

理想グラフの安定集合環の conic 因子的イデアルと 非可換クレパント特異点解消

大阪大学 大学院情報科学研究科 情報基礎数学専攻
松下光虹 (Koji MATSUSHITA) *

概要

トーリック環の conic 因子的イデアルはその非可換 (クレパント) 特異点解消の構成などに応用することができ、様々な分野において非常に重要な役割を担う。本講演では、理想グラフから生起するトーリック環である安定集合環に対し、その因子類群の元の中で conic 因子的イデアルの同型類に対応するものの記述法と、ある特定のクラスの安定集合環に対する非可換クレパント特異点解消の構成について紹介する。

本講演は [13] の内容に基づく。

1 導入

R を正規 Cohen-Macaulay 整域、 M を 0 でない反射的 R 加群とする。 $\text{End}_R(M)$ が有限な大域次元を持つとき、それを非可換特異点解消 (NCR) という。さらに、 R が Gorenstein 環であるとして、 $\text{End}_R(M)$ が NCR で、極大 Cohen-Macaulay (MCM) R 加群であるとき、それを非可換クレパント特異点解消 (NCCR) という。NCR は、例えば [1] など、代数幾何だけでなく表現論の文脈でもしばしば現れる重要な対象であり、NCCR は Van den Bergh ([22]) によって導入された通常のクレパント特異点解消の非可換類似であって、その存在や導来同値かどうかなどについての様々な予想が提起されている。本講演では、次に導入するトーリック環の $\text{NC}(\mathbb{C})R$ について議論する。

d 次元有理強凸多面錐 $C \subset \mathbb{R}^d$ に対し、

$$\mathbb{k}[C \cap \mathbb{Z}^d] := \mathbb{k}[t_1^{a_1} t_2^{a_2} \cdots t_d^{a_d} \mid (a_1, a_2, \dots, a_d) \in C \cap \mathbb{Z}^d]$$

を C のトーリック環という。ただし、 \mathbb{k} は標数 0 の代数閉体とする。これは一般に正規 Cohen-Macaulay 整域である。また、正整数 k に対し、 $R^{\frac{1}{k}} := \mathbb{k}[C \cap \frac{1}{k}\mathbb{Z}^d]$ を自然に R 加群とみなしたとき、 $R^{\frac{1}{k}}$ の直既約分解に現れる加群は conic 因子的イデアルと呼ばれるものであることが知られている ([4, 16])。これは R の極大 Cohen-Macaulay な因子的イデアル (rank 1 の反射的加群) であって、様々な分野において良い役割を担っていることがわかっており、上述した $\text{NC}(\mathbb{C})R$ の構成に応用させることができる。実際、 k が十分大きいとき、 $\text{End}_R(R^{\frac{1}{k}})$ は R の NCR になることがわかっている

* k-matsushita@ist.osaka-u.ac.jp

([8, 17]). さらに, いくつかの conic 因子的イデアルの直和から NCCR を構成することができ, 特に, この手法によって構成される NCCR をトーリック NCCR という.

次のトーリック環はトーリック NCCR を持つということが知られている:

- 因子類群が \mathbb{Z} である Gorenstein なトーリック環 ([22]);
- 因子類群が \mathbb{Z}^2 である Gorenstein な日比環 ([14]);
- 3次元 Gorenstein トーリック環 ([3, 12, 18]);
- quasi-symmetric なトーリック環 ([17]);
- 多項式環の Segre 積で Gorenstein であるもの ([11]);
- 完全多部グラフのエッジ環で Gorenstein であるもの ([9]).

これらの事実から, Gorenstein なトーリック環は常にトーリック NCCR を持つことが期待されるが, 因子類群が \mathbb{Z}^2 である 4次元のトーリック環で, トーリック NCCR を持たない例が存在することがわかっている ([17, Example 9.1]). 従って, どのようなときにトーリック環がトーリック NCCR を持つかどうかは自然で重要な問である.

また, この問を解決するために, 与えられたトーリック環の因子類群の中で conic 因子的イデアル (Cohen-Macaulay 因子的イデアル) に対応する格子点を表す領域を決定することが必要になってくる. 例えば, 以下のトーリック環はその領域の記述が与えられている:

- 因子類群が \mathbb{Z} , または, \mathbb{Z}^2 であるトーリック環 ([20, 21]);
- 日比環 ([11]);
- weakly-symmetric なトーリック環 ([19]);
- 完全多部グラフのエッジ環で因子類群の階数が 4 以下のもの ([9]).

