

3次元アファイン空間内の全曲率の小さい 完備な特異点付き非固有アファイン球面の分類と新しい例

東京工業大学 理学院 数学系 数学コース
松本 洵 (Jun MATSUMOTO) *

概要

非固有アファイン球面 (IA-sphere) は局所的に楕円型 Monge–Ampère 方程式の解となる関数のグラフとして表される (ユニモデューラ) アファイン空間 \mathbf{R}^3 内の特異点を持たない曲面でありユークリッド空間内の極小曲面の Weierstrass の表現公式に類似した複素表現公式をもつ. IA-sphere はある種の完備性を考えると, 自明なものに限られることが知られている. Martínez は特異点を許した IA-sphere である非固有アファイン波面 (IA-front) を IA-sphere の Weierstrass 型表現公式を特異点を許す形に拡張して定義し, さらに, 完備な IA-front に対して, ユークリッド空間内の完備極小曲面に類似した性質を示していくつかの例を与えた. ここでは次の 2 つについて説明する: (1) 完備で埋め込まれたエンドの漸近挙動とそのようなエンドをもつ新しい曲面の例. (2) 全曲率 -8π 以上の完備 IA-front の分類と全曲率 -10π かつ種数 1 である新しい曲面の例.

1 極小曲面

ここでは 2次元多様体 M に対して, C^∞ 級写像 $f: M \rightarrow \mathbf{R}^3$ のことを曲面とよぶ. また, $p \in M$ において f がはめ込みにならない, つまり, p における f の微分写像 $(df)_p: T_p M \rightarrow T_{f(p)} \mathbf{R}^3$ が単射にならないとき, $p \in M$ を曲面の特異点とよぶ (曲面についての基礎事項は例えば梅原–山田 [13], 特異点をもつ曲面については佐治–梅原–山田 [10]). 3次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^3 = (\mathbf{R}^3, dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2)$ 内のはめ込みに対しては平均曲率が定義され, 平均曲率が恒等的に 0 になる曲面は極小曲面とよばれる. 極小曲面は閉じた針金で作った枠に張られる石鹸膜の数学的モデルで, 表面張力によってその石鹸膜は面積極小になることが知られている (極小曲面については例えば Osserman [8], 川上–藤森 [12], 宮岡 [11]). 極小曲面は次の Weierstrass の表現公式をもつ:

事実 1.1 (Weierstrass の表現公式). Σ を Riemann 面とし, Σ 上の有理型関数 \mathcal{G} と正則 1 次微分形式 ω が次の条件を満たしているとする (組 (\mathcal{G}, ω) を Weierstrass データとよぶ):

- (正則条件) $(1 + |\mathcal{G}|^2)|\omega|^2$ が正値 2 次形式.
- (周期条件) Σ 上の任意のループ γ に対して,

$$\operatorname{Re} \int_{\gamma} (1 - \mathcal{G}^2, (1 + \mathcal{G}^2), 2g)\omega = 0 \quad (1.1)$$

が成り立つ.

このとき, 任意の固定された点, $z_0 \in \Sigma$ に対して,

$$f(z) := \operatorname{Re} \int_{z_0}^z (1 - \mathcal{G}^2, (1 + \mathcal{G}^2), 2g)\omega : \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3 \quad (1.2)$$

は共形極小曲面を与える. 特に, f の第一基本形式, 第二基本形式はそれぞれ,

$$ds^2 := (1 + |\mathcal{G}|^2)^2 |\omega|^2, \quad h := -Q - \bar{Q} \quad (Q := \omega d\mathcal{G}) \quad (1.3)$$

で与えられる. 逆に任意の向き付け可能な共形極小曲面は上の形で表現される.

この表現公式によって, 複素解析を用いて極小曲面の様々な幾何学的性質や例が見出された.

* E-mail: matsumoto.j.ad@m.titech.ac.jp

- 例 1.2. • (平面) $\Sigma = \mathbf{C}, (\mathcal{G}, \omega) = (0, dz)$.
- (Enneper 曲面) $\Sigma = \mathbf{C}, (\mathcal{G}, \omega) = (z, dz)$.
 - (カテナイド (懸垂面)) $\Sigma = \mathbf{C} \setminus \{0\}, (\mathcal{G}, \omega) = (z, dz/z^2)$.
 - (Jorge–Meeks 曲面) $\Sigma = \widehat{\mathbf{C}} \setminus \{z \in \mathbf{C}; z^3 = 1\}$ ($\widehat{\mathbf{C}} := \mathbf{C} \cup \{\infty\}$) ,

$$(g, \omega) = \left(z^2, \frac{dz}{(z^3 - 1)^2} \right) .$$

- (Costa 曲面) $\Sigma = \mathbf{C}/(\mathbf{Z} \oplus i\mathbf{Z}) \setminus \{[0], [1/2], [i/2]\}$ とする . ここで , $z \in \mathbf{C}$ に対して $[z]$ は z の属する同値類である . このとき , Weierstrass のペー関数

$$\wp(z) := \frac{1}{z^2} + \sum_{p \in \mathbf{Z} \oplus \tau \mathbf{Z}} \left(\frac{1}{(z-p)^2} - \frac{1}{p^2} \right) \quad (\text{Im } \tau > 0) \quad (1.4)$$

(ここでは $\tau = i$) を用いて表される Weierstrass データ $(\mathcal{G}, \omega) = (c/\wp', \wp dz)$ ($c > 0$) によって与えられる極小曲面は種数 1 の埋め込まれた曲面である .

