# Asymptotic expansions for the complex Ginzburg–Landau type equation in the super Fujita-critical case

早稲田大学 大学院先進理工学研究科 物理学及応用物理学専攻
草場 竜之介 (Ryunosuke KUSABA) *

**概 要**

本稿では，藤田優臨界の非線形項を持つ複素 Ginzburg–Landau（CGL）型方程式の初期値問題に対する時間大域解の漸近挙動を考察する．CGL 型方程式の線形主要部に付随する半群（CGL 半群）の積分表示と時空両変数に関する Taylor 展開を基礎とした直接計算によって，時間大域解の明示的な高次漸近展開を導出する．さらに，漸近展開に対する剰余項の減衰評価を導出し，その最良性を初期値と非線形項のモーメントによって特徴付ける．尚，本稿は小澤徹教授（早稲田大学）との共同研究 [16] に基づく．

## 1 導入

本稿では，次の複素 Ginzburg–Landau（CGL）型方程式の初期値問題に対する時間大域解の漸近挙動を考える：

$$\begin{cases}\partial_t u - \nu\Delta u = f(u), & (t,x)\in(0,+\infty)\times\mathbb{R}^n,\\ u(0)=u_0, & x\in\mathbb{R}^n.\end{cases}\tag{P}$$

但し，$u\colon [0,+\infty)\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$ は未知函数，$u_0\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$ は $t=0$ で与えられた初期値，$\nu\in\mathbb{C}$ は $\operatorname{Re}\nu>0$ なるパラメータである．さらに，$f\colon\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ は単独冪乗型の非線形項で，ある $p\in(1,+\infty)$, $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ を用いて，

$$f(u)=\lambda u^p,\ \lambda|u|^{p-1}u,\ \lambda|u|^p$$

のいずれかで表されるものとする．

通常，複素 Ginzburg–Landau（CGL）方程式は $\mu\ge 0$，$\operatorname{Re}\lambda<0$ とした

$$\partial_t u - \nu\Delta u = \mu u + \lambda|u|^{p-1}u$$

を指し，超伝導やパターン形成など様々な自然現象を記述する [1]．また，CGL 方程式は指数膨張する宇宙（de Sitter 宇宙）などの一様等方的な時空間に於けるスカラー場方程式の非相対論的極限として導出されることも知られている [18]．このように，CGL 方程式は物理学に於いて重要な方程式の一つである．また，CGL 方程式に於いて $\operatorname{Im}\nu=\operatorname{Im}\lambda=\mu=0$ かつ未知函数を実数値とすると非線形熱方程式（放物型），いわゆる藤田型方程式になり，$\operatorname{Re}\nu=\operatorname{Re}\lambda=\mu=0$ とすると非線形 Schrödinger 方程式（分散型）になる．このことから，CGL 方程式は放物性と分散性の相

*E-mail: ryu2411501@akane.waseda.jp

互作用を記述する中間方程式と見做すことができる．このような物理的・数学的意義から，CGL 方程式は放物型及び分散型の両方の観点から様々な文献で考察されている（cf. 時間局所・大域適切性：[21]，粘性消滅極限：[17]，解の有限時間爆発：[2]）．また，近年では藤田型方程式に対する複素数値解も注目を集めている（cf. [3]）．尚，複素スカラー場及び分散性の影響で，CGL 方程式の解析では非線形熱方程式の解析で基礎となる最大値原理や比較原理が無効となることに注意する必要がある．

本研究では，CGL 方程式に於いて $\mu = 0$ とし，非線形項を一般化した CGL“型” 方程式を考える．特に，CGL 型方程式の初期値問題 (P) に対する時間大域解の長時間挙動に焦点を当てる．藤田型方程式の場合と同様に，CGL 型方程式に対する解の挙動は非線形項の冪の指数 $p$ と空間次元 $n$ のみから定まる指数（藤田指数）$1 + 2/n$ の大小関係によって大きく変化することが知られている．実際，[5] は藤田劣臨界 $p < 1 + 2/n$（正確には $0 < 1 + 2/n - p \ll 1$）の場合に，[6] は藤田臨界 $p = 1 + 2/n$ の場合に，$f(u) = \lambda |u|^{p-1} u$ かつ

$$\operatorname{Re}\left(\frac{\lambda |\nu|^{n-\frac{n}{2}(p-1)}}{\left((p+1)|\nu|^2 + (p-1)\nu^2\right)^{n/2}}\right) < 0$$

