

# 平面曲線に現れるカスプについて

九州大学大学院数理学府数理学専攻  
松下尚生 (Yoshiki MATSUSHITA) \*

## 概要

滑らかな平面曲線に現れる特異点とは速度ベクトルが零ベクトルになる点をいう。特異点は平行曲線や縮閉線といった古くから知られている曲線に自然と現れるだけでなく、しばしば尖った形として視覚的に認識できる。それゆえ、微分幾何学における特異点は我々にとって非常に馴染み深い存在であると言える。しかしながら、その馴染み深さに反して数学的な立場としては非常に扱いが難しい。その理由として、正則点で定義される曲率が発散してしまう可能性がある点、正則曲線上において自然に定義される単位法ベクトル場を特異点まで拡張しようとする不連続になる可能性があり、フルネの公式が一般に成立しなくなる点などがあげられる。また、局所的な振る舞いにおいても特異点の扱いは一筋縄にはいかない。例えば、多様体の一般論でもよく知られているように、正則点における振る舞いは本質的に 2 種類しかないが、特異点の場合では、非常に簡単な関数の場合であったとしても、その振る舞いが非可算濃度となる例が知られている。このように、特異点は幾何的な考察や局所的な振る舞いの分類等といった様々な立場において困難さを持っている。

本講演では、特異点の中でも最も基本的な特異点であるカスプに関する分類問題について、新たに導入した幾何学的不変量を用いた分類及び、波面と呼ばれる特異点を許容する重要なクラスの曲線に対して定義される縮閉線を用いた特徴づけ、といった立場で得られた成果を紹介したい。本内容は [8] に基づく。

## 1 導入

### 1.1 特異点の判定条件

以下、 $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  を  $C^\infty$  級曲線であるとする。

**定義 1.1**  $t_0 \in I$  が  $\gamma$  の特異点であるとは、 $\gamma'(t_0) = \mathbf{0}$  であるときをいう。  $\gamma'(t_0) \neq \mathbf{0}$  であるとき、 $t_0$  は  $\gamma$  の正則点であるという。

**例 1.2**  $Cusp_{(2,3)}(t) = (t^2, t^3)$ ,  $Cusp_{(3,4)}(t) = (t^3, t^4)$ ,  $Cusp_{(4,5)}(t) = (t^4, t^5)$  は全て  $t = 0$  で特異点をもつ。各々の特異点を標準的な (2, 3) カスプ、標準的な (3, 4) カスプ、標準的な (4, 5) カスプという。

定義から明らかなように、特異点を持つ曲線の例は非常に多く存在し、特異点のタイプも様々であ

---

\* E-mail:matsushita.yoshiki.297@s.kyushu-u.ac.jp

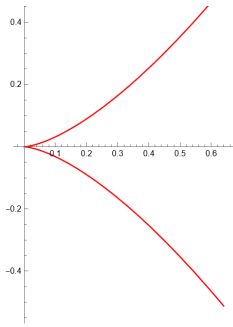


図1 標準的な(2,3)カスプ

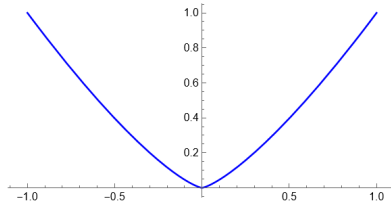


図2 標準的な(3,4)カスプ

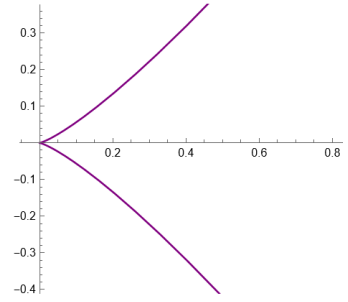


図3 標準的な(4,5)カスプ

る。そこである種の同値関係を用いて、特異点の種類を分類を考えることにする。

**定義 1.3**  $0 \in I \subset \mathbb{R}$ ,  $\gamma_1, \gamma_2 : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ ;  $C^\infty$  級写像であり,  $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = \mathbf{0}$  とする.  $\gamma_1$  と  $\gamma_2$  が  $t = 0$  で  $C^r$  級同値であるとは,  $0 \in \mathbb{R}$  の近傍で定義された  $C^r$  級助変数変換  $\psi$  と  $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^2$  の近傍で定義された  $C^r$  級微分同相写像  $\Psi$  が存在して,  $\Psi \circ \gamma_1 \circ \psi^{-1} = \gamma_2$  が成立するときをいう. ここで,  $r \in \mathbb{N}_{\geq 0} \cup \{\infty, \omega\}$ . 特に,  $r = \infty$  のとき, 上の関係を  $\mathcal{A}$ -同値という.