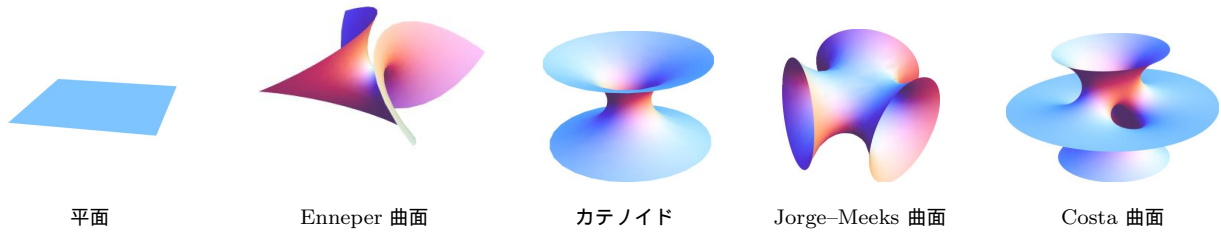


図 1 極小曲面の例

2 非固有アファイン波面 (IA-front)

2.1 非固有アファイン球面 (IA-sphere)

以下では, \mathbf{R}^3 を 3 次元ユニモデュラーアファイン空間 $\mathbf{R}^3 = (\mathbf{R}^3, \det)$ とする . まず , 非固有アファイン球面というアファイン微分幾何の対象である曲面の定義を紹介する (アファイン微分幾何については例えば野水–佐々木 [14], Li–Simon–Zhao [5]) . M を連結かつ向き付け可能な 2 次元多様体とし, $\psi: M \rightarrow \mathbf{R}^3$ をはめ込み, ξ を ψ に沿ったベクトル場で $d\psi(TM)$ に横断的 (i.e., $T_{\psi(p)}\mathbf{R}^3 = d\psi(T_p M) \oplus \mathbf{R}\xi_p$ ($p \in M$)) であるとする . このとき, 次を満たす捩れない接続 ∇ , 対称双線形形式 h , $(1, 1)$ -テンソル S , 微分 1 形式 τ が一意に存在する:

$$D_X d\psi(Y) = d\psi(\nabla_X Y) + h(X, Y)\xi, \quad (2.1)$$

$$D_X \xi = -d\psi(S(X)) + \tau(X)\xi \quad (X, Y \in \mathfrak{X}(M)), \quad (2.2)$$

ただし, D は \mathbf{R}^3 の標準接続で, $\mathfrak{X}(M)$ は M 上のなめらかなベクトル場全体の集合である . さらに, ψ が局所強凸 (つまり, h が定値) であるとする . 次を満たす ξ が一意に取れる:

$$D_X \xi = -d\psi(S(X)), \quad (2.3)$$

$$\det(d\psi(X), d\psi(Y), \xi) = |h(X, X)h(Y, Y) - h(X, Y)^2|^{1/2} \quad (X, Y \in \mathfrak{X}(M)). \quad (2.4)$$

この ξ をアファイン法線ベクトル, また, h を ξ に関するアファイン計量とよぶ . このとき, $S \equiv 0$ (i.e., ξ が定ベクトル) であるとき, ψ を非固有アファイン球面 (IA-sphere) とよぶ . 局所強凸 (i.e., アファイン計量 h が定値) でアファイン法線ベクトル $\xi = (0, 0, 1)$ をもつ IA-sphere は局所的に楕円型 Monge–Ampère 方程式

$$\varphi_{xx}\varphi_{yy} - \varphi_{xy}^2 = 1$$

を満たすなめらかな関数 φ のグラフとして表されることが知られている .

例 2.1 (楕円放物面).

$$\psi(x, y) := \left(x, y, \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \right) : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$$

とすると、これはアファイン法線ベクトル $\xi = (0, 0, 1)$ をもつ IA-sphere である。

2.2 非固有アファイン波面 (IA-front)

Ferrer, Martínez, Milán は IA-sphere に対して、Weierstrass 表現公式 (事実 1.1) に対応する次の表現公式を与えた。

事実 2.2. (Ferrer–Martínez–Milán [2, Theorem 4], [3, Lemma 1], Martínez [7, Theorem 2]) Σ を Riemann 面とし、 $(F, G): \Sigma \rightarrow \mathbf{C}^2$ を $|dF| \neq |dG|$ を満たす正則曲線 (つまり、 F と G は Σ 上の正則関数で $(dF, dG) \neq (0, 0)$) でさらに次の周期条件を満たす: Σ 内の任意の閉曲線 γ に対して

$$\text{(周期条件)} \quad \operatorname{Re} \int_{\gamma} F dG = 0.$$

$$\text{このとき,} \quad \psi := \left(\bar{F} + G, \frac{1}{2}(|G|^2 - |F|^2) + \operatorname{Re} \left(FG - 2 \int_{\gamma} F dG \right) \right) : \Sigma \rightarrow \mathbf{C} \times \mathbf{R} = \mathbf{R}^3 \quad (2.5)$$

