二次元多重配置の指数の決定について

九州大学大学院 マス・フォア・イノベーション連係学府
前原将太 (Shota MAEHARA) *

概要

二次元多重配置に付随する対数的ベクトル場のなす加群は常に，斉次な基底をもつ階数 2 の自由加群であり，さらにその次数の組は基底の選び方に依らず，「指数」と呼ばれている．

本講演では，現在解決していない中で最も単純と考えられる「B_2 型の配置」というものに絞り，指数の決定に関して [9] において M. Wakefield, S. Yuzvinsky の両氏によって考察された行列が役に立つことを紹介する．さらに，この研究から発展したものとして北海道大学の沼田泰英教授との共同研究である [5] がある．最後にこの論文の主定理についても紹介する．

1 導入

本章では，超平面配置に関する重要な定義をいくつか述べるとともに，本研究の動機付けを与えることにする．

$\mathbb{K}$ を一般の体，l を正の整数とする．l 次元ベクトル空間 $V = \mathbb{K}^l$ 中の余次元 1 のアフィン空間を**超平面**と言い，この超平面の有限個の集合を l **次元超平面配置**と呼ぶ．l 次元超平面配置 $\mathcal{A} = \{H_1, H_2, \cdots, H_n\}$ に対して，$S = Sym(V^*) = \mathbb{K}[x_1, x_2, \cdots, x_l]$ 中の一次多項式 α_i と体 $\mathbb{K}$ の元 c_i を $H_i = \{x \in V \mid \alpha_i(x) - c_i = 0\}$ が成り立つように選び，**定義多項式** $Q = Q(\mathcal{A})$ を $Q(\mathcal{A}) = \prod_{i=1}^{n=|\mathcal{A}|}(\alpha_i - c_i)$ で定義する．

全ての超平面が原点を通る配置を特に**中心的な配置**と呼び，さらに全ての超平面の交わりが原点であるとき，この配置は**本質的**であると呼ぶ．中心的な l 次元超平面配置 $\mathcal{A} = \{H_1, H_2, \cdots, H_n\}$ に対して，対数的ベクトル場のなす加群 $D(\mathcal{A})$ を $\mathbb{K}$ 線形な S 導分作用素全体のなす加群 $\mathrm{Der}(S)$ の部分加群として，以下のように定義する．

定義 1.1. $\mathrm{Der}(S) = \{\sum_{i=1}^{l} f_i \partial_{x_i} \mid f_i \in S\}$ を S **上の微分作用素からなる** S **加群**とする．自然に次数を考えることで，$\mathrm{Der}(S)$ は次数付き S 加群となっている．すなわち，$\theta = \sum_{i=1}^{l} f_i \partial_{x_i} \in \mathrm{Der}(S)$ と表された微分作用素 θ について，全ての i に対して $f_i \in S$ が次数 d の斉次多項式のとき θ は次数 d の斉次元であると定義する．

例 1.2. $\mathrm{Der}(S) = \mathbb{K}[x_1, x_2, x_3]$ について (つまり $l = 3$ のとき)，$\theta = x_1\partial_{x_1} + x_2\partial_{x_2} + x_3\partial_{x_3}$ は次数 1 の斉次元である．

定義 1.3 (対数的ベクトル場のなす加群)**.** 中心的な l 次元超平面配置 $\mathcal{A} = \{H_1, H_2, \cdots, H_n\}$ に対

* E-mail:maehara.shota.027@s.kyushu-u.ac.jp

して，$D(\mathcal{A}) = \{\theta \in \mathrm{Der}(S) \mid \forall i, \theta(\alpha_i) \in \alpha_i S\}$ で**対数的ベクトル場のなす加群**を定義する．これは $\mathrm{Der}(S)$ の次数付き部分加群である．

以降，この記事を通して超平面配置は常に中心的かつ本質的であるとする．対数的ベクトル場のなす加群がもつ性質をいくつか述べる．

定理 1.4. *l 次元超平面配置 $\mathcal{A}$ に対して，$D(\mathcal{A})$ は S 加群として階数 l である．すなわち，S 加群 M を $S \setminus \{0\}$ で局所化したものを $M_{(0)}$ と書くとして，$D(\mathcal{A})_{(0)} \cong S_{(0)}^{\oplus l}$ が成り立つ．特に，$D(\mathcal{A})$ が自由 S 加群ならば $D(\mathcal{A}) \cong S^{\oplus l}$ である．*

対数的ベクトル場のなす加群は S 上自由加群とは限らない．そこで，$D(\mathcal{A})$ が自由加群であるとき超平面配置 $\mathcal{A}$ は**自由**，または**自由配置**であると呼ぶことにする．実は，$D(\mathcal{A})$ が自由 S 加群であるとき，その基底は斉次に取ることができ，次のように指数という概念が well-defined に定義される．