とした (P) の小さな初期値に対する時間大域解（小振幅解）が時間に関して $f \equiv 0$ とした (P) の解（自由解）よりも速く減衰することを示した（cf. 藤田型方程式の場合：[4]）．また，[5, 6] は小振幅解の時間無限大の極限に於ける漸近形も導出している．一方，[19] は藤田優臨界 $p > 1 + 2/n$ の場合に，(P) の小振幅解が時間に関して自由解と同じ速さで減衰し，(P) に付随する線形方程式（$f \equiv 0$）の基本解

$$G_{t\nu}(x) \coloneqq (4\pi t\nu)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t\nu}\right), \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

の定数倍に漸近することを示した．しかし，剰余項の減衰評価や高次の漸近形は導出されていない．

藤田型方程式に対する時間大域解の高次漸近展開は [7, 8] で導出されている．これらの論文では，初期値の空間モーメント（空間変数の単項式を重み函数とする重み付き積分）の消滅による熱半群の $L^1$ 減衰を活用している．この性質を踏まえ，初期値と非線形項をある次数までの空間モーメントが全て消滅する部分とそうでない部分に分解し，前者を剰余項，後者を漸近形と見做して評価することで時間大域解の高次漸近展開を導出した．この方法論は，移流拡散方程式や分数冪拡散方程式を始めとする様々な放物型方程式だけでなく，消散型波動方程式にも応用されている（cf. 放物型方程式：[9, 10, 12, 11]，消散型波動方程式：[14, 13]）．しかし，上記の空間モーメントの消滅に基づく分解の影響で，漸近形を時間減衰部分と形状部分に分離できないなど，漸近形が複雑になるという欠点がある．その結果，剰余項の減衰評価の最良性，特に剰余項の下からの評価を導出することが困難であるように思われる．

このような現状を踏まえ，本研究では藤田優臨界 $p > 1 + 2/n$ の場合に，時空両変数に関する Taylor 展開を基礎とした初等的かつ直接的な方法で，(P) に対する時間大域解の明示的な高次漸近展開を剰余項の減衰評価も含めて導出した．また，部分的ではあるが，得られた剰余項の減衰評価が最良であることも示した．

## 2 CGL 半群の基本事項

本節では，本研究で基礎となる CGL 半群の基本評価と漸近展開について纏める．以下，正整数全体の集合を $\mathbb{Z}_{>0}$ と表し，非負整数全体の集合を $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ と表す：$\mathbb{Z}_{\geq 0} \coloneqq \mathbb{Z}_{>0} \cup \{0\}$．各 $\alpha =$

$(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$，$x=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ に対して，

$$|\alpha|\coloneqq\sum_{j=1}^n\alpha_j,\qquad \alpha!\coloneqq\prod_{j=1}^n\alpha_j!,\qquad x^\alpha\coloneqq\prod_{j=1}^n x_j^{\alpha_j},\qquad \partial^\alpha=\partial_x^\alpha\coloneqq\prod_{j=1}^n\partial_j^{\alpha_j},\qquad \partial_j\coloneqq\frac{\partial}{\partial x_j}$$

と定義する．また，$\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, $\beta=(\beta_1,\ldots,\beta_n)\in\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ が任意の $j\in\{1,\ldots,n\}$ に対して $\alpha_j\leq\beta_j$ を満たすとき, $\alpha\leq\beta$ と表す．各 $q\in[1,+\infty]$ に対して Lebesgue 空間 $L^q(\mathbb{R}^n)=L^q(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$ のノルムを $\|\cdot\|_q$ と表し，各 $m\in\mathbb{Z}_{>0}$ に対して重み付き Lebesgue 空間 $L^1_m(\mathbb{R}^n)$ を次で定義する：

$$L^1_m(\mathbb{R}^n)\coloneqq\left\{\varphi\in L^1(\mathbb{R}^n);\,|\alpha|\leq m\text{ なる任意の }\alpha\in\mathbb{Z}^n_{\geq 0}\text{ に対して }x^\alpha\varphi\in L^1(\mathbb{R}^n)\right\}.$$