はアファイン法線ベクトル $\xi = (0, 0, 1)$ をもつ (局所強凸な) IA-sphere となる。逆に、アファイン法線ベクトル $\xi = (0, 0, 1)$ をもつすべての (局所強凸な) IA-sphere はこの方法で得られる。

組 (F, G) を ψ の Weierstrass データとよぶ。Weierstrass データを用いて表される計量

$$ds^2 := \langle d\mathcal{X}, d\mathcal{X} \rangle = |dF|^2 + |dG|^2 + dF dG + \overline{dF dG} \quad (2.6)$$

(ただし、 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は \mathbf{R}^2 の標準内積で、 $\mathcal{X} := \bar{F} + G$ である) は非退化計量となることがわかり、これを平坦基本形式とよぶ。また、 (F, G) を用いて、アファイン計量 h は $h = |dG|^2 - |dF|^2$ と表される。

注意 2.3. 事実 2.2 において $|dF| = |dG|$ となるような点において ψ ははめ込みにならない。この点は h と ds^2 が退化する点である。

上の表現公式 (2.5) によって局所的には IA-sphere を構成することができる。しかし、次の Bernstein 型定理によって、曲面のある種の大域的な性質を調べようとするとそれは自明なものになってしまうことがわかる。

事実 2.4. (IA-sphere に関する Bernstein 型定理, Calabi [1, Corollary of Theorem 1]) 3次元ユニモデューラーアファイン空間 \mathbf{R}^3 内の、アファイン完備 (i.e., $h = |dG|^2 - |dF|^2$ が定値かつ完備) な IA-sphere は楕円放物面に等積アファイン同値である。

そこで Martínez は事実 2.2 の表現公式 (2.5) を拡張して IA-sphere に特異点を許した次の概念を定義した:

定義 2.5. (Martínez [7, Definition 1]) Σ を Riemann 面、 $(F, G): \Sigma \rightarrow \mathbf{C}^2$ を次の周期条件を満たす正則曲線とする: Σ 内の任意の閉曲線 γ に対して

$$\text{(周期条件)} \quad \operatorname{Re} \int_{\gamma} F dG = 0. \quad (2.7)$$

$$\text{このとき,} \quad \psi := \left(\bar{F} + G, \frac{1}{2}(|G|^2 - |F|^2) + \operatorname{Re} \left(FG - 2 \int_{\gamma} F dG \right) \right) : \Sigma \rightarrow \mathbf{C} \times \mathbf{R} = \mathbf{R}^3 \quad (2.8)$$

を非固有アファイン写像 (IA-map) とよぶ。

IA-map は“波面” (cf., 佐治–梅原–山田 [10, 第2章, 第5章]) とよばれる特異点を許したクラスの曲面になることがわかる。このことを強調して IA-map のことを非固有アファイン波面 (IA-front) と呼ぶ。また、IA-front の特異点は $|dF| = |dG|$ となる点に対応し、その点で h と ds^2 は退化する。

注意 2.6. • Weierstrass データ (F, G) から構成される IA-front と

$$(\alpha F + \beta G + \lambda, \bar{\beta} F + \bar{\alpha} G + \mu) \quad (|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1, \lambda, \mu \in \mathbf{C})$$

から構成される IA-front はアファイン法線ベクトル $\xi = (0, 0, 1)$ を固定する \mathbf{R}^3 の等積アファイン変換で移り合う。ここで、 \mathbf{R}^3 の等積アファイン変換とは線形変換 $\mathbf{R}^3 \ni x \mapsto Ax + b$ ($\det A = 1, b \in \mathbf{R}^3$) のことである。特に $(F, G) \mapsto (F + \lambda, G + \mu)$ は \mathbf{R}^3 の平行移動に対応する。

- (F, G) から構成される IA-front と (G, F) から構成される IA-front は \mathbf{R}^3 の向きを保つ合同変換 (特に, 等積アファイン変換) で移り合う.

2.3 完備非固有アファイン波面

以下, $\psi: \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$ を (2.8) で定まる IA-front とし, (F, G) を Weierstrass データとする. 特異点をもつ曲面である IA-front に完備性 (特異点をもつ曲面の完備性については 例えば [10, 定義 7.3.1]) を定義する. IA-front ψ が完備であるとは, あるコンパクトな台をもつ対称双線形式 T が存在して,

$$\tilde{ds}^2 := T + ds^2 \quad (2.9)$$

が完備リーマン計量となることである. ここで ds^2 は平坦基本形式 (2.6) である.

事実 2.7. (Martínez [7, Proposition 1]) 完備 IA-front ψ に対して次が成立する:

- Σ はコンパクト Riemann 面 $\bar{\Sigma}$ から有限個の点 $\{p_1, \dots, p_n\}$ ($n \geq 1$) を除いたものと双正則同値になる.
- (F, G) は $\bar{\Sigma}$ 上に有理型に拡張される. 特に, F と G は各 p_j で高々極を持つ.
- F と G の少なくとも一方は各 p_j で極を持つ.