定義 1.5. *l 次元超平面配置 $\mathcal{A} = \{H_1, H_2, \cdots, H_n\}$ が自由であるとき，$D(\mathcal{A})$ の基底は斉次にとることができ，その次数の組合せは斉次基底の取り方に依らない ([6])．この l 個の非負整数の組を**指数** (exponents) と定義し，$\exp(\mathcal{A})$ と書く．*

自由性を判定する上で非常に重要なものとして，以下に述べる齋藤の判定法がある．

定義 1.6 (齋藤行列)**.** *l 次元超平面配置 $\mathcal{A}$，l 個の微分作用素の集合 $\{\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_l\} \subset \mathrm{Der}(S)$ に対して，$M = M(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_l) = (\theta_i(x_j))_{1 \leq i,j \leq l}$ で定義された行列 M を**齋藤行列**と呼ぶ．*

定理 1.7 (齋藤の判定法 [7])**.** *l 次元超平面配置 $\mathcal{A}$ と l 個の斉次な微分作用素の集合 $\{\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_l\} \subset D(\mathcal{A})$ に対して, 以下は同値.*

(1) $\{\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_l\}$ は $D(\mathcal{A})$ の S 上の基底をなす．特に，$\mathcal{A}$ は自由配置である．
(2) $\{\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_l\}$ は S 上一次独立であり，$\sum_{i=1}^{l} \deg(\theta_i) = |\mathcal{A}|$ が成り立つ．
(3) $c \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ が存在し，$\det(M) = c \cdot Q(\mathcal{A})$ となる．

加群 $D(\mathcal{A})$ が代数的に定義された事と対照的に，配置中の超平面の交わり方の情報から特性多項式と呼ばれる対象が定義される．

定義 1.8. *l 次元超平面配置 $\mathcal{A} = \{H_1, H_2, \cdots, H_n\}$ に対して，$L(\mathcal{A}) = \{\bigcap H_i \mid H_i \in \mathcal{B}, \mathcal{B} \subset \mathcal{A}\}$ を $\mathcal{A}$ の**交差束**と呼ぶ．ただし，$\mathcal{B} = \emptyset$ のとき，$\bigcap_{H_i \in \mathcal{B}} H_i = V = \mathbb{K}^l$ と定義する．すると，交差束に通常の包含関係の逆の大小関係を入れることで $L(\mathcal{A})$ は V を最小限とする半順序集合とみなせる．すなわち，$X \subset Y \in L(\mathcal{A})$ に対して $X \geq Y$ と定める．*

定義 1.9. *$V = \mathbb{K}^l$ 中の超平面配置 $\mathcal{A}$ に対して，次のように関数 $\mu : L(\mathcal{A}) \to \mathbb{Z}$ を定める．*

$$\mu(X) = \begin{cases} 1 & (X = V) \\ -\sum_{X > Y \geq V} \mu(Y) & (X > V) \end{cases}.$$

*帰納的に定義されるこの関数を $\mathcal{A}$ に関する**メビウス関数**と呼ぶ．さらにメビウス関数を用いて，$\chi(\mathcal{A}, t) = \sum_{X \in L(\mathcal{A})} \mu(X) t^{\dim(X)}$ で定義される多項式を**特性多項式**と呼ぶ.*

注意 1.10. 超平面配置 $\mathcal{A}$ について，$\chi(\mathcal{A},1)=\sum_{X\in L(\mathcal{A})}\mu(X)=\mu(\{0\})+\sum_{X\in L(\mathcal{A})\setminus\{0\}}\mu(X)=0$ より，$\chi(\mathcal{A},t)$ は $(t-1)$ で割り切れる．

超平面配置の自由性と配置の交わり方の情報を繋ぐものとして，次の定理がある．

定理 1.11 (寺尾の分解定理 [8])**.** l 次元超平面配置 $\mathcal{A}$ が指数 $\exp(\mathcal{A})=(e_1,e_2,\cdots,e_l)$ をもつ自由配置であるとき，$\chi(\mathcal{A},t)=\prod_{i=1}^{l}(t-e_i)$ が成り立つ．

しかし，この逆は成り立たない．すなわち，特性多項式が一次式に因数分解できるが，自由でない配置は存在する ([4])．これに関連して，以下の重要な未解決予想がある．

予想 1.12 (寺尾予想)**.** 超平面配置 $\mathcal{A}$ の自由性は組合せ論的な情報 $L(\mathcal{A})$ のみから定まる．つまり，自由な配置 $\mathcal{B}$ に対して，半順序集合として $L(\mathcal{A})\cong L(\mathcal{B})$ ならば $\mathcal{A}$ は自由配置である．