但し，$x^\alpha\varphi$ は $\mathbb{R}^n\ni x\mapsto x^\alpha\varphi(x)\in\mathbb{C}$ なる函数を表す．

各 $\varphi\in L^q(\mathbb{R}^n)$，$q\in[1,+\infty]$ に対し，CGL 型方程式に付随する線形方程式の初期値問題

$$\begin{cases}\partial_t u-\nu\Delta u=0, & (t,x)\in(0,+\infty)\times\mathbb{R}^n,\\ u(0)=\varphi, & x\in\mathbb{R}^n\end{cases}$$

の時刻 $t\geq 0$ に於ける解を $e^{t\nu\Delta}\varphi$ と表す．このとき，任意の $t\geq 0$ に対して $e^{t\nu\Delta}$ は $L^q(\mathbb{R}^n)$ 上の有界線形作用素であり，族 $\left(e^{t\nu\Delta};t\geq 0\right)$ は半群を成す．この半群を CGL 半群という [20]．特に $t>0$ のとき，$e^{t\nu\Delta}\varphi$ は基本解 $G_{t\nu}$ を用いて,

$$\left(e^{t\nu\Delta}\varphi\right)(x)=(G_{t\nu}*\varphi)(x)=\int_{\mathbb{R}^n}G_{t\nu}(x-y)\,\varphi(y)\,dy,\qquad x\in\mathbb{R}^n$$

と表される．

任意の $t>0$ に対し，基本解 $G_{t\nu}$ は,

$$G_{t\nu}(x)=t^{-\frac{n}{2}}G_\nu\left(t^{-\frac{1}{2}}x\right),\qquad x\in\mathbb{R}^n$$

なる自己相似性を持つ．そこで，伸長 $\delta_t$ を,

$$(\delta_t\varphi)(x)\coloneqq t^{-\frac{n}{2}}\varphi\left(t^{-\frac{1}{2}}x\right),\qquad x\in\mathbb{R}^n$$

と定義する．このとき，$G_{t\nu}$ の自己相似性は,

$$G_{t\nu}=\delta_t G_\nu$$

と表される．さらに，任意の $\alpha\in\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ に対して,

$$\partial^\alpha G_{t\nu}=\partial^\alpha(\delta_t G_\nu)=t^{-\frac{|\alpha|}{2}}\delta_t(\partial^\alpha G_\nu)$$

となり,

$$\partial^\alpha e^{t\nu\Delta}\varphi=(\partial^\alpha G_{t\nu})*\varphi=t^{-\frac{|\alpha|}{2}}(\delta_t(\partial^\alpha G_\nu))*\varphi$$

が成り立つ．この等式に Young の不等式を適用すると，次の CGL 半群の基本評価を得る．

**命題 2.1**
$1\leq q\leq p\leq+\infty$，$\alpha\in\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$，$\varphi\in L^q(\mathbb{R}^n)$ とする．このとき，任意の $t>0$ に対して,

$$\left\|\partial^\alpha e^{t\nu\Delta}\varphi\right\|_p\leq t^{-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)-\frac{|\alpha|}{2}}\|\partial^\alpha G_\nu\|_r\|\varphi\|_q$$

が成り立つ．但し，$r\in[1,+\infty]$，$1/p+1=1/r+1/q$ である．

任意の $\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ に対し，$\partial^\alpha G_\nu$ は複素係数の多変数 Hermite 多項式

$$\boldsymbol{h}_{\nu,\alpha}(x) := \sum_{2\beta \leq \alpha} \frac{(-1)^{|\beta|}\alpha!}{\beta!(\alpha-2\beta)!}\nu^{-|\alpha-\beta|}x^{\alpha-2\beta}, \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