除かれた n 個の点 p_j , またその近傍の ψ による像を IA-front のエンドと呼ぶ. 以下, $\Sigma = \bar{\Sigma}_g \setminus \{p_1, \dots, p_n\}$ とする (g は $\bar{\Sigma}$ の種数). また,

$$\rho := \frac{dF}{dG} \quad (2.10)$$

とおくと, 事実 2.7 から ρ は Σ 上の有理型関数となり, これを Lagrangian Gauss 写像と呼ぶ. ここで,

$$\mathcal{X} := \bar{F} + G, \quad \mathcal{N} := \bar{F} - G$$

を用いて,

$$\mathcal{L}_\psi := \mathcal{X} + i\mathcal{N}: \Sigma \rightarrow \mathbf{C}^2$$

とおくとき, \mathcal{L}_ψ は Σ 上の特殊 Lagrangian はめ込みとなることが知られている (詳しくは Martínez [7, Theorem 1]). この \mathcal{L}_ψ による $\mathbf{C}^2 = \mathbf{R}^4$ の標準的なユークリッド計量から誘導計量 $d\tau^2 := \langle d\mathcal{X}, d\mathcal{X} \rangle + \langle d\mathcal{N}, d\mathcal{N} \rangle$ は Weierstrass データを用いて

$$d\tau^2 = 2(|dF|^2 + |dG|^2) \quad (2.11)$$

と表すことができる. この $d\tau^2$ は h が退化しない点 (つまり ds^2 が退化しない点) において, h と共形的である.

事実 2.8. (Martínez [7, Proposition 2, Theorem 4]) $\psi: \Sigma = \bar{\Sigma}_g \setminus \{p_1, \dots, p_n\} \rightarrow \mathbf{R}^3$ を完備 IA-front, (F, G) をその Weierstrass データとする.

- 誘導計量 $d\tau^2$ は Σ 上の完備リーマン計量となる. また, この計量に関する Gauss 曲率を K_τ , 面積要素を dA_τ とすると, ψ の全曲率は次を満たす:

$$\int_{\Sigma} K_\tau dA_\tau = -2\pi \deg \rho \in -2\pi \mathbf{Z}_{\geq 0}. \quad (2.12)$$

ただし, $\deg \rho$ は ρ をコンパクト Riemann 面 $\bar{\Sigma}_g$ と $\hat{C} := \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ の間の正則写像とみなしたときの写像度である.

- ひとつのエンド p_j が埋め込みであるための必要かつ十分な条件は F と G が各エンド p_j で高々 1 位の極を持つことである.
- (Osserman 型の不等式) 全曲率 (2.12) は次の不等式を満たす:

$$-\frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma} K_\tau dA_\tau \geq -\chi(\bar{\Sigma}_g) + 2n. \quad (2.13)$$

ただし, $\chi(\bar{\Sigma}_g)$ は $\bar{\Sigma}_g$ の Euler 数である. さらに, (2.13) は次のように書き換えられる:

$$\deg \rho \geq 2(g - 1 + n) \quad (2.14)$$

不等式の等号はすべてのエンドが埋め込みであるときに成り立つ。

2.4 埋め込まれたエンドのみをもつ完備 IA-front の例

ここで, Martínez が構成した例を紹介する (Martínez [7, Section 4]) . 以下では $\widehat{C} = C \cup \{\infty\}$ とする .

例 2.9 (楕円放物面). $\Sigma = \widehat{C} \setminus \{0\}$ とし, F, G を次で定める:

$$F = \frac{1}{z}, \quad G = \frac{b}{z} \quad (|b| \neq 1). \quad (2.15)$$

ただし, z は C の標準座標である. このとき, F と G は 1 つの埋め込まれたエンドをもつ完備 IA-front の Weierstrass データとなり, 表現公式 (2.8) によって表される曲面は楕円放物面である (図 2: (a)).

例 2.10 (Rotational IA-front). $\Sigma = \widehat{C} \setminus \{0, \infty\} = C \setminus \{0\}$ とし, F, G を次で定める:

$$F = \frac{1}{z}, \quad G = az \quad (a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}). \quad (2.16)$$

このとき, F と G は 2 つの埋め込まれたエンドをもつ完備 IA-front の Weierstrass データとなり, 表現公式 (2.8) によって表される曲面を rotational IA-front とよぶ (図 2: (b), (c)).

例 2.11 (Non-rotational IA-front). $\Sigma = \widehat{C} \setminus \{0, \infty\} = C \setminus \{0\}$ とし, F, G を次で定める:

$$F = \frac{1}{z}, \quad G = az + \frac{b}{z} \quad (a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}, b \neq 0, |b| \neq 1). \quad (2.17)$$

このとき, F と G は 2 つの埋め込まれたエンドをもつ完備 IA-front の Weierstrass データとなり, 表現公式 (2.8) によって表される曲面を non-rotational IA-front とよぶ (図 2: (d)).

例 2.12. $\Sigma = C / (\mathbf{Z} \oplus i\mathbf{Z}) \setminus \{[0], [1/2], [i/2]\}$ とし, F, G をペー関数 (1.4) を用いて次で定める.

$$F = \frac{r\wp'}{\wp + a}, \quad G = \frac{\wp'}{\wp - a} \quad \left(r \in \mathbf{R} \setminus \{0, 1\}, a := \wp\left(\frac{1}{2}\right) \right), \quad (2.18)$$

このとき, F と G は 3 つの埋め込まれたエンドをもつ種数 1 で全曲率 -12π である完備 IA-front を与える (図 2: (e)).