上記の予想を解決するために様々なアプローチがされており，その内の一つに，超平面配置の拡張とみなせる多重配置と呼ばれる対象の研究があげられる．

定義 1.13 (多重配置)**.** l 次元超平面配置 $\mathcal{A}=\{H_1,H_2,\cdots,H_n\}$ に対して，関数 $m:\mathcal{A}\to\mathbb{Z}_{>0}$ を $\mathcal{A}$ 上の**重複度**と呼び，超平面配置と重複度との組 $(\mathcal{A},m)$ を l 次元の**多重配置**と呼ぶ．なお，重複度 m に対して，$m(H_i)=m_i\in\mathbb{Z}_{>0}$ のとき $m=(m_1,m_2,\cdots,m_n)\in\mathbb{Z}_{>0}^{\oplus n}$ と表記し，さらに**重複度の和**を $|m|=\sum_{i=1}^{n}m_i$ で，**定義多項式** $Q=Q(\mathcal{A},m)$ を $Q(\mathcal{A},m)=\prod_{i=1}^{n=|\mathcal{A}|}{\alpha_i}^{m_i}$ で定義する．

以降は多重配置と区別して，これまで超平面配置と呼んでいたものを**単配置**と呼ぶことにする．すなわち，超平面の有限集合を単配置，単配置と重複度との組を多重配置と呼ぶ．単配置のときと同様にして，多重配置に対しても以下のような概念が定義できる．

定義 1.14. l 次元多重配置 $(\mathcal{A},m)$ に対して，対数的ベクトル場のなす加群を $D(\mathcal{A},m)=\{\theta\in\mathrm{Der}(S)\mid\forall i,\theta(\alpha_i)\in\alpha_i^{m_i}S\}$ で定義する．$D(\mathcal{A},m)$ は次数付き S 加群であり，S 加群として階数 l である．

定義 1.15. l 次元多重配置 $(\mathcal{A},m)$ に対して，$D(\mathcal{A},m)$ が自由 S 加群であるとき，多重配置 $(\mathcal{A},m)$ は自由であると呼ぶ.

定義 1.16. l 次元多重配置 $(\mathcal{A},m)$ が自由であるとき，$D(\mathcal{A},m)$ の基底は斉次にとることができ，その次数の組合せは斉次基底の取り方に依らない．この l 個の非負整数の組を指数 $\exp(\mathcal{A},m)$ と定義する．

以下は齋藤の判定法の多重配置版である．

定理 1.17 (齋藤の判定法 [11])**.** l 次元多重配置 $(\mathcal{A},m)$ と l 個の斉次な微分作用素の集合 $\{\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_l\}\subset D(\mathcal{A},m)$ に対して, 以下は同値.

(1) $\{\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_l\}$ は $D(\mathcal{A},m)$ の S 上の基底をなす．特に，$(\mathcal{A},m)$ は自由である．
(2) $\{\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_l\}$ は S 上一次独立であり，$\sum_{i=1}^{l}\deg(\theta_i)=|m|$ が成り立つ.
(3) $c\in\mathbb{K}\setminus\{0\}$ が存在し，$\det(M)=c\cdot Q(\mathcal{A},m)$ となる．

多重配置に関するこれらの定義について，$m^{(1)} = (1, 1, \cdots, 1)$ とすると多重配置 $(\mathcal{A}, m^{(1)})$ に対しては単配置と同様となり，このようにして多重配置は単配置の拡張であるとみなせる．

単配置 (超平面配置) の自由性は例えば以下のように多重配置の指数と関係していることが分かっており，この意味で多重配置の指数を研究することは重要な意味がある．

定理 1.18 (Ziegler 制限 [11])**.** l 次元単配置 $\mathcal{A}$ について，$\mathcal{A}$ は自由で $\exp(\mathcal{A}) = (1, d_2, \cdots, d_l)$ とする．このとき，$H \in \mathcal{A}$ に対して，$l-1$ 次元単配置 $\mathcal{A}^H = \{H \cap K \mid K \in \mathcal{A} \setminus \{H\}\}$ と重複度 $m^H(X) = |\{K \in \mathcal{A} \setminus \{H\} \mid H \cap K = X\}|$ との組で定義される $l-1$ 次元多重配置 $(\mathcal{A}^H, m^H)$ を考えると，$(\mathcal{A}^H, m^H)$ は $\exp(\mathcal{A}, m) = (d_2, \cdots, d_l)$ を満たす自由多重配置となる．

定理 1.19 (吉永の判定法 [10])**.** 3 次元単配置 $\mathcal{A}$ について, 特性多項式を $\chi(\mathcal{A}, t) = (t-1)(t^2 - b_1 t + b_2)$ とおく．$H \in \mathcal{A}$ に対して，$\exp(\mathcal{A}^H, m^H) = (d_2, d_3)$ とした時，$\mathcal{A}$ が自由であることと $b_2 = d_2 d_3$ が成り立つことが同値である．