一般に, この領域を決定するのも非常に困難な問題である.

本研究では, 因子類群がねじれ自由である一般のトーリック環において, conic 因子的イデアルを表す領域を記述するためのアイデアを与え, それを利用して理想グラフから生起する安定集合環と呼ばれるトーリック環において, その領域を記述することに成功した. また, その結果を用いて, ある特定の理想グラフのクラスにおいて, その安定集合環のトーリック NCCR を与えることに成功したので, 本講演ではそれらを紹介する.

2 準備

2.1 トーリック環の (conic) 因子的イデアル

以下, 正整数 n に対し, $[n] := \{1, \dots, n\}$ とする. $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{Z}^d$ で生成される d 次元有理強凸多面錐

$$\tau = \text{Cone}(v_1, \dots, v_n) = \mathbb{R}_{\geq 0}v_1 + \dots + \mathbb{R}_{\geq 0}v_n$$

を考える. ただし, $d \leq n$ で, v_1, \dots, v_n は τ の極小生成系, 各 v_i について, 任意の $0 < \epsilon < 1$ に対し $\epsilon v_i \notin \mathbb{Z}^d$ であるとする. 各 $i \in [n]$ について, $\sigma_i : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ を $\sigma_i(\mathbf{x}) := \langle \mathbf{x}, v_i \rangle$ で定め, $\sigma : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^n$

を $\sigma(\mathbf{x}) = (\sigma_1(\mathbf{x}), \dots, \sigma_n(\mathbf{x}))$ で定める. さらに, τ の双対 τ^\vee を

$$\tau^\vee = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \sigma_i(\mathbf{x}) \geq 0, \forall i \in [n]\}.$$

で定義する.

以下, R は τ^\vee のトーリック環とする. $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ に対し,

$$\mathbb{T}(\mathbf{a}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d : \sigma_i(\mathbf{x}) \geq a_i, \forall i \in [n]\},$$

$T(\mathbf{a})$ を $\mathbb{T}(\mathbf{a})$ に属する元 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d)$ に対応する単項式 $t_1^{x_1} t_2^{x_2} \dots t_d^{x_d}$ 全体で生成される R 加群とする. このとき, 次の事実が知られている (cf. [5, Section 4.F]):

- 任意の $i \in [n]$ と $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d$ に対し, $\sigma_i(\mathbf{x}) \in \mathbb{Z}$ であるから, $T(\mathbf{a}) = T(\lceil \mathbf{a} \rceil)$ が成立する. ただし, $\lceil \cdot \rceil$ は天井関数を表し, $\lceil \mathbf{a} \rceil = (\lceil a_1 \rceil, \dots, \lceil a_n \rceil)$ とする.
- R 加群 $T(\mathbf{a})$ は R の因子的イデアルであり, 逆に R の因子的イデアルはこの形で書ける. このことから, 各 $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^n$ は R の因子的イデアル $T(\mathbf{a})$ と同一視できる.
- R の因子的イデアルの同型類は R の因子類群 $\text{Cl}(R)$ の元と一対一対応する. さらに, $\mathbf{a}, \mathbf{a}' \in \mathbb{Z}^n$ に対し, $T(\mathbf{a}) \cong T(\mathbf{a}')$ であることと, ある $\mathbf{y} \in \mathbb{Z}^d$ があって, $a_i = a'_i + \sigma_i(\mathbf{y})$ ($\forall i \in [n]$) が成立することが同値である. 従って, $\text{Cl}(R) \cong \mathbb{Z}^n / \sigma(\mathbb{Z}^d)$ となる.

ある $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ があって, $\mathbf{a} = \lceil \sigma(\mathbf{x}) \rceil$ と書けるととき, $T(\mathbf{a})$ を **conic** 因子的イデアルという. 上述した事実から, conic 因子的イデアルの同型類は $\lceil \sigma((-1, 0]^d) \rceil / \sigma(\mathbb{Z}^d)$ の元と一対一対応する. このようにして, トーリック環の conic 因子的イデアルを決定することができるが, 次の方法でも求めることが出来る.