を用いて，

$$\partial^\alpha G_\nu = (-2)^{-|\alpha|}\boldsymbol{h}_{\nu,\alpha}G_\nu$$

と表される．よって，

$$\partial^\alpha G_{t\nu} = (-2)^{-|\alpha|}t^{-\frac{|\alpha|}{2}}\delta_t(\boldsymbol{h}_{\nu,\alpha}G_\nu)$$

が成り立つ．さらに，Taylor の定理より任意の $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 及び任意の $x, y \in \mathbb{R}^n$ に対して，

$$\begin{aligned}
(\partial^\alpha G_{t\nu})(x-y) &= \sum_{|\beta| \leq m} \frac{1}{\beta!}(-y)^\beta (\partial^{\alpha+\beta}G_{t\nu})(x) \\
&\quad + \sum_{|\beta|=m+1} \frac{m+1}{\beta!}\int_0^1 (1-\theta)^m (-y)^\beta (\partial^{\alpha+\beta}G_{t\nu})(x-\theta y)\,d\theta \\
&= (-2)^{-|\alpha|}t^{-\frac{|\alpha|}{2}}\sum_{k=0}^m 2^{-k}t^{-\frac{k}{2}}\sum_{|\beta|=k}\frac{1}{\beta!}y^\beta(\delta_t(\boldsymbol{h}_{\nu,\alpha+\beta}G_\nu))(x) \\
&\quad + (-1)^{-|\alpha|}2^{-(|\alpha|+m+1)}t^{-\frac{|\alpha|+m+1}{2}} \\
&\qquad \times \sum_{|\beta|=m+1}\frac{m+1}{\beta!}\int_0^1 (1-\theta)^m y^\beta (\delta_t(\boldsymbol{h}_{\nu,\alpha+\beta}G_\nu))(x-\theta y)\,d\theta
\end{aligned}$$

となる．この等式を CGL 半群の基本解を用いた積分表示に代入して評価すると，CGL 半群の $m$ 次漸近展開を得る．

**命題 2.2** ([16])
$m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，$\varphi \in L^1_{m+1}(\mathbb{R}^n)$，$\alpha \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ とする．このとき，任意の $t > 0$，$q \in [1, +\infty]$ に対して，

$$t^{\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{q}\right)+\frac{|\alpha|+m}{2}}\left\|\partial^\alpha e^{t\nu\Delta}\varphi - \Lambda_{\alpha,m}(t;\varphi)\right\|_q \leq 2^{-(|\alpha|+m+1)}t^{-\frac{1}{2}}\sum_{|\beta|=m+1}\frac{1}{\beta!}\|\boldsymbol{h}_{\nu,\alpha+\beta}G_\nu\|_q\|x^\beta\varphi\|_1$$

が成り立つ．但し，

$$\begin{aligned}
\Lambda_{\alpha,m}(t;\varphi) &:= (-2)^{-|\alpha|}t^{-\frac{|\alpha|}{2}}\sum_{k=0}^m 2^{-k}t^{-\frac{k}{2}}\sum_{|\beta|=k}\mathcal{M}_\beta(\varphi)\delta_t(\boldsymbol{h}_{\nu,\alpha+\beta}G_\nu), \\
\mathcal{M}_\alpha(\varphi) &:= \frac{1}{\alpha!}\int_{\mathbb{R}^n} y^\alpha\varphi(y)\,dy
\end{aligned}$$

である．

また，$m$ 次漸近形への収束だけに注目すると，次の命題が成り立つ．

**命題 2.3** ([16])
$m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，$\varphi \in L^1_m(\mathbb{R}^n)$，$\alpha \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ とする．このとき，任意の $q \in [1, +\infty]$ に対して，

$$\lim_{t\to+\infty} t^{\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{q}\right)+\frac{|\alpha|+m}{2}}\left\|\partial^\alpha e^{t\nu\Delta}\varphi - \Lambda_{\alpha,m}(t;\varphi)\right\|_q = 0$$