実は，二次元多重配置は常に自由であることが知られており，さらに齋藤の判定法 (定理 1.17) から，二次元多重配置の指数を決定することは指数の差を決定することと同値だと分かる．そこで，次の定義を設ける．

定義 1.20. 二次元多重配置 $(\mathcal{A}, m)$ について，$\exp(\mathcal{A}, m) = (e_1, e_2)$ のとき，**指数の差**を $|\exp(\mathcal{A}, m)| = |\exp| = |e_1 - e_2|$ で定義する．

重複度に関して，以下のように *balanced, not balanced* という重要な分類がある．

定義 1.21. 重複度 $m = (m_1, m_2, \cdots, m_n)$ について, 任意の i に対して $m_i \leq |m| - m_i - 1$ が成り立つとき，m は ***balanced*** であるという．反対に，*balanced* でない重複度のことを ***not balanced*** であるという．

not balanced な重複度をもつ二次元多重配置に関しては，以下のように指数が決定されている．

定理 1.22 ([9])**.** *not balanced* な重複度 m に対して, $m_k = \max\{m_i \mid m_i \in m = (m_1, m_2, \cdots, m_n)\}$ とする．このとき，二次元多重配置 $(\mathcal{A}, m)$ の指数は $\exp(\mathcal{A}, m) = (|m| - m_k, m_k)$ となる．

一方 *balanced* な多重配置の指数の決定については，大変役に立つ定理として以下がある．

定理 1.23 ([2])**.** $\mathcal{A}$ を標数ゼロの体上の 2 次元ベクトル空間中の超平面配置，m を $\mathcal{A}$ 上の *balanced* な重複度とする．このとき，多重配置 $(\mathcal{A}, m)$ の指数の差は $|\mathcal{A}| - 2$ 以下となる．

系 1.24. $\mathcal{A}$ を $|\mathcal{A}| = 3$ を満たす超平面配置とする．このとき，多重配置 $(\mathcal{A}, m)$ について $|\exp(\mathcal{A}, m)| \leq |\mathcal{A}| - 2 = 1$ なので，定理 1.17より

$$|\exp(\mathcal{A}, m)| = \begin{cases} 0 & (|m| \in 2\mathbb{Z}) \\ 1 & (|m| \in 2\mathbb{Z} + 1). \end{cases}$$

指数が自明でない多重配置として，もととなる単配置が 4 本の直線からなる二次元多重配置がある．本研究では特に，B_2 型のコクセター配置と呼ばれる配置に絞って指数の決定について考察する．

B_2 型のコクセター配置を定義する前に，二次元多重配置の場合についていくつか確認をしてお

く．$\mathbb{K}$ を標数ゼロの体とする (以降，本研究では標数ゼロの体上についてのみ考える)．このとき，$S=\mathbb{K}[x,y]$ を変数 x,y 上の二変数多項式環，$\mathrm{Der}(S)=\{f\partial_x+g\partial_y \mid f,g\in S\}$ を S 上の微分作用素からなる S 加群とする．自然に次数を考えることで，$\mathrm{Der}(S)$ は次数付き S 加群とみなせたのであった．それでは，この章の終わりとして B_2 型のコクセター配置の定義を行う．

定義 1.25. $\alpha_1=x$, $\alpha_2=y$, $\alpha_3=x-y$, $\alpha_4=x+y$ に対して, $\mathcal{A}=\{\mathrm{Ker}(\alpha_i)\subset\mathbb{K}^2 \mid i=1,2,3,4\}$ で定義される二次元配置 $\mathcal{A}$ を B_2 **型のコクセター配置**と呼ぶ．言い換えると，定義多項式 $Q(\mathcal{A})=xy(x-y)(x+y)$ で表される単配置のことである．**以降，本記事では $\mathcal{A}$ という記号で常に B_2 型のコクセター配置を表す**ことに注意する．

2 主定理

この章では，指数の差に関する以下の主定理の証明を与える．

定理 2.1 (主定理)**.** B_2 型のコクセター配置 $\mathcal{A}$ 上の *balanced* な重複度 $m=(m_1,m_2,m_3,m_3)$ について，$(m_1,m_2\in 2\mathbb{Z}+1$ かつ $|m|\in 4\mathbb{Z}+2)$ または $(m_1,m_2\in 2\mathbb{Z}$ かつ $|m|\in 4\mathbb{Z})$ または $(m_1,m_2\in 2\mathbb{Z}$ かつ $|m|\in 4\mathbb{Z}+2)$ ならば，$|\exp(\mathcal{A},m)|=0$ である．

以降，[9] で導入された行列を用いて主定理の証明を行う．便宜上，[9] で定義された行列を Wakefield-Yuzvinsky 行列 M_{WY} と呼ぶことにするが，今回は B_2 型のコクセター配置 $\mathcal{A}$ に限ってこの行列を定義する．