定義 1.3 を用いて今回考えたい特異点の分類を次のように定義しよう.

**定義 1.4**  $\gamma : 0 \in I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  を  $C^\infty$  級曲線とする. このとき  $\gamma$  が  $t = 0$  で ( $C^r$  級の意味で)  $(n, m)$  カスプであるとは,  $\gamma$  が  $Cusp_{(n,m)} = (t^n, t^m)$  と  $t = 0$  で  $C^r$  級同値であるときをいう. ただし,  $n$  と  $m$  は互いに素な自然数とする.

このような立場の分類は非常に自然であるが, 特異点の型を上記の定義から直接判断することは現実的ではない. 実際, 毎回与えられた曲線に対して条件を満たす座標変換の存在や非存在を証明することは一般に難しい問題であることは明らかであろう. 従って, 特異点の分類の研究において, より簡単な判定条件を与えることは非常に重要である. また, 同値関係で分類したとしても特異点の種類は非常に多くあることから, なぜその特異点に注目するのか, といった事を考える必要もある. 例えば, 平面曲線に関しては以下のような分類が知られている ([1]).

**事実 1.5** 単純な複素  $C^\omega$  級同値である写像芽  $(\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, \mathbf{0})$  は以下のいずれかで表される.

- (1)  $A_{2k} : t \rightarrow (t^2, t^{2k+1}),$
- (2)  $E_{6k} : t \rightarrow (t^3, t^{3k+1} + t^{3k+p+2}); 0 \leq p \leq k-2, \quad t \rightarrow (t^3, t^{3k+1}),$
- (3)  $E_{6k+2} : t \rightarrow (t^3, t^{3k+2} + t^{3k+p+4}); 0 \leq p \leq k-2, \quad t \rightarrow (t^3, t^{3k+2}),$
- (4)  $W_{12} : t \rightarrow (t^4, t^5 + t^7), \quad t \rightarrow (t^4, t^5),$   
 $W_{18} : t \rightarrow (t^4, t^7 + t^9), \quad t \rightarrow (t^4, t^7 + t^{13}), \quad t \rightarrow (t^4, t^7),$
- (5)  $W_{1,2q-1}^\# : t \rightarrow (t^4, t^6 + t^{2q+5}); q \geq 1.$

さらに, 上記の分類に関連するカスプの判定条件がいくつか与えられている ([11, Theorem 1.3.2],

[10, Theorem 1.23], [5, Theorem A.1], [11, Theorem 1.3.4] and [7, Example A.1])).

**事実 1.6**  $\gamma : 0 \in I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  を  $C^\infty$  級曲線とする.

- (1)  $\gamma$  が  $Cusp_{(2,3)}(t) = (t^2, t^3)$  と  $t = 0$  で  $\mathcal{A}$ -同値であるための必要十分条件は  $\gamma'(0) = \mathbf{0}$ ,  $\det(\gamma''(0), \gamma'''(0)) \neq 0$  となることである.
- (2)  $\gamma$  が  $Cusp_{(2,5)}(t) = (t^2, t^5)$  と  $t = 0$  で  $\mathcal{A}$ -同値であるための必要十分条件は  $\gamma'(0) = \mathbf{0}$ ,  $\det(\gamma''(0), \gamma'''(0)) = 0$ ,

$$3 \det(\gamma''(0), \gamma^{(5)}(0))\gamma''(0) - 10 \det(\gamma''(0), \gamma^{(4)}(0))\gamma'''(0) \neq \mathbf{0}$$

となることである.

- (3)  $\gamma$  が  $Cusp_{(2,7)}(t) = (t^2, t^7)$  と  $t = 0$  で  $\mathcal{A}$ -同値であるための必要十分条件はある実数  $k, l \in \mathbb{R}$  が存在して,  $\gamma'(0) = \mathbf{0}$ ,  $\gamma''(0) \neq \mathbf{0}$ ,  $\gamma'''(0) = k\gamma''(0)$ ,  $\gamma^{(5)}(0) - \frac{10}{3}k\gamma^{(4)}(0) = l\gamma''(0)$ ,

$$\det\left(\gamma''(0), \gamma^{(7)}(0) - 7k\gamma^{(6)}(0) - \left(7l - \frac{70}{3}k^3\right)\gamma^{(4)}(0)\right) \neq 0$$

となることである.