が成り立つ．

## 3　主定理

以下，$p > 1 + 2/n$ 及び $u_0 \in \left(L^1 \cap L^\infty\right)(\mathbb{R}^n)$ を仮定する．さらに，

$$u \in X \coloneqq \left(C \cap L^\infty\right)\left([0,+\infty);L^1\left(\mathbb{R}^n\right)\right) \cap \left(C \cap L^\infty\right)\left((0,+\infty);L^\infty\left(\mathbb{R}^n\right)\right)$$

を (P) の時間大域解で次の減衰評価を満たすものとする：

$$\sup_{q \in [1,+\infty]} \sup_{t>0} t^{\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{q}\right)} \left\|u(t)\right\|_q < +\infty. \tag{3.1}$$

このような時間大域解は，少なくとも $\|u_0\|_1 + \|u_0\|_\infty$ が十分に小さい場合，(P) に付随する積分方程式

$$u(t) = e^{t\nu\Delta}u_0 + \int_0^t e^{(t-s)\nu\Delta} f\left(u(s)\right) ds \tag{I}$$

に縮小写像の議論を適用することで実際に構成できる（cf. [15, Appendix A]）．しかし，ここでは初期値の小ささではなく，時間大域解の減衰評価を仮定していることに注意する．特に，吸収型の非線形項を持つ藤田型方程式（$\mathrm{Im}\,\nu = 0$，$\lambda < 0$）の場合，比較原理より大きな初期値に対しても式 (3.1) を満たす実数値時間大域解が構成できる（cf. [8]）．

時間大域解の高次漸近展開を導出する上で，次の重み付き評価は重要かつ基本的である．

**命題 3.1** ([16])
$m \in \mathbb{Z}_{>0}$，$p > 1 + 2/n$ とする．さらに，$u_0 \in \left(L^1_m \cap L^\infty\right)(\mathbb{R}^n)$，$u \in X$ を式 (3.1) を満たす (P) の時間大域解とする．このとき，$u \in C\left([0,+\infty);L^1_m\left(\mathbb{R}^n\right)\right)$ であり，

$$\sup_{t\geq 0}(1+t)^{-\frac{m}{2}} \sum_{|\alpha|=m} \left\|x^\alpha u(t)\right\|_1 < +\infty$$

が成り立つ．

導入で述べたように，複素スカラー場と分散性の影響で，命題 3.1 を証明するために放物型方程式に対する比較原理が適用できない．この問題は，CGL 半群と単項式から成る重み函数の交換関係の具体的表示

$$x^\alpha e^{t\nu\Delta}\varphi - e^{t\nu\Delta}x^\alpha\varphi = R_\alpha(t)\varphi,$$
$$R_\alpha(t)\varphi \coloneqq \sum_{\substack{\beta+\gamma=\alpha \\ \beta\neq 0}} \frac{\alpha!}{\beta!\gamma!}\left(-2t\nu\partial\right)^\beta e^{t\nu\Delta}x^\gamma\varphi + \sum_{\substack{\beta+\gamma\leq\alpha,\ |\beta+\gamma|\leq|\alpha|-2 \\ |\beta|+1\leq\ell\leq\frac{|\alpha|+|\beta|-|\gamma|}{2}}} C^\alpha_{\ell\beta\gamma}\left(t\nu\right)^\ell \partial^\beta e^{t\nu\Delta}x^\gamma\varphi$$

とその評価

$$\sum_{|\alpha|=m}\left\|x^\alpha e^{t\nu\Delta}\varphi - e^{t\nu\Delta}x^\alpha\varphi\right\|_1 \leq C\left\{t^{\frac{1}{2}}\left\||x|^{m-1}\varphi\right\|_1 + \left(t^{\frac{1}{2}} + t^{\frac{m}{2}}\right)\|\varphi\|_1\right\}$$