条件を満たす多重配置 $(\mathcal{A},m)$ について，$|\exp(\mathcal{A},m)|=2$ となる必要条件を考えたい．

$e:=\frac{1}{2}|m|-1$，$\exists\theta=x^{m_1}f(x,y)\partial x-y^{m_2}g(x,y)\partial y\in D(\mathcal{A},m)_e$ と仮定する．このとき，
$\exists h(x,y)\in\mathbb{K}[x,y]$ s.t. $\theta(x-y)=h(x,y)(x-y)^{m_3}$
$\Leftrightarrow x^{m_1}(\Sigma f_j x^{e-m_1-j}y^j)+y^{m_2}(\Sigma g_k x^{e-m_2-k}y^k)=(x-y)^{m_3}(\Sigma h_i x^{e-m_3-i}y^i)$ $(f_j,g_k,h_i\in\mathbb{C})$.

$y=1$ を代入し，さらに等式の両辺を x で m_3-1 回偏微分することで次の関係式を得る．
$0\leqq\forall k\leqq m_3-1$，$\sum_{j=0}^{e-m_1} f_j\frac{(e-j)!}{(e-j-k)!}+\sum_{j=0}^{e-m_2} g_j\frac{(e-m_2-j)!}{(e-m_2-j-k)!}=0$.

同様に θ を $x+y$ に作用させた場合も考えることで，f_j,g_j に関する連立方程式から次のように $2m_3$ 次正方行列 $M_{WY}(m)$ を定義する．

定義 2.2. $\mathcal{A}$ 上の重複度 m に対して，

$$M_{WY}(m)=M_{WY}:=\left(\begin{array}{c|c} V_f & V_g \\ \hline W_f & W_g \end{array}\right)$$

で定義される行列を **Wakefield-Yuzvinsky 行列**と呼ぶ．ここで，V_f,V_g,W_f,W_g はそれぞれ

- $V_f(k,j)=\frac{(e-j)!}{(e-j-k)!}, V_g(k,j)=\frac{(e-m_2-j)!}{(e-m_2-j-k)!}$,
- $W_f(k,j)=\frac{(e-j)!}{(e-j-k)!}(-1)^{e-j-k}, W_g(k,j)=\frac{(e-m_2-j)!}{(e-m_2-j-k)!}(-1)^{e-m_2-j-k+1}$

を成分とする $V_f,W_f:m_3\times(e-m_1+1)$ 行列, $V_g,W_g:m_3\times(e-m_2+1)$ 行列であり，これは $(e-m_1+1)+(e-m_2+1)=2e+2-m_1-m_2=2m_3$ を満たす．

つまり，WY 行列の左半分 (f-part) に関して，V_f, W_f は対応する各要素の絶対値が等しく，$W_f(1,1) = (-1)^e \cdot V_f(1,1)$ が成り立つ (g-part についても同様の関係式が分かる)．定義より，この行列は $(|\exp| = 2) \Rightarrow (\det M_{WY} = 0)$ を満たすので，$\det M_{WY} \neq 0$ を示すことで主定理が証明できた事になる．

例 2.3 ($m = (3,5,5,5)$ について)**.**

$$M_{WY}(3,5,5,5) = \left(\begin{array}{cccccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 56 & 42 & 30 & 20 & 12 & 6 & 6 & 2 & 0 & 0 \\ 336 & 210 & 120 & 60 & 24 & 6 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1680 & 840 & 360 & 120 & 24 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -8 & 7 & -6 & 5 & -4 & 3 & -3 & 2 & -1 & 0 \\ 56 & -42 & 30 & -20 & 12 & -6 & 6 & -2 & 0 & 0 \\ -336 & 210 & -120 & 60 & -24 & 6 & -6 & 0 & 0 & 0 \\ 1680 & -840 & 360 & -120 & 24 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

主定理の証明には以下の一般のロンスキー行列に関する補題を用いる．

定義 2.4. 区間 I 上 $n-1$ 回まで微分可能な n 個の実関数 $f_1, f_2, \ldots, f_n$ について，ロンスキー行列式 $W(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ は

$$W(f_1, f_2, \ldots, f_n)(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{n-1}(x) & f_2^{n-1}(x) & \cdots & f_n^{n-1}(x) \end{vmatrix}$$

で定義される I 上の関数である．

補題 2.5 ([9])**.** λ_i が全て異なる非負整数であるパワー関数 $\{x^{\lambda_1}, x^{\lambda_2}, ..., x^{\lambda_k}\}$ について，そのロンスキー行列式は次数 $\sum_{j=1}^{k} \lambda_j - \sum_{r=1}^{k-1} r$, 係数 $(-1)^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \prod_{1 \leq i \leq j \leq k} (\lambda_i - \lambda_j)$ の x の単項式になる．