$\text{Cl}(R) \cong \mathbb{Z}^r$ であると仮定し, 同型射 $\phi : \mathbb{Z}^n / \sigma(\mathbb{Z}^d) \rightarrow \mathbb{Z}^r$ を固定する. 各 $i \in [n]$ に対し, $\beta_i := \phi(\mathbf{e}_i)$ とし, これを R のウェイトと呼ぶ. ただし, \mathbf{e}_i は \mathbb{R}^n の i 番目の単位ベクトルとする.

命題 1 (cf. [17, Section 10.6]). $\{a_1\beta_1 + \dots + a_n\beta_n : 0 \leq a_i < 1, \forall i \in [n]\} \cap \mathbb{Z}^r$ の元は R の conic 因子的イデアルの同型類と一対一対応する.

2.2 安定集合環

本講演で扱うグラフは全て有限単純グラフとする. グラフ G に対し, $V(G) = [d]$ を G の頂点集合, $E(G)$ を G の辺集合とする. 頂点集合の部分集合 $S \subset V(G)$ について, 任意の S の 2 頂点が辺で結ばれていない (resp. 結ばれている) とき, S を G の安定集合または, 独立集合 (resp. クリーク) という. 空集合, 1 点集合は安定集合とみなす.

グラフ G に対し, 安定集合環 $\mathbb{k}[\text{Stab}_G]$ を次のように定義する:

$$\mathbb{k}[\text{Stab}_G] = \mathbb{k} \left[\left(\prod_{i \in S} t_i \right) t_0 : S \text{ は } G \text{ の安定集合} \right].$$

例 2. C_4 を長さ 4 のサイクルとする. つまり, $V(C_4) = \{1, 2, 3, 4\}$, $E(C_4) = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{1, 4\}\}$ である. このとき, C_4 の安定集合は $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 3\}, \{2, 4\}$ となるので,

$$\mathbb{k}[\text{Stab}_{C_4}] = \mathbb{k}[t_0, t_1 t_0, t_2 t_0, t_3 t_0, t_4 t_0, t_1 t_3 t_0, t_2 t_4 t_0].$$

安定集合環はグラフが理想グラフであるとき、非常に良い性質を満たすことが知られている (理想グラフの定義はここでは述べないが、グラフ理論において非常に重要なクラスである。詳しくは [7, Section 5.5] を参照されたい)。実際、グラフ G を極大クリーク Q_0, Q_1, \dots, Q_n を持つ理想グラフであるとき、

- $\mathbb{k}[\text{Stab}_G]$ は次の多面錐から生起するトーリック環と一致する ([6, Theorem 3.1]):

$$\begin{aligned} \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_{d+1}) \in \mathbb{R}^{d+1} : \sigma_i(\mathbf{x}) := x_i \geq 0, i \in [d+1], \\ \sigma_{d+1+j}(\mathbf{x}) := x_{d+1} + \sum_{k \in Q_0} x_k - \sum_{l \in Q_j} x_l \geq 0, j \in [n]\}. \end{aligned} \quad (1)$$

- $\text{Cl}(\mathbb{k}[\text{Stab}_G]) \cong \mathbb{Z}^n$ である ([10, Proposition 3.1]).
- $\mathbb{k}[\text{Stab}_G]$ が Gorenstein であることと G の極大クリークが同じ濃度を持つこと、つまり、 $|Q_0| = |Q_1| = \dots = |Q_n|$ であることが同値 ([15, Theorem 2.1]).

3 主結果

3.1 conic 因子的イデアルの記述

まず、一般のトーリック環 R の conic 因子的イデアルを決定するためのアイデアを与える。 β_1, \dots, β_n を 2 章で定義したものとする。また、 $\bar{\beta}_1, \dots, \bar{\beta}_{n'}$ を β_1, \dots, β_n の中で重複を除いたものとし、 $i \in [n']$ に対し、 m_i を $\bar{\beta}_i$ の重複度とする。つまり、 $m_i = |\{j \in [n] : \beta_j = \bar{\beta}_i\}|$ とする。ここで、 $\mathcal{W}(R)$ 、 $\mathcal{W}'(R)$ を次のように定義する:

$$\mathcal{W}(R) = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i \beta_i \in \mathbb{R}^r : 0 \leq a_i < 1 \right\} = \left\{ \sum_{i=1}^{n'} \bar{a}_i \bar{\beta}_i \in \mathbb{R}^r : 0 \leq \bar{a}_i < m_i \right\}.$$

$$\mathcal{W}'(R) = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i \beta_i \in \mathbb{R}^r : 0 \leq a_i \leq 1 \right\} = \left\{ \sum_{i=1}^{n'} \bar{a}_i \bar{\beta}_i \in \mathbb{R}^r : 0 \leq \bar{a}_i \leq m_i \right\}.$$