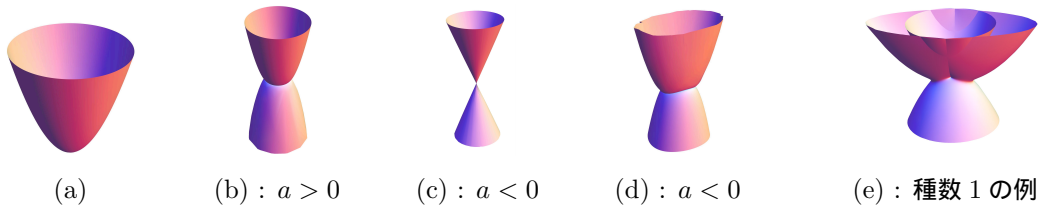


図 2 完備で埋め込まれたエンドを持つ IA-front

3 (主定理 1) 完備で埋め込まれたエンドの漸近挙動と新しい曲面の例

3.1 完備で埋め込まれたエンドの漸近挙動

3次元ユークリッド空間 R^3 内の完備極小曲面の埋め込まれたエンドは, 平面またはカテナイド (cf., 例 1.2) に漸近することが知られている (Schoen [9]). ここでは IA-front の完備で埋め込まれたエンドに対して “漸近性” を定義して, そのようなエンドの分類を行う.

以下, 完備なエンド p (つまり, p に向かう任意の発散路の (2.9) で定まる \tilde{ds}^2 に関する長さが ∞ に発散する) を中心とする十分小さな局所座標系を取ることで, Weierstrass データ (F, G) をもつ $z(p) = 0$ で完備な

IA-front $\psi: \{0 < |z| < \varepsilon\} \rightarrow \mathbf{C} \times \mathbf{R} = \mathbf{R}^3$ ($\varepsilon > 0$ は十分小さく取る) を考える. ただし, この章では, \mathbf{R}^3 をユニモデュラーアフィン空間ではなく, ユークリッド空間であると考え. このとき, ψ が $z = 0$ で別の曲面に漸近するとは,

$$|\psi(z) - \tilde{\psi}(z)| = o(1) \quad (z \rightarrow 0) \quad (3.1)$$

を満たす $z = 0$ で完備な別の IA-front (の一部) $\tilde{\psi}: \{0 < |z| < \varepsilon\} \rightarrow \mathbf{C} \times \mathbf{R}$ が存在することとする. ここで, $|\cdot|$ は \mathbf{R}^3 のユークリッドノルムである. この定義のもとで次が成立する:

定理 3.1. $\psi: \{0 < |z| < \varepsilon\} \rightarrow \mathbf{C} \times \mathbf{R} = \mathbf{R}^3$ を $z = 0$ で完備な IA-front とし, (F, G) を Weierstrass データとする. このとき, エンド $z = 0$ が埋め込まれたエンドである (つまり, F と G は p で高々 1 の極をもつ) ための必要かつ十分な条件は ψ が楕円放物面, rotational IA-front, non-rotational IA-front のいずれかに漸近することである.

3.2 埋め込まれたエンドをもつ完備 IA-front の新しい例

ここでは, Jorge-Meeks のトリノイド (cf., 例 1.2) に対応するような完備で埋め込まれたエンドをもつ IA-front の新しい例を紹介する. $n \in \mathbf{Z}_{\geq 2}$ とし, $\zeta := \exp(2\pi i/n), \eta := \exp(\pi i/n), \Sigma := \widehat{\mathbf{C}} \setminus \{1, \zeta, \dots, \zeta^{n-1}, \eta, \eta\zeta, \dots, \eta\zeta^{n-1}\}$ ($\widehat{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$) とおいて, F, G を次で定める:

$$F := \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\alpha_j}{z - \zeta^j}, \quad G := \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\beta_j}{z - \eta\zeta^j} \quad (\alpha_j, \beta_j \in \mathbf{C} \setminus \{0\}). \quad (3.2)$$

このとき, 複素パラメータ α_j, β_j の選び方によって次の例を得る:

例 3.2. α_j, β_j を

$$\alpha_j \eta^{n-1} \zeta^{n-j}, \quad \beta_k \zeta^{n-k} \in \mathbf{R} \quad (j, k = 0, \dots, n-1),$$

となるように選ぶと, F と G は周期条件 (2.7) を満たし, 事実 2.8 から, 曲面は $2n$ 個の埋め込まれたエンドをもつ完備 IA-front の Weierstrass データとなる (図 3: (a) $n = 2, \alpha_1 = \alpha_2 = i, \beta_1 = \beta_2 = 1$, (b) $n = 3, \alpha_1 = \alpha_2 = \beta_2 = \beta_3 = 1/5, \alpha_3 = \beta_1 = -1$).

また, $n = 2$ の場合について次の例が構成できる.

例 3.3. (3.2) において, $\alpha_j = \beta_j = 1$ とする, つまり

$$F = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z+1}, \quad G = \frac{1}{z-i} + \frac{1}{z+i}$$

とする. この場合も, F と G は周期条件 (2.7) を満たし, 事実 2.8 から, 曲面は $2n$ 個の埋め込まれたエンドをもつ完備 IA-front の Weierstrass データとなる (図 3: (c)).