主定理の証明. 以下の (a),(b),(c) の 3 パターンに分けて $\det M_{WY} \neq 0$ を示す．

(a) <u>$m_1, m_2 \in 2\mathbb{Z}+1$ かつ $|m| \in 4\mathbb{Z}+2$ のとき</u>
$e := \frac{|m|}{2} - 1 \in 2\mathbb{Z} \Rightarrow e - m_1 + 1, e - m_2 + 1 \in 2\mathbb{Z}$ であるので，行基本変形により

$$M_{WY} = \left(\begin{array}{c|c} V_f & V_g \\ \hline W_f & W_g \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} \mathbf{0} & * & \mathbf{0} & \cdots & * & \mathbf{0} & * & \mathbf{0} & \cdots & * \\ \hline * & \mathbf{0} & \cdots & * & \mathbf{0} & * & \mathbf{0} & \cdots & * & \mathbf{0} \end{array}\right).$$

上半分の $m_3 \times 2m_3$ 行列 (V-part), 下半分の $m_3 \times 2m_3$ 行列 (W-part) はそれぞれ,
ゼロベクトルでない列ベクトルがちょうど m_3 個存在し，その m_3 個のベクトルを取り出すと,
上半分；$\{x^{e-1}, x^{e-3}, ..., x^{m_1}, x^{e-m_2-1}, x^{e-m_2-3}, ..., x^2, 1\}$,
下半分；$\{x^e, x^{e-2}, ..., x^{m_1+1}, x^{e-m_2}, x^{e-m_2-2}, ..., x^3, x\}$
からなるロンスキー行列に $x=1$ を代入したものとなる. よって補題 2.5から, 上半分・下半分の行列はそれぞれ rank が m_3 の行列であり，またそれぞれの行列から取り出した行ベクトルは明らかに一次独立であるので，$\det M_{WY} \neq 0$，すなわち $|\exp| = 0$ を得る．

以下の (b),(c) についても同様に示すことが出来る．

(b) $\underline{m_1, m_2 \in 2\mathbb{Z} \text{ かつ } |m| \in 4\mathbb{Z} \text{ のとき}}$

$e := \frac{|m|}{2} - 1 \in 2\mathbb{Z}+1 \Rightarrow e - m_1 + 1, e - m_2 + 1 \in 2\mathbb{Z}$ であるので，行基本変形により

$$M_{WY} = \left(\begin{array}{c|c} V_f & V_g \\ \hline W_f & W_g \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} * & \mathbf{0} & \cdots & * & \mathbf{0} & \mathbf{0} & * & \mathbf{0} & \cdots & * \\ \hline \mathbf{0} & * & \mathbf{0} & \cdots & * & * & \mathbf{0} & \cdots & * & \mathbf{0} \end{array}\right).$$

上半分の $m_3 \times 2m_3$ 行列 (V-part), 下半分の $m_3 \times 2m_3$ 行列 (W-part) はそれぞれ，ゼロベクトルでない列ベクトルがちょうど m_3 個存在し，その m_3 個のベクトルを取り出すと，

上半分；$\{x^e, x^{e-2}, ..., x^{m_1+1}, x^{e-m_2-1}, x^{e-m_2-3}, ..., x^2, 1\}$,

下半分；$\{x^{e-1}, x^{e-3}, ..., x^{m_1}, x^{e-m_2}, x^{e-m_2-2}, ..., x^3, x\}$

からなるロンスキー行列に $x=1$ を代入したものとなる．よって (a) の場合と同様の議論を行って，$\det M_{WY} \neq 0$，すなわち $|\exp| = 0$ を得る．

(c) $\underline{m_1, m_2 \in 2\mathbb{Z} \text{ かつ } |m| \in 4\mathbb{Z}+2 \text{ のとき}}$

$e := \frac{|m|}{2} - 1 \in 2\mathbb{Z} \Rightarrow e - m_1 + 1, e - m_2 + 1 \in 2\mathbb{Z}+1$ であるので，行基本変形により

$$M_{WY} = \left(\begin{array}{c|c} V_f & V_g \\ \hline W_f & W_g \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} \mathbf{0} & * & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & * & \mathbf{0} & * & \cdots & * \\ \hline * & \mathbf{0} & * & \cdots & * & \mathbf{0} & * & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \end{array}\right).$$

上半分の $m_3 \times 2m_3$ 行列 (V-part), 下半分の $m_3 \times 2m_3$ 行列 (W-part) はそれぞれ，

ゼロベクトルでない列ベクトルがちょうど m_3 個存在し，その m_3 個のベクトルを取り出すと，

上半分；$\{x^{e-1}, x^{e-3}, ..., x^{m_1+1}, x^{e-m_2}, x^{e-m_2-2}, ..., x^2, 1\}$,

下半分；$\{x^e, x^{e-2}, ..., x^{m_1}, x^{e-m_2-1}, x^{e-m_2-3}, ..., x^3, x\}$

からなるロンスキー行列に $x=1$ を代入したものとなる．よって (a) の場合と同様の議論を行って，$\det M_{WY} \neq 0$，すなわち $|\exp| = 0$ を得る．