- (4)  $\gamma$  が  $Cusp_{(3,4)}(t) = (t^3, t^4)$  と  $t = 0$  で  $\mathcal{A}$ -同値であるための必要十分条件は  $\gamma'(0) = \gamma''(0) = \mathbf{0}$ ,  $\det(\gamma'''(0), \gamma^{(4)}(0)) \neq 0$  となることである.
- (5)  $\gamma$  が  $Cusp_{(3,5)}(t) = (t^3, t^5)$  と  $t = 0$  で  $\mathcal{A}$ -同値であるための必要十分条件は  $\gamma'(0) = \gamma''(0) = \mathbf{0}$ ,  $\det(\gamma'''(0), \gamma^{(4)}(0)) = 0$ ,  $\det(\gamma'''(0), \gamma^{(5)}(0)) \neq 0$  となることである.

特に (2, 3) カスプと (3, 4) カスプの判定条件に注目しよう. これらの判定条件をみると  $\mathcal{A}$ -同値の立場での  $(n, n+1)$  カスプの判定条件は次のように与えられることが容易に期待される.

**予想 1.7**  $\gamma : 0 \in I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  を  $C^\infty$  級曲線とする. このとき,  $\gamma$  が  $Cusp_{(n, n+1)}$  と  $t = 0$  で  $\mathcal{A}$ -同値であるための必要十分条件は

$$\gamma'(0) = \gamma''(0) = \dots = \gamma^{(n-1)}(0) = \mathbf{0}, \quad \det(\gamma^{(n)}(0), \gamma^{(n+1)}(0)) \neq 0$$

となることであろう. ただし,  $n$  は 2 以上の整数とする.

残念ながら, これは  $n = 4$  の場合で成立しない. 実際, 以下の 3 つの平面曲線,  $Cusp_{(4,5;-7)}(t) = (t^4, t^5 - t^7)$ ,  $Cusp_{(4,5;+7)}(t) = (t^4, t^5 + t^7)$ ,  $Cusp_{(4,5)}(t) = (t^4, t^5)$  は全て予想 1.7 の条件を満たすが, これらは  $t = 0$  で  $\mathcal{A}$ -同値にならない. また, 先行研究で得られているカスプの判定条件は全て高次の項の影響を受けずに与えられていることに注意せよ. (4, 5) カスプの場合はこの反例からも分かるように, 5 次よりも高い次数の情報を考慮しなければならず, 先行研究の状況とは異なることが分かる. それゆえか, (4, 5) カスプに関する判定条件は長い間与えられていなかった. 2 節では (4, 5) カスプの分類に関する結果を紹介する.

## 1.2 波面とその縮閉線

変曲点をもたない正則曲線に対しては、縮閉線という自然に特異点が現れる曲線が定義できることが古くから知られている。このことを簡単に復習しよう。詳細は [3, 11, 14] などを参照して頂きたい。 $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  を正則曲線、 $\gamma(t)$  の曲率を  $\kappa(t) = \frac{\det(\gamma'(t), \gamma''(t))}{\|\gamma'(t)\|^3}$ 、 $n(t)$  を  $\gamma(t)$  における進行方向に対して左向きの単位法線ベクトルとする。

**定義 1.8**  $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  を変曲点を持たない正則曲線、すなわち、 $\kappa(t) \neq 0$  とする。このとき、以下で定義される曲線

$$Ev(\gamma)(t) = \gamma(t) + \frac{1}{\kappa(t)}n(t)$$

を  $\gamma$  の縮閉線という。

縮閉線は曲率円の中心の軌跡であるが、例えば包絡線、光学系や一般相対性理論にも関係がある重要な概念である ([2, 6, 9])。定義からも分かるように、 $\gamma$  が特異点を持つと曲率が発散してしまう可能性があることから、上記のような方法で縮閉線は定義できない。しかしながら、[3] において波面と呼ばれる特異点を許容するクラスの曲線については縮閉線が定義され、より扱いやすい表現公式が与えられている。以下では簡単のため、縮閉線の表現公式に関する結果についてのみ簡単に紹介する。詳細は [3] を参照せよ。

