Gorenstein**) とは, Ehrhart 環 $A(P)$ が Gorenstein (resp. nearly Gorenstein) であることをいう.

別のアファイン半群環も定義する. P の**トーリック環**を次で定義する.

$$\mathbf{k}[P] = \mathbf{k}[\mathbf{t}^x s : x \in P \cap \mathbb{Z}^d].$$

P のトーリック環は標準的 $\mathbb{N}$-次数付き $\mathbf{k}$-代数になる.

$\mathbf{k}[P] = A(P)$ は P が integer decomposition property を持つことと同値であることが知られている. ここで, P が **integer decomposition property** (i.e. P は **IDP**) を持つとは, 全ての正整数 k と全ての $x \in kP \cap \mathbb{Z}^d$ に対して, ある $y_1, \ldots, y_k \in P \cap \mathbb{Z}^d$ が $x = y_1 + \cdots + y_k$ を満たすようにとれることをいう.

格子多面体または錐 σ に対して, その相対内部を $\mathrm{int}(\sigma)$ とかく. このとき,

$$\mathrm{int}(C_P) = \left\{(x, k) \in \mathbb{R}^{d+1} : \text{ 各 } F \in \mathcal{F}(P) \text{ に対して } n_F(x) > -kh_F\right\}$$

であることに注意する. さらに,

$$\mathrm{ant}(C_P) := \left\{(x, k) \in \mathbb{R}^{d+1} : \text{ 各 } F \in \mathcal{F}(P) \text{ に対して } n_F(x) \geqslant -kh_F - 1\right\}$$

とする. $A(P)$ の正準加群と逆正準加群を次のように P の言葉で表すことができる.

Proposition 1.7 ([HMP19, Proposition 4.1, Corollary 4.2]). $A(P)$ の正準加群と逆正準加群はそれぞれ次で与えられる:

$$\omega_{A(P)} = \left\langle \mathbf{t}^x s^k : (x, k) \in \mathrm{int}(C_P) \cap \mathbb{Z}^{d+1} \right\rangle, \omega_{A(P)}^{-1} = \left\langle \mathbf{t}^x s^k : (x, k) \in \mathrm{ant}(C_P) \cap \mathbb{Z}^{d+1} \right\rangle.$$

加えて, $A(P)$ の a-不変量は P の余次数に等しい, *i.e.*

$$a(A(P)) = -\min\left\{k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1} : \mathrm{int}(kP) \cap \mathbb{Z}^d \neq \varnothing\right\}.$$

Definition 1.8. $P \subset \mathbb{R}^d$ を余次数 a の格子多面体とする. P の**床多面体**と**剰余多面体**を次で定義する:

$$\lfloor P \rfloor := \mathrm{conv}(\mathrm{int}(P) \cap \mathbb{Z}^d), \qquad \{P\} := \mathrm{conv}(\mathrm{ant}(C_P)_{1-a} \cap \mathbb{Z}^d).$$

$\lfloor P \rfloor$ は $\mathrm{conv}(\mathrm{int}(C_P)_1 \cap \mathbb{Z}^d)$ に一致することに注意.

これらの多面体が本稿の nearly Gorenstein 多面体の研究の中で中心的な役割を果たす. 格子多面体 P の**余次数** a_P も重要である. これは $a_P := \min\left\{k \in \mathbb{N} : \mathrm{int}(kP) \cap \mathbb{Z}^d \neq \varnothing\right\}$ で定義される.

Example 1.9. 次で定義される多面体を考える.

$$P = \mathrm{conv}\{(1,0), (2,0), (3,1), (3,2), (2,3), (1,3), (0,2), (0,1)\}.$$

初めに, $a_P = 1$ であることに注意. 床多面体と剰余多面体は次のようになる:

$$\lfloor P \rfloor = \mathrm{conv}\{(1,1), (2,1), (1,2), (2,2)\}, \qquad \{P\} = \mathrm{conv}\{(1,0), (0,1), (-1,0), (0,-1)\}.$$

A と B を $\mathbb{R}^d$ の部分集合とする. これらの **Minkowski 和**は次で定義される:

$$A + B \coloneqq \{x + y : x \in A, y \in B\}.$$

2 つの多面体 $P \subset \mathbb{R}^d$ と $Q \subset \mathbb{R}^e$ の**直積**を $P \times Q \subset \mathbb{R}^{d+e}$ で表す.
$P \times Q$ は次のようにして多面体の Minkowski 和と見なせる:

$$P' = \left\{ (p, \underbrace{0, \ldots, 0}_{e}) \in \mathbb{R}^{d+e} : p \in P \right\},\ Q' = \left\{ (\underbrace{0, \ldots, 0}_{d}, q) \in \mathbb{R}^{d+e} : q \in Q \right\} \text{について,}$$

$P \times Q = P' + Q'$ となる. 逆に, 2 つの多面体 $P', Q' \subset \mathbb{R}^d$ が次の条件を満たすとする: 各 $i \in [d] \coloneqq \{1, \ldots, d\}$ に対して, $\pi_i(P') = \{0\}$ または $\pi_i(Q') = \{0\}$ となる. ここで $\pi_i : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ は i-番目の座標成分への射影. このとき $P' + Q'$ を 2 つの多面体の積とみなすことができる.
最後に, 双対多面体と反射的多面体を定義しておく.