以上で主定理の証明が終わった． $\square$

上記の証明中の基本変形を，前述した例 2.3について追ってみる．なお，もちろんこれは証明の (a) の場合に該当する．

例 2.6 ($m=(3,5,5,5)$ について).

$$
M_{WY}(3,5,5,5)=\left(\begin{array}{cccccc|cccc}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\
8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 3 & 2 & 1 & 0\\
56 & 42 & 30 & 20 & 12 & 6 & 6 & 2 & 0 & 0\\
336 & 210 & 120 & 60 & 24 & 6 & 6 & 0 & 0 & 0\\
1680 & 840 & 360 & 120 & 24 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
\hline
1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1\\
-8 & 7 & -6 & 5 & -4 & 3 & -3 & 2 & -1 & 0\\
56 & -42 & 30 & -20 & 12 & -6 & 6 & -2 & 0 & 0\\
-336 & 210 & -120 & 60 & -24 & 6 & -6 & 0 & 0 & 0\\
1680 & -840 & 360 & -120 & 24 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)
$$

$$
\sim\left(\begin{array}{cccccc|cccc}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\
8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 3 & 2 & 1 & 0\\
56 & 42 & 30 & 20 & 12 & 6 & 6 & 2 & 0 & 0\\
336 & 210 & 120 & 60 & 24 & 6 & 6 & 0 & 0 & 0\\
1680 & 840 & 360 & 120 & 24 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
\hline
2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0\\
-16 & 0 & -12 & 0 & -8 & 0 & -6 & 0 & -2 & 0\\
112 & 0 & 60 & 0 & 24 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0\\
-672 & 0 & -240 & 0 & -48 & 0 & -12 & 0 & 0 & 0\\
3360 & 0 & 720 & 0 & 48 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)
$$

$$
\sim\left(\begin{array}{cccccc|cccc}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\
8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 3 & 2 & 1 & 0\\
56 & 42 & 30 & 20 & 12 & 6 & 6 & 2 & 0 & 0\\
336 & 210 & 120 & 60 & 24 & 6 & 6 & 0 & 0 & 0\\
1680 & 840 & 360 & 120 & 24 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
\hline
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\
8 & 0 & 6 & 0 & 4 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0\\
56 & 0 & 30 & 0 & 12 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0\\
336 & 0 & 120 & 0 & 24 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0\\
1680 & 0 & 360 & 0 & 24 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)
$$

$$
\sim\left(\begin{array}{cccccc|cccc}
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1\\
0 & 7 & 0 & 5 & 0 & 3 & 0 & 2 & 0 & 0\\
0 & 42 & 0 & 20 & 0 & 6 & 0 & 2 & 0 & 0\\
0 & 210 & 0 & 60 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 840 & 0 & 120 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
\hline
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\
8 & 0 & 6 & 0 & 4 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0\\
56 & 0 & 30 & 0 & 12 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0\\
336 & 0 & 120 & 0 & 24 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0\\
1680 & 0 & 360 & 0 & 24 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right).
$$

注意 2.7. $m_1,m_2\in 2\mathbb{Z}+1$ かつ $|m|\in 4\mathbb{Z}$ のときはこの議論は行えない. 次章で述べるように，このとき指数の差は 2 となっている ([5]).

3　$D(\mathcal{A},m)$ の基底について，[5] の紹介

この章では，前章で述べた主定理に関する研究から発展した [5] 中の主結果を紹介する．まず，主定理の要となる作用素 $\theta_m \in \mathrm{Der}(S)$ を定義する．

定義 3.1. $m_1,m_2 \in 2\mathbb{Z}+1$, $|m| \in 4\mathbb{Z}$ をみたす重複度 $m=(m_1,m_2,m_3,m_3)$ を考え，$d := \frac{|m|}{2}-1$ と定める．このとき，f_m, g_m, θ_m を次で定義する．

$$\begin{aligned}
f_m &= x^{m_1} \cdot \sum_{i=0}^{\frac{d-m_1}{2}} (-1)^i \frac{(m_1+m_2-d)(m_1+m_2-d+2)\cdots(m_2-2-2i)}{(d-m_1-2i)!!(d-2i)!!(2i)!!} x^{d-m_1-2i} y^{2i}, \\
g_m &= y^{m_2} \cdot \sum_{i=0}^{\frac{d-m_2}{2}} (-1)^{i+m_3} \frac{(m_1+m_2-d)(m_1+m_2-d+2)\cdots(m_1-2-2i)}{(d-m_2-2i)!!(d-2i)!!(2i)!!} x^{2i} y^{d-m_2-2i}, \\
\theta_m &= f_m \partial_x - g_m \partial_y.
\end{aligned}$$