**定義 1.9**  $\gamma: 0 \in I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  を  $C^\infty$  級曲線とする。このとき  $\gamma$  が波面 (フロント) であるとは、ある  $C^\infty$  級写像  $\nu: I \rightarrow S^1$  が存在して、 $(\gamma, \nu): I \rightarrow \mathbb{R}^2 \times S^1$  がルジャンドルはめ込みであるとき、すなわち、 $(\gamma'(t), \nu(t)) \neq \mathbf{0}$ 、 $\gamma'(t) \cdot \nu(t) = 0$  をみたすときをいう。ここで  $\cdot$  は  $\mathbb{R}^2$  の標準的な内積である。

すなわち波面とは、単位法ベクトルが特異点を込めて滑らかに取れるような曲線をいう。このような単位法ベクトルと正則曲線において定義される単位法ベクトルは一般に異なることに注意せよ。波面に関する詳細は [11, 12] などを参照。波面に現れる特異点の典型的な例としては、 $(n, n+1)$  カスパがあげられる。特に  $(2, 3)$  カスパは波面に最も現れる特異点であり、サイクロイドやアステロイドなどに現れる。

次に、波面におけるフルネの公式について紹介する。詳細は [3, 4] をみよ。 $(\gamma, \nu): I \rightarrow \mathbb{R}^2 \times S^1$  をルジャンドルはめ込みとする。 $\mu(t) = J(\nu(t))$ 、 $\ell(t) = \nu'(t) \cdot \mu(t)$  とおく。ここで、 $J$  は反時計回りに  $\pi/2$  回転させる行列とする。このとき  $\{\nu(t), \mu(t)\}$  を波面  $\gamma$  に沿う moving frame という。また、波面  $\gamma$  のフルネの公式は以下のようにして与えられる。

$$\begin{pmatrix} \nu'(t) \\ \mu'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \ell(t) \\ -\ell(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu(t) \\ \mu(t) \end{pmatrix}.$$

さらに、 $\beta(t) = c'(t) \cdot \mu(t)$  とし、 $(\ell, \beta)$  をルジャンドルはめ込みの曲率という。ここで、 $t_0$  が  $\gamma$  の変曲点であることは  $\ell(t_0) = 0$  に対応することに注意せよ。以上の準備のもと、波面の縮閉線の表現公式を紹介する。

**事実 1.10** ([3, Theorem 3.3, Theorem 4.1])  $(\gamma, \nu) : I \rightarrow \mathbb{R}^2 \times S^1$  を変曲点を持たない  $(\ell(t) \neq 0)$  ルジャンドルはめ込みとする。

(1) 波面の縮閉線  $Ev(\gamma)$  が定義され、次のように表せる。

$$Ev(\gamma)(t) = \gamma(t) - \frac{\beta(t)}{\ell(t)}\nu(t).$$

さらに  $(Ev(\gamma), \mu)$  はルジャンドルはめ込みであり、曲率は次のとおり。

$$\left( \ell(t), \frac{d}{dt} \left( \frac{\beta(t)}{\ell(t)} \right) \right).$$

(2) 波面の縮閉線の縮閉線  $Ev(Ev(\gamma))$  は次のように表せる。

$$Ev(Ev(\gamma))(t) = Ev(\gamma)(t) - \frac{\beta'(t)\ell(t) - \beta(t)\ell'(t)}{\ell^3(t)}\mu(t).$$

さらに  $(Ev(Ev(\gamma)), -\nu)$  はルジャンドルはめ込みであり、曲率は次のとおり。

$$\left( \ell(t), \frac{d}{dt} \left( \frac{d}{dt} \left( \frac{\beta(t)}{\ell(t)} \right) \right) \right).$$

同様の議論により、波面に対して  $n$  回縮閉線を考えることで得られる曲線の表示も与えられる。そこで少し記号の準備を行う。 $(\gamma, \nu) : I \rightarrow \mathbb{R}^2 \times S^1$  を変曲点を持たないルジャンドルはめ込みとし、 $Ev^0(t) = \gamma(t)$ ,  $Ev^1(t) = Ev(\gamma)(t)$  とおく。このとき以下を帰納的に定める。

$$Ev^n(t) = Ev(Ev^{n-1}(\gamma))(t), \quad \beta_0(t) = \beta(t), \quad \beta_n(t) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\beta_{n-1}(t)}{\ell(t)} \right).$$