Definition 1.10. $P \subset \mathbb{R}^d$ を多面体とする. その**双対多面体**を次で定義する:

$$P^* \coloneqq \left\{ n \in (\mathbb{R}^d)^* : \text{各 } x \in P \text{ に対し}, n(x) \geqslant -1 \right\}.$$

P が**反射的である**とは, P と P^* がそれぞれ $\mathbb{Z}^d$ と $(\mathbb{Z}^d)^*$ に対して格子多面体であることをいう.

2 主結果

以下で主結果を述べる. 次の主結果は, 格子多面体が nearly Gorenstein になるための必要条件と十分条件をそれぞれ与える.

Theorem 2.1. $P \subset \mathbb{R}^d$ を余次数 a の格子多面体とする.

1. P が *nearly Gorenstein* ならば, P は *Minkowski* 分解 $P = \lfloor aP \rfloor + \{P\}$ を持つ.
2. $P = \lfloor aP \rfloor + \{P\}$ ならば, ある K が存在し, 任意の整数 $k \geqslant K$ に対して kP は *nearly Gorenstein.*

さらに, nearly Gorenstein 多面体, そしてその Minkowski 分解に現れる床多面体と剰余多面体のファセット表示に関して, 以下のことが明らかになった:

Theorem 2.2. $P \subset \mathbb{R}^d$ を余次数 a の格子多面体とし, $P = \lfloor aP \rfloor + \{P\}$ とすると,

$$\lfloor aP \rfloor = \left\{ x \in \mathbb{R}^d : \text{各 } F \in \mathcal{F}(P) \text{ に対して } n_F(x) \geqslant 1 - a h_F \right\} \text{ であり,}$$
$$\{P\} = \left\{ x \in \mathbb{R}^d : \text{各 } F \in \mathcal{F}(P) \text{ に対して } n_F(x) \geqslant (a-1) h_F - 1 \right\}.$$

加えて, もし $\lfloor P \rfloor \neq \varnothing$ ならば $\{P\}$ は反射的である.

Theorem 2.3. $P \subset \mathbb{R}^d$ を *nearly Gorenstein* 多面体とする. このとき次を満たすような反射的多面体 $Q \subset \mathbb{R}^d$ が存在する:

$$P = \left\{ x \in \mathbb{R}^d : \text{各 } n \in \partial Q^* \cap (\mathbb{Z}^d)^* \text{に対して } n(x) \geqslant -h_n \right\},$$

ここで h_n は整数. さらに $n \in \mathrm{vert}(Q^*)$ によって定まる不等式は無駄がない. また, *nearly Gorenstein* 多面体のファセットの数は, ある d に依存する定数 $C(d)$ 以下になる.

頂点の座標が全て 0 または 1 であるような多面体を $(0,1)$-**多面体**という．Nearly Gorenstein $(0,1)$-多面体についても新しい結果が得られた．この多面体の族は組合せ論的立場から生じ，ポセットの順序多面体や，グラフィックマトロイドの基底多面体などが例になっている．日比環や，完全グラフから生じる安定集合多面体の Ehrhart 環などの具体的な (整分割性を持つ) $(0,1)$-多面体の nearly Gorenstein 性についての先行研究 [HHS19, HS21, Miy22] の結果も包括した，より一般の場合の $(0,1)$-多面体に関する次の結果がわかった:

Theorem 2.4. P を整分割性をもつ $(0,1)$-多面体とする．このとき，P が *nearly Gorenstein* であることと，ある *Gorenstein* $(0,1)$-多面体 $P_1,\dots,P_s$ で各 $1 \leqslant i < j \leqslant s$ について $|a_{P_i} - a_{P_j}| \leqslant 1$ を満たすものが存在し，$P = P_1 \times \cdots \times P_s$ と書けることは同値．

上の定理の系として，nearly Gorenstein と level の関係性について次もわかった．

Corollary 2.5. P を *IDP* を持つ $(0,1)$-多面体とする．$\mathbf{k}[P]$ が *nearly Gorenstein* ならば *level* である．

参考文献

[BN08] Victor Batyrev and Benjamin Nill. Combinatorial aspects of mirror symmetry. *Contemporary Mathematics*, 452:35–66, 2008.

[HKMM] Thomas Hall, Max Kölbl, Koji Matsushita, and Sora Miyashita. Nearly Gorenstein polytopes. *The Electronic J. Combinatorics*, Volume 30, Issue 4 (2023).

[HHS19] Jürgen Herzog, Takayuki Hibi, and Dumitru I Stamate. The trace of the canonical module. *Israel J. Mathematics*, 233:133–165, 2019.

[HHS21] Jürgen Herzog, Takayuki Hibi, and Dumitru I Stamate. Canonical trace ideal and residue for numerical semigroup rings. In *Semigroup Forum*, volume 103, pages 550–566. Springer, 2021.

[HMP19] Jürgen Herzog, Fatemeh Mohammadi, and Janet Page. Measuring the non-Gorenstein locus of Hibi rings and normal affine semigroup rings. *J. Algebra*, 540:78–99, 2019.

[HS21] Takayuki Hibi and Dumitru I Stamate. Nearly Gorenstein rings arising from finite graphs. *The Electronic J. Combinatorics*, pages P3–28, 2021.

[Miy22] Mitsuhiro Miyazaki. Gorenstein on the punctured spectrum and nearly Gorenstein property of the Ehrhart ring of the stable set polytope of an h-perfect graph. *arXiv:2201.02957*, 2022.

[Miyar] Sora Miyashita. Nearly Gorenstein projective monomial curves of small codimension. *J. Comm. Alg.*, to appear.

[Sta07] Richard P Stanley. *Combinatorics and commutative algebra*, volume 41. Springer Science & Business Media, 2007.