ただし，$\frac{d-m_1}{2} < 0$, $\frac{d-m_2}{2} < 0$ のとき, それぞれ $f_m = 0$, $g_m = 0$ と定義する．

注意 3.2. 上記の定義中の重複度 m について，今，$|m| \in 4\mathbb{Z} \subset 2\mathbb{Z}$ なので, $\frac{d-m_i}{2} = \frac{1}{2}((\frac{|m|}{2}-1)-m_i) \geq 0 \iff 2m_i \leq |m|-1$ が成り立つ．よって，*balanced* の定義 1.21より, m が *balanced* ならば $\frac{d-m_i}{2} \geq 0$ である．

次が [5] における主定理である．

定理 3.3 ([5]–Theorem 3.3)**.** 重複度 $m=(m_1,m_2,m_3,m_3)$ が $m_1,m_2 \in 2\mathbb{Z}+1$, $|m| \in 4\mathbb{Z}$ を満たすとする．もし任意の i に対して $2m_i \leq |m|+2$ が成り立つならば, $\theta_m \in D(\mathcal{A},m)$, かつ $\exp(\mathcal{A},m) = (\frac{|m|}{2}-1, \frac{|m|}{2}+1)$ である．さらに m が *balanced* のとき, $m'' = (m_1+2, m_2+2, m_3, m_3)$ を考えることで $D(\mathcal{A},m)$ は $\theta_m, \theta_{m''}$ を基底に持つ．

さらに，指数に関する次の系がある．もちろん，この系の (2) は本記事の主定理にあたり，証明は定理 3.3と [3] の理論を使う．

系 3.4. *balanced* な重複度 $m=(m_1,m_2,m_3,m_4)$ が $|m_2-m_1| \geq m_4-m_3 \geq 0$ かつ $|m| \in 2\mathbb{Z}$ を満たすとする．このとき,

$$\begin{aligned}
&(1)\ m_4 = m_3,\ m_1,m_2 \in 2\mathbb{Z}+1,\ |m| \in 4\mathbb{Z} && \Longrightarrow \exp(\mathcal{A},m) = (d-1,d+1) \\
&(2)\ m_4 = m_3,\ \text{かつ (1) を満たさない} && \Longrightarrow \exp(\mathcal{A},m) = (d,d) \\
&(3)\ m_4 = m_3+1 && \Longrightarrow \exp(\mathcal{A},m) = (d,d) \\
&(4)\ m_4 = m_3+2,\ m_1,m_2 \in 2\mathbb{Z}+1 && \Longrightarrow \exp(\mathcal{A},m) = (d,d).
\end{aligned}$$

注意 3.5. これは，m_3 が十分大きいときに [1] で証明されていた．また，[5] ではこのいくつかの場合について $D(\mathcal{A},m)$ の基底が明示的に書けている．

参考文献

[1] Takuro Abe, *The stability of the family of B_2-type arrangements*, Comm. Algebra **37** (2009), no. 4, 1193–1215. MR 2510979

[2] ———, *Chambers of 2-affine arrangements and freeness of 3-arrangements*, J. Algebraic Combin. **38** (2013), no. 1, 65–78. MR 3070120

[3] Takuro Abe and Yasuhide Numata, *Exponents of 2-multiarrangements and multiplicity lattices*, J. Algebraic Combin. **35** (2012), no. 1, 1–17. MR 2873095

[4] Torsten Hoge and Gerhard Röhrle, *Some remarks on free arrangements*, Tohoku Math. J. (2) **73** (2021), no. 2, 277–288. MR 4278747

[5] Shota Maehara and Yasuhide Numata, *Explicit description of a basis for derivations of a Coxeter multiarrangement of type B_2*, 2023, arXiv:2312.06356.

[6] Peter Orlik and Hiroaki Terao, *Arrangements of hyperplanes*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 300, Springer-Verlag, Berlin, 1992. MR 1217488

[7] Kyoji Saito, *Theory of logarithmic differential forms and logarithmic vector fields*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **27** (1980), no. 2, 265–291. MR 586450

[8] Hiroaki Terao, *Generalized exponents of a free arrangement of hyperplanes and Shepherd-Todd-Brieskorn formula*, Invent. Math. **63** (1981), no. 1, 159–179. MR 608532

[9] Max Wakefield and Sergey Yuzvinsky, *Derivations of an effective divisor on the complex projective line*, Trans. Amer. Math. Soc. **359** (2007), no. 9, 4389–4403. MR 2309190

[10] Masahiko Yoshinaga, *On the freeness of 3-arrangements*, Bull. London Math. Soc. **37** (2005), no. 1, 126–134. MR 2105827

[11] Günter M. Ziegler, *Multiarrangements of hyperplanes and their freeness*, Singularities (Iowa City, IA, 1986), Contemp. Math., vol. 90, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1989, pp. 345–359. MR 1000610