$\mathcal{W}'(R)$ の方は凸多面体になっている。また、命題 1 より、 $\mathcal{W}(R) \cap \mathbb{Z}^r$ の元は R の conic 因子的イデアルの同型類と一対一対応する。次の命題はそのファセット (余次元 1 の面) を記述する方法を与える。

命題 3 (cf. [2, Proposition 2.2.2]). もし、 $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^r \setminus \{0\}$ と $\bar{\beta}_{i_1}, \dots, \bar{\beta}_{i_{r-1}}$ があって、 $\bar{\beta}_{i_1}, \dots, \bar{\beta}_{i_{r-1}}$ が線形独立であり、全ての $j \in [r-1]$ に対し、 $\langle \mathbf{n}, \bar{\beta}_{i_j} \rangle = 0$ が成り立つなら

$$F = \left\{ \sum_{\langle \mathbf{n}, \beta_i \rangle > 0} \beta_i + \sum_{\langle \mathbf{n}, \beta_i \rangle = 0} a_i \beta_i \in \mathbb{R}^r : a_i \in [0, 1] \right\}$$

は $\mathcal{W}'(R)$ のファセットである。逆に、 $\mathcal{W}'(R)$ の任意のファセットはこのようにして得られる。

この事実と次の補題を組み合わせることで、conic 因子的イデアルに対応する領域を記述することが出来る。

補題 4. $\mathcal{W}(R) \cap \mathbb{Z}^r = \text{int}(\mathcal{W}'(R)) \cap \mathbb{Z}^r$ が成立する. ここで, $\text{int}(\mathcal{W}'(R))$ は $\mathcal{W}'(R)$ の内部を表す. 従って, ある $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ と各 $i \in [m]$ に対し, $p_i, q_i \in \mathbb{Z}_{>0}$, 各 $i \in [m]$ と $j \in [r]$ に対し, 整数 c_{ij} (ただし, c_{i1}, \dots, c_{ir} の最大公約数は 1) があって,

$$\mathcal{W}'(R) = \left\{ (z_1, \dots, z_r) \in \mathbb{R}^r : -q_i - 1 \leq \sum_{j=1}^r c_{ij} z_j \leq p_i + 1, \forall i \in [m] \right\}$$

と書けるなら,

$$\mathcal{W}(R) \cap \mathbb{Z}^r = \left\{ (z_1, \dots, z_r) \in \mathbb{Z}^r : -q_i \leq \sum_{j=1}^r c_{ij} z_j \leq p_i, \forall i \in [m] \right\}$$

と書ける.

以下, 理想グラフの安定集合環の conic 因子的イデアルの記述を与える. G は $V(G) = [d]$ で, 極大クリーク Q_0, Q_1, \dots, Q_n を持つ理想グラフとする. $v \in V(G)$ と有限多重集合 $L \subset \{0, 1, \dots, n\}$ に対し, $m_L(v) := |\{l \in L : v \in Q_l\}|$ とおく. さらに, 2 つの有限多重集合 $I, J \subset \{0, 1, \dots, n\}$ に対し,

$$X_{IJ}^+ = \{v \in V(G) : m_{IJ}(v) > 0\}, \quad X_{IJ}^- = \{v \in V(G) : m_{IJ}(v) < 0\}$$

とする. ただし, $m_{IJ}(v) = m_I(v) - m_J(v)$ とする.