(a) 例 3.2, $n = 2$



(b) 例 3.2, $n = 3$



(c) 例 3.3

図 3 $2n$ 個の埋め込まれたエンドをもつ IA-front の新しい例

4 (主定理 2) 全曲率 -8π 以上の完備非固有アフィン波面の分類

ユークリッド空間 R^3 内の有限全曲率完備極小曲面の全曲率は $-4m\pi$ である. $m = 0, 1, 2$ の場合は $m = 0, 1$ の場合について Osserman [8], $m = 2$ の場合について López [6] によって分類がなされている. 一方, 事実 2.8 によれば, 完備 IA-front の全曲率は $-2m\pi$ である. ここでは, m が $0 \leq m \leq 4$ である場合の完備 IA-front の分類を行う. 以下, $\psi: \Sigma = \bar{\Sigma}_g \setminus \{p_1, \dots, p_n\} \rightarrow C \times R$ を完備 IA-front とし (g はコンパクト Riemann 面 $\bar{\Sigma}_g$ の種数), (F, G) を Weierstrass データ, $\rho = dF/dG$ を Lagrangian Gauss 写像 (2.10) とする. まず, Martínez によって次が示されている:

事実 4.1. (Martínez [7, Theorems 5, 6, 7])

- Lagrangian Gauss 写像 ρ が定値写像であるような完備 IA-front は楕円放物面に限る.
- 完備 IA-front ψ がちょうど 1 つの埋め込まれたエンドを持つための必要かつ十分な条件は ψ が楕円放物面となることである.
- 完備 IA-front ψ がちょうど 2 つの埋め込まれたエンドを持つための必要かつ十分な条件は ψ が rotational IA-front または non-rotational IA-front となることである.

注意 4.2. エンドの個数が 0 個, つまり, $n = 0$ となることはありえない. 実際, もし $n = 0$ とすると, F, G はコンパクト Riemann 面 $\bar{\Sigma}_g$ 上正則となり, Liouville の定理から定数となる. これは (F, G) が正則曲線であることに反する.

4.1 全曲率が 0 である場合

まず, 事実 4.1 の 1 つ目から次のことが直ちにわかる:

定理 4.3. 全曲率が 0 である完備 IA-front は楕円放物面である.

4.2 全曲率が -2π である場合

Osserman 型の不等式 (2.14) を見ると, (g, n) は

$$g + n \leq \frac{3}{2}$$

つまり $(g, n) = (0, 1)$ であるため, $\Sigma = C$ として一般性を失わない. また, $\hat{C} = C \cup \{\infty\}$ 上の有理型関数は有理関数で, 特に, ∞ にのみ極をもつ有理関数は多項式関数である. $\deg \rho = 1$ であることを使って次を得る:

定理 4.4. 全曲率が -2π であるような完備 IA-front は以下の Weierstrass データから構成される曲面である:

$$F = az^2, \quad G = z \quad (a > 0) \quad (4.1)$$



図 4 全曲率 -2π である完備 IA-front

4.3 全曲率が -4π である場合

Osserman 型の不等式 (2.14) から, (g, n) は

$$g + n \leq 2$$

つまり, $(g, n) = (0, 2), (1, 1), (0, 1)$ であることがわかる. はじめの 2 つは Osserman 型不等式の等号条件からすべてのエンドが埋め込まれたエンドである. 事実 4.1 の 2 つめから, $(g, n) = (1, 1)$ は起こり得ない. よって以下を得る:

定理 4.5. 全曲率が -4π であるような完備 IA-front は全て種数 0 で rotational IA-front, Non-rotational

IA-front, または以下の $\Sigma = C$ 上の Weierstrass データから構成される曲面である:

$$F = az^3 + bz, \quad G = z \quad (a > 0, b \in C), \quad (4.2)$$

$$F = az^3 + bz^2 + cz, \quad G = z^2 \quad (a > 0, c \in C \setminus \{0\}), \quad (4.3)$$



(4.2)



(4.3)

図5 全曲率 -4π で $(g, n) = (0, 1)$.

4.4 全曲率が -6π である場合

Osserman 型の不等式 (2.14) によって, (g, n) は

$$g + n \leq \frac{5}{2},$$

つまり, $(g, n) = (1, 1), (0, 2), (0, 1)$ とわかる. この場合では, 組 (g, n) は全曲率 -4π のときと同様であるが, いずれも Osserman 型不等式の等号を満たさないことに注意が必要である. $(g, n) = (1, 1)$ のとき, 楕円関数の性質 (楕円関数については例えば Hurwitz–Courant [4]) を用いることで対応する曲面は存在しないことがわかる. $(g, n) = (0, 1)$ のときは, 全曲率 -2π のときと同様, $\Sigma = C$ としてよく, Weierstrass データは多項式関数である. $(g, n) = (0, 2)$ のとき, F と G の少なくとも一方は多項式関数ではない有理関数であることに注意する. 一般性を失わずに $\Sigma = C \setminus \{0\}$ としてよい.

定理 4.6. 全曲率が -6π である完備 IA-front は全て種数 0 で, $\Sigma = C$ 上の Weierstrass データから構成される 1 つのエンドをもつ 4 種類の曲面, または $\Sigma = C \setminus \{0\}$ 上の Weierstrass データから構成される 5 種類の計 9 種類である. から構成される 2 つのエンドをもつ曲面である.