**事実 1.11** ([3, Theorem 5.1])  $(\gamma, \nu) : I \rightarrow \mathbb{R}^2 \times S^1$  を変曲点を持たないルジャンドルはめ込みとする。このとき  $Ev^n(\gamma)(t)$  は次のように表せる。

$$Ev^n(\gamma)(t) = Ev^{n-1}(\gamma)(t) - \frac{\beta_{n-1}(t)}{\ell(t)}J^{n-1}(\nu(t)).$$

ここで  $J^n$  は  $J$  を  $n$  回掛けた操作である。さらに  $(Ev^n(\gamma), J^n(\nu))$  はルジャンドルはめ込みであり、曲率は  $(\ell(t), \beta_n(t))$ 。

ここまでで波面の縮閉線の表示をルジャンドルはめ込みの曲率の情報を使って紹介したが、波面の縮閉線は次のような興味深い性質をもつ。

**事実 1.12** ([3, Proposition 5.2])  $(\gamma, \nu) : I \rightarrow \mathbb{R}^2 \times S^1$  を変曲点を持たないルジャンドルはめ込み、 $(\ell, \beta)$  をその曲率、 $t_0$  を  $\gamma$  の特異点であるとする。このとき以下が同値である。

- (1)  $t_0$  は  $Ev^i(\gamma)$  の特異点である ( $i = 1, \dots, n$ ).
- (2)  $\frac{d^i \beta}{dt^i}(t_0) = 0$  ( $i = 1, \dots, n$ ).
- (3)  $\frac{d^{i+1} \gamma}{dt^{i+1}}(t_0) = 0$  ( $i = 1, \dots, n$ ).

この結果と (2, 3) カスプの判定条件, (3, 4) カスプの判定条件を用いれば, 例えば次のようなことが簡単にわかる.

**系 1.13**  $\gamma: 0 \in I \rightarrow \mathbb{R}^2$  を変曲点を持たない波面とする.

- (1)  $\gamma$  が  $Cusp_{(2,3)}$  と  $t = 0$  で  $\mathcal{A}$ -同値であることと  $t = 0$  が  $Ev(\gamma)$  の正則点になることは同値である (図 4 参照).
- (2)  $\gamma$  が  $Cusp_{(3,4)}$  と  $t = 0$  で  $\mathcal{A}$ -同値であることと  $t = 0$  が  $Ev(\gamma)$  の特異点であり,  $Ev^2(\gamma)$  の正則点であることは同値である (図 5 参照).

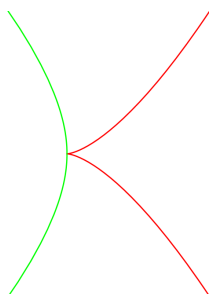


図 4 赤線は (2, 3) カスプ, 緑線は  $Ev(\gamma)(t)$ .

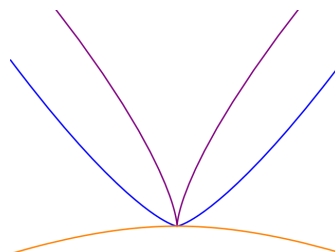


図 5 青線は (3, 4) カスプ, 紫線は  $Ev(\gamma)(t)$ , 橙線は  $Ev(Ev(\gamma))(t)$ .

つまり, (2, 3) カスプや (3, 4) カスプに  $\mathcal{A}$ -同値な特異点は波面の縮閉線を数回考えることで, 特異性が解消される特異点として特徴づけられる. では, このような性質はより一般の  $(n, n + 1)$  カスプに対して同様に成り立つであろうか? 2 節ではその一般化や波面の縮閉線と特異点の分類に関する応用を紹介する.

## 2 主定理

### 2.1 (4, 5) カスプの分類定理

**定義 2.1** ([8])  $\gamma: 0 \in I \rightarrow \mathbb{R}^2$  を  $C^\infty$  級曲線とする.  $\gamma'(0) = \gamma''(0) = \gamma'''(0) = \mathbf{0}$ ,  $\gamma^{(4)}(0) \neq \mathbf{0}$  の条件下,  $\kappa_q$  を以下で定義し, (4, 5;  $\pm 7$ ) カスプ的曲率という.

$$\kappa_q = \frac{-77B^2 + 105AD + 60AC}{\|\gamma^{(4)}(0)\|^5},$$

ただし,  $A = \det(\gamma^{(5)}(0), \gamma^{(4)}(0))$ ,  $B = \det(\gamma^{(6)}(0), \gamma^{(4)}(0))$ ,  $C = \det(\gamma^{(7)}(0), \gamma^{(4)}(0))$ ,  $D = \det(\gamma^{(6)}(0), \gamma^{(5)}(0))$ .