$\mathcal{C}(G)$ を次で定義する凸多面体とする:

$$\mathcal{C}(G) = \left\{ (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n : \begin{aligned} & -|J| + \sum_{v \in X_{IJ}^-} m_{IJ}(v) + 1 \leq \sum_{i \in I} z_i - \sum_{j \in J} z_j \leq |I| + \sum_{v \in X_{IJ}^+} m_{IJ}(v) - 1 \\ & I, J \subset \{0, 1, \dots, n\} \text{ は有限多重集合で } |I| = |J|, I \cap J = \emptyset \text{ を満たす} \end{aligned} \right\}.$$

ただし, $z_0 = 0$ とおく. この $\mathcal{C}(G)$ が $\mathbb{k}[\text{Stab}_G]$ の conic 因子的イデアルを記述する.

定理 5. $\mathcal{C}(G) \cap \mathbb{Z}^n$ の元と $\mathbb{k}[\text{Stab}_G]$ の conic 因子的イデアルの同型類は一対一対応する.

注意 6. $\mathcal{C}(G)$ には無限個の不等式が現れているが, 実際に $\mathcal{C}(G)$ を定めている不等式は有限個のみである. 従って, $\mathcal{C}(G)$ はちゃんと凸多面体になっている. 必要になる不等式は命題 3 とウエイトを用いて決定出来る.

(1) と適切な同型射 $\phi : \text{Cl}(\mathbb{k}[\text{Stab}_G]) \rightarrow \mathbb{Z}^n$ を考えることで, $\mathbb{k}[\text{Stab}_G]$ のウエイトが次で与えられる: ウエイト $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{n+d}$ は

$$\beta_i = \begin{cases} \mathbf{e}_i & \text{if } i \in \{0, 1, \dots, n\}, \\ \sum_{j=0}^n \mathbf{1}_{Q_j}(i-n) \mathbf{e}_j & \text{if } i \in \{n+1, \dots, n+d\}, \end{cases} \quad (2)$$

となる. ただし, $\mathbf{e}_0 = -\mathbf{e}_1 - \dots - \mathbf{e}_n$ とし, $\mathbf{1}_{Q_j}$ を Q_j の定義関数とおく.

例 7. Γ を, $\{1, \dots, 7\}$ を頂点集合とし,

$$E(\Gamma) = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{3, 6\}, \{4, 5\}, \{4, 6\}, \{5, 6\}, \{5, 7\}, \{6, 7\}\}.$$

を辺集合とするグラフとする (図 1).

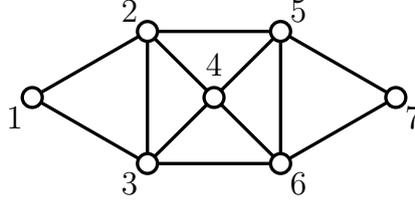


図 1: グラフ Γ

このとき, Γ は 6 つの極大クリーク

$$Q_0 = \{1, 2, 3\}, Q_1 = \{2, 3, 4\}, Q_2 = \{2, 4, 5\}, Q_3 = \{3, 4, 6\}, Q_4 = \{4, 5, 6\}, Q_5 = \{5, 6, 7\}$$

を持つ理想グラフである. このグラフの安定集合環のウェイトは (2) より,

$$\begin{aligned} \{\bar{\beta}_1, \dots, \bar{\beta}_{n'}\} = \{ & (-1, -1, -1, -1, -1), (1, 0, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0, 0), \\ & (0, 0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 0, 1), (0, 0, -1, -1, -1), (0, -1, 0, -1, -1), \\ & (1, 1, 1, 1, 0), (0, 1, 0, 1, 1), (0, 0, 1, 1, 1)\} \end{aligned}$$

となり, $\mathbf{n} = (2, -1, -1, 0, 1)$ とすれば命題 3 の条件を満たすので, ここから不等式が誘導される (つまり, \mathbf{n} がファセットの法線ベクトルになるように I, J を決められる). 実際, $I = \{1, 1, 5\}$, $J = \{0, 2, 3\}$ とすれば,

$$m_{IJ}(1) = -1, m_{IJ}(2) = m_{IJ}(3) = m_{IJ}(4) = m_{IJ}(5) = m_{IJ}(6) = 0, m_{IJ}(7) = 1.$$