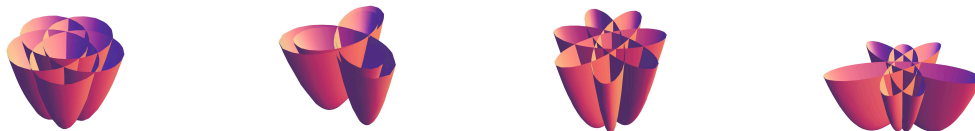


図6 全曲率 -6π で $(g, n) = (0, 1)$.



図7 全曲率 -6π で $(g, n) = (0, 2)$.

4.5 全曲率が -8π である場合

Osserman 型の不等式 (2.14) から, (g, n) は以下をみたすことがわかる:

$$g + n \leq 3$$

つまり, $(g, n) = (0, 3), (2, 1), (1, 2), (1, 1), (0, 2), (0, 1)$ である. 最初の 3 つの場合は等号条件を満たす. 事実 4.1 により, $(g, n) = (2, 1), (1, 2)$ は不可能である. また, $(g, n) = (0, 1), (0, 2)$ は全曲率 -4π や -6π のときと全く同じ手法を用いる. $(g, n) = (0, 3)$ のときはすべてのエンドが埋め込みであるから, 事実 2.12 のエンドが埋め込みである条件も用いることで, 種数が 0 で全曲率が -8π の場合について, 以下の結果を得る:

定理 4.7. 全曲率が -8π である種数 0 の IA-front $\psi: \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$ は $\Sigma = \mathbf{C}$ 上の Weierstrass データから構成される 6 種類と $\Sigma = \mathbf{C} \setminus \{0\}$ 上の Weierstrass データから構成される 16 種類の曲面と 3 つの埋め込まれたエンドをもつ以下の Weierstrass データから構成される 3 種類の計 25 種類の曲面である:

- $\Sigma = \mathbf{C} \setminus \{0, 1\}$ (3 つの埋め込まれたエンドをもつとき):

$$F = az + \frac{b}{z-1} + \frac{c}{z}, \quad G = \frac{\alpha}{z-1} \quad (a > 0, c, \alpha \in \mathbf{R} \setminus \{0\}, |b| \neq \alpha) \quad (4.4)$$

$$F = az + \frac{b}{z-1} + \frac{c}{z}, \quad G = \alpha \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z-1} \right) \quad (a > 0, \text{Im}(b+c) = 0, \alpha \in \mathbf{C} \setminus \{0\}, |b|, |c| \neq |\alpha|) \quad (4.5)$$

$$F = az + \frac{b}{z-1} + \frac{c}{z}, \quad G = \alpha \left(\frac{pq-1}{z-1} - \frac{pq}{z} \right) \quad (4.6)$$

($a > 0, \alpha \in \widehat{\mathbf{C}} \setminus \{0\}, p, q \notin \{0, 1\}, pq \neq 0, 1, p+q = 2pq, \text{Im}(1-2pq) = 0, \text{Im}(2(b-c)pq + 2c-a) = 0, |c| \neq |\alpha|pq, |b| \neq |\alpha|pq-1$)

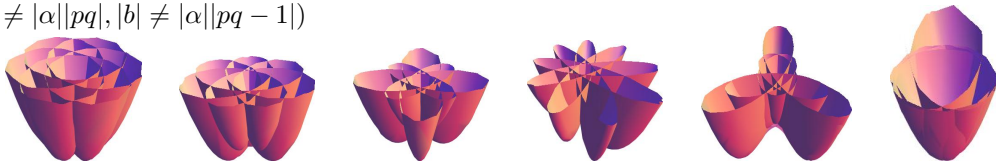


図 8 全曲率 -8π で $(g, n) = (0, 1)$

残るは $(g, n) = (1, 1)$, つまり, 種数 1 でエンドの個数が 1 つの場合である. 定義域の Riemann 面を適当な変換により $\Sigma = \mathbf{C}/(\mathbf{Z} \oplus \tau\mathbf{Z}) \setminus \{[0]\}$ (1次元複素トーラス $\setminus \{1$ 点}) としてよい. ただし, τ は $\text{Im } \tau > 0$ を満たす複素数である. また, ρ, F, G は Σ 上の有理型関数だから, \mathbf{C} 上の楕円関数と同一視できる. $\deg \rho = 4$ であることと楕円関数の性質を使って以下を得る:

命題 4.8. 全曲率 -8π である種数 1 の完備 IA-front $\psi: \mathbf{C}/[1, \tau] \setminus \{[0]\} \rightarrow \mathbf{R}^3$ は周期条件

$$c(2g_2\eta_2 - 3g_3\tau) \in i\mathbf{R}, \quad c(2g_2\eta_1 - 3g_3) \in i\mathbf{R} \quad (4.7)$$

を満たす Weierstrass データ

$$F = a\wp' + b\wp, \quad G = c\wp \quad (a > 0, c \neq 0), \quad (4.8)$$

から構成される. ただし, $g_3 = 4\wp(1/2)\wp((1+\tau)/2)\wp(\tau/2)$, η_1 は Weierstrass のゼータ関数

$$\zeta(z) := -\int \wp(z)dz, \quad \lim_{z \rightarrow 0} \left(\zeta(z) - \frac{1}{z} \right) = 0$$

に対して, $\eta_1 = 2\zeta(1/2), \eta_2 = 2\zeta(\tau/2)$ である.