$\kappa_q$  は助変数変換及び  $\mathbb{R}^2$  の合同変換で不変である. さらにこの量は助変数変換及び座標変換によって符号が変わらないという非常に良い性質を持っていることを注意したい. この性質を用いることで (4, 5) カスプに関する判定条件を以下のように与えた.

**定理 2.2** ([8])  $\gamma : 0 \in I \rightarrow \mathbb{R}^2$  を  $C^\infty$  級曲線とする.

- (1)  $\gamma$  が  $Cusp_{(4,5)} = (t^4, t^5)$  と  $t = 0$  で  $\mathcal{A}$ -同値であるための必要十分条件は  $\gamma'(0) = \gamma''(0) = \gamma'''(0) = \mathbf{0}$ ,  $\det(\gamma^{(5)}(0), \gamma^{(4)}(0)) \neq 0$ ,  $\kappa_q = 0$  となることである.
- (2)  $\gamma$  が  $Cusp_{(4,5,+7)} = (t^4, t^5 + t^7)$  と  $t = 0$  で  $\mathcal{A}$ -同値であるための必要十分条件は  $\gamma'(0) = \gamma''(0) = \gamma'''(0) = \mathbf{0}$ ,  $\det(\gamma^{(5)}(0), \gamma^{(4)}(0)) \neq 0$ ,  $\kappa_q > 0$  となることである.
- (3)  $\gamma$  が  $Cusp_{(4,5,-7)} = (t^4, t^5 - t^7)$  と  $t = 0$  で  $\mathcal{A}$ -同値であるための必要十分条件は  $\gamma'(0) = \gamma''(0) = \gamma'''(0) = \mathbf{0}$ ,  $\det(\gamma^{(5)}(0), \gamma^{(4)}(0)) \neq 0$ ,  $\kappa_q < 0$  となることである.

この結果から, (4, 5) カスプは (2, 3) カスプや (3, 4) カスプの状況と異なり, あまり平面曲線に現れない特異点であることが簡単に分かる. 例えば,  $\gamma'(0) = \gamma''(0) = \gamma'''(0) = \mathbf{0}$  の条件下では,  $Cusp_{(4,5)} = (t^4, t^5)$  といった単純な特異点ではなく,  $Cusp_{(4,5,+7)} = (t^4, t^5 + t^7)$  や  $Cusp_{(4,5,-7)} = (t^4, t^5 - t^7)$  といった型の特異点が頻繁に現れることが分かる.

## 2.2 $(n, n + 1)$ カスプと縮閉線

予想 1.7 で考えた条件は  $\mathcal{A}$ -同値の意味での  $(n, n + 1)$  カスプの判定条件に一般的にはならないことをみたが, 果たしてこの条件でどの程度の分類が行えるのであろうか? 以下の定理はその解答になっている.

**定理 2.3** ([8])  $\gamma : 0 \in I \rightarrow \mathbb{R}^2$  を  $C^\infty$  級曲線とする. このとき  $\gamma$  が  $Cusp_{(n,n+1)}$  と  $t = 0$  で  $C^1$  級同値であるための必要十分条件は

$$\gamma'(0) = \gamma''(0) = \dots = \gamma^{(n-1)}(0) = \mathbf{0}, \quad \det(\gamma^{(n)}(0), \gamma^{(n+1)}(0)) \neq 0$$

となることである. ただし,  $n$  は 2 以上の整数とする.

この結果からも分かるように, 予想 1.7 で考えた条件では  $C^1$  級同値という  $\mathcal{A}$ -同値の分類よりも粗い分類しか行えないことから, あまり良い条件ではないように思われるかもしれない. しかしながら, この条件は  $C^\infty$  級の意味で座標不変であることが確認でき, 次のような応用がある.

**定理 2.4** ([8])  $\gamma : 0 \in I \rightarrow \mathbb{R}^2$  を変曲点を持たない波面とする.  $\gamma$  が  $Cusp_{(n,n+1)}$  と  $t = 0$  で  $\mathcal{A}$ -同値ならば  $t = 0$  は  $Ev(\gamma), \dots, Ev^{n-2}(\gamma)$  の特異点であり,  $Ev^{(n-1)}(\gamma)$  の正則点である (図 6 ~ 8 参照).