であるから, $X_{IJ}^+ = \{7\}$, $X_{IJ}^- = \{1\}$ である. 従って, 次の不等式を得る:

$$-3 \leq 2z_1 + z_5 - z_2 - z_3 \leq 3.$$

3.2 安定集合環のあるクラスの NCCR の構成

整数 $n \geq 2$ と正整数 r_1, \dots, r_n に対し, G_{r_1, \dots, r_n} を, $V(G_{r_1, \dots, r_n}) = [2d]$ を頂点集合とし, $E(G_{r_1, \dots, r_n}) = \bigcup_{i=0}^n \{\{v, u\} : v, u \in Q_i\}$ を辺集合とするグラフとする. ただし, $d = \sum_{k=1}^n r_k$, $Q_0 = \{d+1, \dots, 2d\}$ とし, 各 $i \in [n]$ に対して,

$$Q_i^+ = \left\{ \sum_{k=1}^{i-1} r_k + 1, \dots, \sum_{k=1}^i r_k \right\}, Q_i^- = \left\{ d + \sum_{k=1}^{i-1} r_k + 1, \dots, d + \sum_{k=1}^i r_k \right\}, Q_i = Q_i^+ \cup (Q_0 \setminus Q_i^-)$$

と定める. $Q_i^+ = Q_i \setminus Q_0$, $Q_i^- = Q_0 \setminus Q_i$ となることに注意せよ.

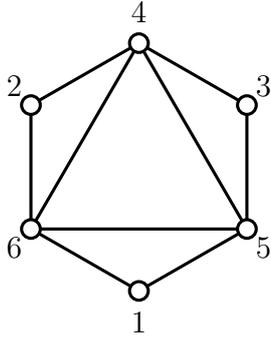


図 2: グラフ $G_{1,1,1}$

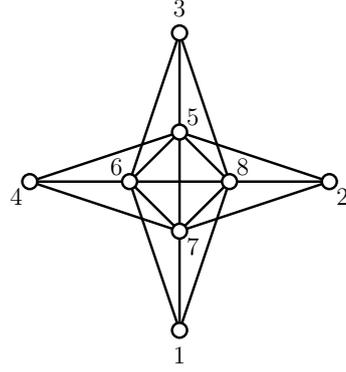


図 3: グラフ $G_{1,1,1,1}$

例 8. $G_{1,1,1}$ と $G_{1,1,1,1}$ はそれぞれ図 2, 図 3 のようになる.

$G_{1,1,1}$ は $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 4\}$, $\{2, 5\}$, $\{3, 6\}$ を極大安定集合として持つので,

$$\mathbb{k}[\text{Stab}_{G_{1,1,1}}] = \mathbb{k}[t_0, t_1 t_0, t_2 t_0, \dots, t_6 t_0, t_1 t_2 t_0, t_1 t_3 t_0, t_2 t_3 t_0, t_1 t_2 t_3 t_0, t_1 t_4 t_0, t_2 t_5 t_0, t_3 t_6 t_0].$$

となる.

このグラフ G_{r_1, \dots, r_n} は次の性質を満たす:

- 命題 9. (i) G_{r_1, \dots, r_n} の極大クリークはちょうど Q_0, Q_1, \dots, Q_n である.
(ii) $S \subset V(G_{r_1, \dots, r_n})$ が G_{r_1, \dots, r_n} の極大安定集合であることと, 各 $i \in [n]$ について, $v_i \in Q_i^+$, $v'_i \in Q_i^-$ があって, $S = \{v_i, v'_i\}$, または, $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ となることが同値.
(iii) G_{r_1, \dots, r_n} は理想グラフ.
(iv) $\mathbb{k}[\text{Stab}_{G_{r_1, \dots, r_n}}]$ は Gorenstein で, $\text{Cl}(\mathbb{k}[\text{Stab}_{G_{r_1, \dots, r_n}}]) \cong \mathbb{Z}^n$ である.
(v) $\mathcal{C}(G_{r_1, \dots, r_n}) = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n : -r_i \leq z_i \leq r_i, \forall i \in [n]\}$ である.