を基礎とした直接的な計算によって克服される [15, 16]．

以上の準備の下，(P) に対する時間大域解の漸近展開は次のように記述される．

**定理 3.2** ([16])
$m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，$p > 1 + (m+2)/n$ とする．さらに，$u_0 \in \left(L^1_m \cap L^\infty\right)(\mathbb{R}^n)$，$u \in X$ を式 (3.1) を満たす (P) の時間大域解とする．このとき，任意の $q \in [1, +\infty]$ に対して，

$$\lim_{t \to +\infty} t^{\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{q}\right)+\frac{m}{2}} \left\| u(t) - \mathcal{A}_m(t) \right\|_q = 0$$

が成り立つ．但し，

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_m(t) &\coloneqq \Lambda_{0,m}(t; u_0) + \sum_{|\gamma| \leq m/2} \frac{(-\nu)^{|\gamma|}}{\gamma!} \Lambda_{2\gamma, m-2|\gamma|}\left(t; \psi_{|\gamma|}\right), \\ \psi_k &\coloneqq \int_0^{+\infty} s^k f(u(s))\, ds \end{aligned}$$

である．

さらに，$u_0 \in L^1_m(\mathbb{R}^n)$ の代わりに $u_0 \in L^1_{m+1}(\mathbb{R}^n)$ を仮定すると，定理 3.2 で与えられる時間大域解の $m$ 次漸近展開に対する剰余項の減衰評価が得られる．

**定理 3.3** ([16])
$m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，$p > 1 + (m+2)/n$ とする．さらに，$u_0 \in \left(L^1_{m+1} \cap L^\infty\right)(\mathbb{R}^n)$，$u \in X$ を式 (3.1) を満たす (P) の時間大域解とする．このとき，任意の $q \in [1, +\infty]$ に対してある $C > 0$ が存在し，任意の $t > 0$ に対して，

$$t^{\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{q}\right)+\frac{m}{2}} \left\| u(t) - \mathcal{A}_m(t) \right\|_q \leq \begin{cases} Ct^{-\frac{n}{2}\left(p-1-\frac{m+2}{n}\right)} & \text{if} \quad 1 + \dfrac{m+2}{n} < p < 1 + \dfrac{m+3}{n}, \\ Ct^{-\frac{1}{2}} \log(2+t) & \text{if} \quad p = 1 + \dfrac{m+3}{n}, \\ Ct^{-\frac{1}{2}} & \text{if} \quad p > 1 + \dfrac{m+3}{n} \end{cases}$$

が成り立つ．

定理 3.2 及び定理 3.3 で与えられる時間大域解の $m$ 次漸近形 $\mathcal{A}_m(t)$ は次の階層構造を持つ：任意の $k \in \{0, \ldots, m\}$，$t > 0$ に対して，

$$\mathcal{A}_k(t) - \mathcal{A}_{k-1}(t) = t^{-\frac{k}{2}} \delta_t \left(\mathcal{A}_k(1) - \mathcal{A}_{k-1}(1)\right)$$

が成り立つ．但し，$\mathcal{A}_{-1}(t) \equiv 0$ と定義する．上式に於いて，伸長 $\delta_t$ は漸近形の放物型自己相似性を表し，$t^{-k/2}$ は漸近振幅の時間減衰を表す．さらに，$\mathcal{A}_k(1) - \mathcal{A}_{k-1}(1)$ は漸近形の空間分布を表し，

$$\mathcal{A}_k(1) - \mathcal{A}_{k-1}(1) = 2^{-k} \sum_{|\alpha|=k} \left( \mathcal{M}_\alpha(u_0) + \sum_{\substack{\beta+2\gamma=\alpha \\ |\gamma| \leq k/2}} \frac{(-\nu)^{|\gamma|}}{\gamma!} \mathcal{M}_\beta\left(\psi_{|\gamma|}\right) \right) \boldsymbol{h}_{\nu,\alpha} G_\nu$$

と具体的に書き下せる．

この階層構造を活用すると，定理 3.3 で与えられる時間大域解の $m$ 次漸近展開に対する剰余項の減衰評価は少なくとも $p > 1 + (m+3)/n$ の場合に最良であり，その最良性は初期値の空間モーメントと非線形項の時空間モーメントによって特徴付けられることが分かる．