$(n, n + 1)$  カスプは  $(n - 1)$  回縮閉線をとる操作により, 特異性が解消される特異点として特徴づけられることがわかる. さらに, 事実 1.12 と座標不変性を用いることで以下のことが証明できる.

**系 2.5** ([8])  $\gamma : 0 \in I \rightarrow \mathbb{R}^2$  を変曲点を持たない波面,  $t = 0$  を  $\gamma$  の特異点とする. もし,  $t = 0$  が  $Ev(\gamma), \dots, Ev^{(n-1)}(\gamma)$  の特異点ならば  $\gamma$  は  $Cusp_{(n,n+1)}$  と  $t = 0$  で  $\mathcal{A}$ -同値でない.

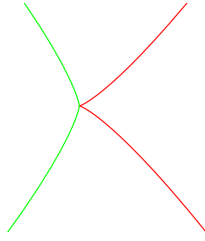


図6 赤線が  $Cusp_{(4,5)}$ , 緑線が  $Ev(\gamma)$

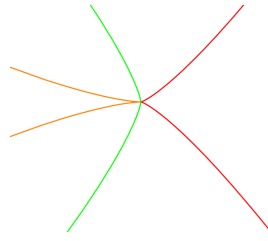


図7 橙線が  $Ev^2(\gamma)$

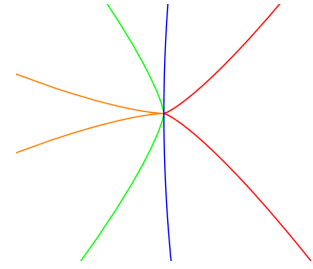


図8 青線が  $Ev^3(\gamma)$

与えられた特異点が  $(n, n+1)$  カスプと  $A$ -同値であるか否かを判断する事はいずれにせよ一般に簡単ではないが、この結果から変曲点を持たない波面に対してであれば、縮閉線の情報を用いることで否定的な判断が可能であることが分かる。

## 参考文献

- [1] J. W. Bruce and T. J. Gaffney, *Simple singularities of mappings  $\mathbb{C}, 0 \rightarrow \mathbb{C}^2, 0.$* , J. London Math. Soc. (2), **26** (1982), 465–474. MR 0684560
- [2] J. Ehlers and E. T. Newman, *The theory of caustics and wave front singularities with physical applications*, J. Math. Physics. **41** (2000), 3344-3378. MR1768638
- [3] T. Fukunaga and M. Takahashi, *Evolutes of fronts in the Euclidian plane*, Journal of Singularities, **10** (2014), 92-107. MR 3300288
- [4] T. Fukunaga and M. Takahashi, *Existence and uniqueness for Legendre curves*, J. Geom. **104** (2013), no2, 297– 307. MR MR3089782
- [5] Y. Hattori, A. Honda, and T. Morimoto, *Bour's theorem for helicoidal surfaces with singularities*, preprint ( arXiv:2310.16418 )
- [6] W. Hasse, M. Kriele and V. Perlick, *Caustics of wavefronts in general relativity*, Class. Quantum Grav. **13** (1996), 1161-1182. MR1390106
- [7] L.F. Martins, K. Saji, S.P. dos Santos and K. Teramoto, *Boundedness of geometric invariants near a singularity which is a suspension of a singular curve*, preprint (arXiv:2206.11487).
- [8] Y. Matsushita, *Classifications of cusps appearing on plane curves*, submitted.
- [9] D. Pei and C. Zhang, *Evolute of  $(n, m)$  cusp curves and application in optical system*, Optik, **162** (2018), 42-53.
- [10] I. R. Porteous, *Geometric differentiation. For the intelligence of curves and surfaces*. Second edition. Cambridge University Press, Cambridge, 2001. MR1871900
- [11] K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Differential geometry of curves and surfaces with singularities*, Series in Algebraic and Differential Geometry, vol. 1, World Scientific Pub-



- lishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2022, Translated from the 2017 Japanese original by Wayne Rossman. MR 4357539
- [12] K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *The geometry of fronts*, Ann. of Math. **169** (2009), no.2, 491-529. MR 2480610
- [13] M. Takahashi and K. Teramoto, *Surfaces of revolution of frontals in the Euclidean space*, Bull Braz Math Soc, New Series 51 (2020), 887–914. MR4167695
- [14] M. Umehara and K. Yamada, *Differential geometry of curves and surfaces*, Translated from the second (2015) Japanese edition by Wayne Rossman World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2017. MR3676571