以下の定理が上で定義したグラフの安定集合環のトーリック NCCR の構成を与えるものである:

定理 10. \mathcal{L} を

$$\mathcal{L} = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{Z}^n : 0 \leq z_i \leq r_i, i \in [n]\} \subset \mathcal{C}(G_{r_1, \dots, r_n}) \cap \mathbb{Z}^n$$

で定める. また $\chi \in \mathbb{Z}^n$ に対し, M_χ を χ に対応する因子的イデアルとし, $M_{\mathcal{L}} := \bigoplus_{\chi \in \mathcal{L}} M_\chi$ とする. このとき, $E = \text{End}_R(M_{\mathcal{L}})$ は $R = \mathbb{k}[\text{Stab}_{G_{r_1, \dots, r_n}}]$ の NCCR である. 特に, $\mathbb{k}[\text{Stab}_{G_{r_1, \dots, r_n}}]$ はトーリック NCCR を持つ.

参考文献

- [1] M. Auslander, *Representation dimension of Artin algebras*, Lecture Notes, Queen Mary College, London, (1971).

- [2] A. Björner, M. Las Vergnas, B. Sturmfels, N. White, G. M. Ziegler, Oriented Matroids. Second edition. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 46. Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- [3] N. Broomhead, Dimer model and Calabi-Yau algebras, *Mem. Amer. Math. Soc.*, **215** no. 1011, (2012).
- [4] W. Bruns and J. Gubeladze, Divisorial linear algebra of normal semigroup rings, *Algebra and Represent. Theory*, **6** (2003), 139-168.
- [5] W. Bruns and J. Gubeladze, Polytopes, rings and K-theory, Springer Monographs in Mathematics. Springer, Dordrecht, (2009).
- [6] V. Chvátal, On certain polytopes associated with graphs, *J. Combin. Theory, Ser. (B)* **18** (1975), 138–154.
- [7] R. Diestel, “Graph theory” Fifth edition, GTM **173**, Springer, Berlin, 2017.
- [8] E. Faber, G. Muller and K. E. Smith, Non-commutative resolutions of toric varieties, *Adv. Math.* **351** (2019), 236–274.
- [9] A. Higashitani and K. Matsushita, Conic divisorial ideals and non-commutative crepant resolutions of edge rings of complete multipartite graphs, *J. Algebra* **594** (2022), 685–711.
- [10] A. Higashitani and K. Matsushita, Three families of toric rings arising from posets or graphs with small class groups, *J. Pure Appl. Algebra*, **226** no. 10, (2022), 107079.
- [11] A. Higashitani and Y. Nakajima, Conic divisorial ideals of Hibi rings and their applications to non-commutative crepant resolutions, *Selecta Math.* **25** (2019), 25pp.
- [12] A. Ishii and K. Ueda, Dimer models and the special McKay correspondence, *Geom. Topol.* **19** (2015) 3405–3466.
- [13] K. Matsushita, Conic divisorial ideals of toric rings and applications to Hibi rings and stable set rings, arXiv:2210.02031.
- [14] Y. Nakajima, Non-commutative crepant resolutions of Hibi rings with small class group, *J. Pure Appl. Algebra*, **223** (2019), no. 8, 3461–3484.
- [15] H. Ohsugi and T. Hibi, Special simplices and Gorenstein toric rings, *J. Combin. Theory Ser. A* **113** (2006), no. 4, 718-725.
- [16] K. E. Smith and M. Van den Bergh, Simplicity of rings of differential operators in prime characteristic, *Proc. London Math. Soc. (3)* **75** (1997), no. 1, 32–62.
- [17] Š. Špenko and M. Van den Bergh, Non-commutative resolutions of quotient singularities for reductive groups, *Invent. Math.* **210** (2017), no. 1, 3–67.
- [18] Š. Špenko and M. Van den Bergh, Non-commutative crepant resolutions for some toric singularities I, *Int. Math. Res. Not. IMRN* (2020), no. 21, 8120-8138.
- [19] Š. Špenko and M. Van den Bergh, J. P. Bell, On the noncommutative Bondal-Orlov conjecture for some toric varieties. *Math. Z.* **300** (2022), no. 1, 10551068.
- [20] R. P. Stanley, Linear diophantine equations and local cohomology, *Invent. Math.* **68** (1982), 175–193.

- [21] M. Van den Bergh, Cohen-Macaulayness of semi-invariants for tori, *Trans. Amer. Math. Soc.* **336** (1993), no. 2, 557–580.
- [22] M. Van den Bergh, Non-Commutative Crepant Resolutions, *The Legacy of Niels Henrik Abel*, Springer-Verlag, Berlin, (2004), 749–770.