**定理 3.4** ([16])
$m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，$p > 1 + (m+3)/n$ とする．さらに，$u_0 \in \left(L^1_{m+1} \cap L^\infty\right)(\mathbb{R}^n)$，$u \in X$ を式 (3.1) を満たす (P) の時間大域解とする．このとき，任意の $q \in [1, +\infty]$ に対して，

$$\lim_{t \to +\infty} t^{\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{q}\right)+\frac{m+1}{2}} \left\|u(t) - \mathcal{A}_m(t)\right\|_q = \left\|\mathcal{A}_{m+1}(1) - \mathcal{A}_m(1)\right\|_q \tag{3.2}$$

が成り立つ．特に，次の三つの主張は同値である：

(1) $\mathcal{A}_{m+1}(1) - \mathcal{A}_m(1) \not\equiv 0$.

(2) $|\alpha| = m+1$ なる $\alpha \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ で，

$$\mathcal{M}_\alpha(u_0) + \sum_{\substack{\beta+2\gamma=\alpha \\ |\gamma| \leq (m+1)/2}} \frac{(-\nu)^{|\gamma|}}{\gamma!} \mathcal{M}_\beta\left(\psi_{|\gamma|}\right) \neq 0$$

を満たすものが存在する．

(3) 任意の $q \in [1, +\infty]$，$\varepsilon > 0$ に対してある $t_0 > 0$ が存在し，任意の $t > t_0$ に対して，

$$\begin{aligned} 0 &< t^{-\frac{1}{2}}(1-\varepsilon)\left\|\mathcal{A}_{m+1}(1) - \mathcal{A}_m(1)\right\|_q \\ &\leq t^{\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{q}\right)+\frac{m}{2}} \left\|u(t) - \mathcal{A}_m(t)\right\|_q \\ &\leq t^{-\frac{1}{2}}(1+\varepsilon)\left\|\mathcal{A}_{m+1}(1) - \mathcal{A}_m(1)\right\|_q \end{aligned}$$

が成り立つ．

**注意 3.5**
$m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $p > 1 + (m+3)/n$, $\varphi \in \left(L^1_{m+1} \cap L^\infty\right)(\mathbb{R}^n)$ とする．さらに，$|\alpha| = m+1$ なる $\alpha \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ で，$\mathcal{M}_\alpha(\varphi) \neq 0$ を満たすものが存在すると仮定する．このとき，ある $\varepsilon_\varphi > 0$ が存在し，任意の $\varepsilon \in (0, \varepsilon_\varphi]$ に対して $u_0 = \varepsilon\varphi$ を初期値とする (P) の時間大域解 $u \in X$ は $\mathcal{A}_{m+1}(1) - \mathcal{A}_m(1) \not\equiv 0$ を満たす．

尚，$1 + (m+2)/n < p \leq 1 + (m+3)/n$ の場合，定理 3.3 で与えられる時間大域解の $m$ 次漸近展開に対する剰余項の減衰評価の最良性は未解決である（cf. [7, Remark 1.7]）．

## 4　主定理の証明の概略

定理 3.2 及び定理 3.3 の証明は，(P) に付随する積分方程式 (I) の Duhamel 項の時間変数に関する Taylor 展開に基づく：

$$\begin{aligned} e^{(t-s)\nu\Delta} f(u(s)) &= \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} (-s\nu\Delta)^k e^{t\nu\Delta} f(u(s)) \\ &\quad + \frac{1}{N!} \int_0^1 (1-\theta)^N (-s\nu\Delta)^{N+1} e^{(t-s\theta)\nu\Delta} f(u(s))\, d\theta \\ &= \sum_{|\gamma| \leq N} \frac{(-\nu)^{|\gamma|}}{\gamma!} s^{|\gamma|} \partial^{2\gamma} e^{t\nu\Delta} f(u(s)) \end{aligned}$$

$$+ (N+1) \sum_{|\gamma|=N+1} \frac{(-\nu)^{N+1}}{\gamma!} \int_0^1 (1-\theta)^N s^{N+1} \partial^{2\gamma} e^{(t-s\theta)\nu\Delta} f(u(s))\, d\theta.$$