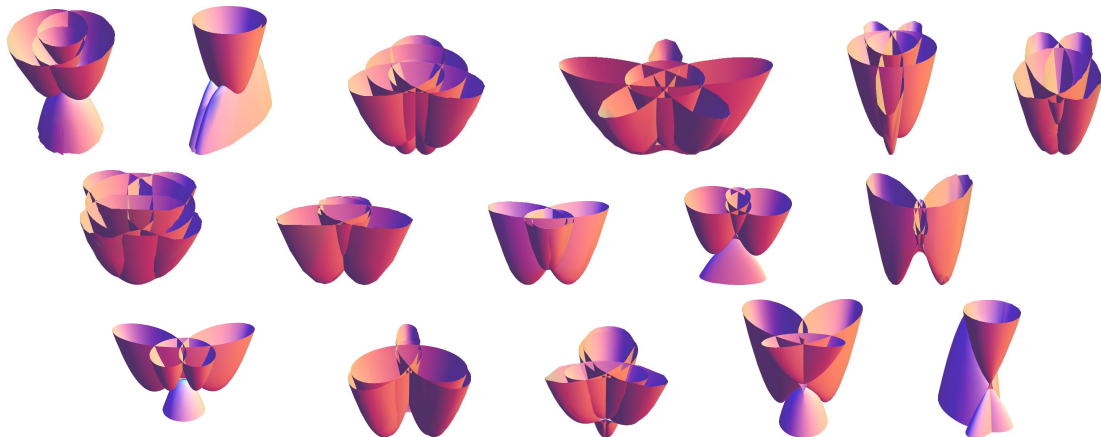


図 9 全曲率 -8π で $(g, n) = (0, 2)$



(4.4)



(4.5)



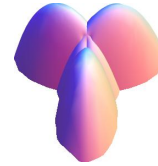
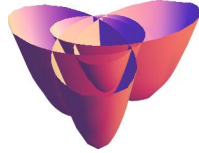
(4.6)

図 10 全曲率 -8π で $(g, n) = (0, 3)$

例 4.9. (種数 1 で全曲率 -10π である新しい例) $\Sigma = C/(Z \oplus iZ) \setminus \{[0]\} = (\text{正方形トーラス} \setminus \{1 \text{ 点}\})$ とし,

$$F = \varphi'' + \frac{5g_2}{7\pi} \varphi, \quad G = \varphi' \quad (g_2 = 4\varphi(1/2)^2 \in \mathbf{R}) \quad (4.9)$$

とすると, F, G は種数 1 で全曲率 -10π である完備 IA-front を与える.

図 11 種数 1, 全曲率 -10π である新しい例

参考文献

- [1] E. Calabi. Improper affine hyperspheres of convex type and a generalization of a theorem by K. Jörgens. *Michigan Math. J.*, Vol. 5, pp. 105–126, 1958.
- [2] L. Ferrer, A. Martínez, and F. Milán. Symmetry and uniqueness of parabolic affine spheres. *Math. Ann.*, Vol. 305, No. 2, pp. 311–327, 1996.
- [3] L. Ferrer, A. Martínez, and F. Milán. An extension of a theorem by K. Jörgens and a maximum principle at infinity for parabolic affine spheres. *Math. Z.*, Vol. 230, No. 3, pp. 471–486, 1999.
- [4] Adolf Hurwitz and Richard Courant. 楕円関数論 (訳: 足立恒雄, 小松啓一). シュプリンガー数学クラシックス; 第 2 巻. 丸善出版, 2012.
- [5] A. M. Li, U. Simon, and G. S. Zhao. *Global affine differential geometry of hypersurfaces*, Vol. 11 of *De Gruyter Expositions in Mathematics*. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1993.
- [6] F. J. López. The classification of complete minimal surfaces with total curvature greater than -12π . *Trans. Amer. Math. Soc.*, Vol. 334, No. 1, pp. 49–74, 1992.
- [7] A. Martínez. Improper affine maps. *Math. Z.*, Vol. 249, No. 4, pp. 755–766, 2005.
- [8] R. Osserman. *A survey of minimal surfaces*. Van Nostrand Reinhold Co., New York-London-Melbourne, 1969.
- [9] R. M. Schoen. Uniqueness, symmetry, and embeddedness of minimal surfaces. *J. Differential Geom.*, Vol. 18, No. 4, pp. 791–809 (1984), 1983.
- [10] 佐治健太郎, 梅原雅顕, 山田光太郎. 特異点をもつ曲線と曲面の微分幾何学. 丸善出版, 2017.
- [11] 宮岡礼子. 極小曲面. 共立出版, 2022.
- [12] 川上裕, 藤森祥一. 極小曲面論入門—その幾何学的性質を探る—. サイエンス社, 2019.
- [13] 梅原雅顕, 山田光太郎. 曲線と曲面: 微分幾何学のアプローチ (改訂版). 裳華房, 2015.
- [14] 野水克己, 佐々木武. アファイン微分幾何学—アファインはめ込みの幾何—. 裳華房, 1994.