この等式を (I) に代入し，命題 2.1 と式 (3.1) を用いて評価すると次の補題を得る．

**補題 4.1**
$m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，$p > 1 + (m+2)/n$ とする．さらに，$u_0 \in \left(L^1 \cap L^\infty\right)(\mathbb{R}^n)$，$u \in X$ を式 (3.1) を満たす (P) の時間大域解とする．このとき，任意の $q \in [1, +\infty]$ に対して，

$$\lim_{t\to+\infty} t^{\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{q}\right)+\frac{m}{2}} \left\| u(t) - e^{t\nu\Delta} u_0 - \sum_{|\gamma|\leq m/2} \frac{(-\nu)^{|\gamma|}}{\gamma!} \partial^{2\gamma} e^{t\nu\Delta} \psi_k \right\|_q = 0$$

が成り立つ．

この補題と命題 2.3 を組み合わせると定理 3.2 が示される．定理 3.3 は，時間大域解の $m$ 次漸近展開に対する剰余項を，

$$\begin{aligned}
&u(t) - \mathcal{A}_m(t) \\
&\quad = \left(e^{t\nu\Delta} u_0 - \Lambda_{0,m}(t; u_0)\right) + \int_{t/2}^t e^{(t-s)\nu\Delta} f(u(s))\, ds \\
&\qquad + \sum_{|\gamma|\leq N} \frac{(-\nu)^{|\gamma|}}{\gamma!} \int_0^{t/2} s^{|\gamma|} \left(\partial^{2\gamma} e^{t\nu\Delta} f(u(s)) - \Lambda_{2\gamma, m-2|\gamma|}(t; f(u(s)))\right) ds \\
&\qquad + (N+1) \sum_{|\gamma|=N+1} \frac{(-\nu)^{N+1}}{\gamma!} \int_0^{t/2} \int_0^1 (1-\theta)^N s^{N+1} \partial^{2\gamma} e^{(t-s\theta)\nu\Delta} f(u(s))\, d\theta ds \\
&\qquad - \sum_{|\gamma|\leq N} \frac{(-\nu)^{|\gamma|}}{\gamma!} \sum_{|\beta|\leq m-2|\gamma|} 2^{-(|\beta|+2|\gamma|)} t^{-\frac{|\beta|+2|\gamma|}{2}} \left(\int_{t/2}^{+\infty} s^{|\gamma|} \mathcal{M}_\beta(f(u(s)))\, ds\right) \delta_t\left(\boldsymbol{h}_{\nu, 2\gamma+\beta} G_\nu\right)
\end{aligned}$$

と分解し，命題 2.1，命題 2.2，命題 3.1，式 (3.1) を用いて各項を評価することで示される．

定理 3.4 の証明では等式

$$\begin{aligned}
u(t) - \mathcal{A}_m(t) &= u(t) - \mathcal{A}_{m+1}(t) + \left(\mathcal{A}_{m+1}(t) - \mathcal{A}_m(t)\right) \\
&= u(t) - \mathcal{A}_{m+1}(t) + t^{-\frac{m+1}{2}} \delta_t\left(\mathcal{A}_{m+1}(1) - \mathcal{A}_m(1)\right)
\end{aligned}$$

に注目する．この等式と定理 3.2 より，

$$\begin{aligned}
\limsup_{t\to+\infty} t^{\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{q}\right)+\frac{m}{2}+\frac{1}{2}} \left\|u(t) - \mathcal{A}_m(t)\right\|_q &\leq \limsup_{t\to+\infty} t^{\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{q}\right)+\frac{m}{2}+\frac{1}{2}} \left\|u(t) - \mathcal{A}_{m+1}(t)\right\|_q \\
&\quad + \limsup_{t\to+\infty} t^{\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{q}\right)} \left\|\delta_t\left(\mathcal{A}_{m+1}(1) - \mathcal{A}_m(1)\right)\right\|_q \\
&= \left\|\mathcal{A}_{m+1}(1) - \mathcal{A}_m(1)\right\|_q, \\
\liminf_{t\to+\infty} t^{\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{q}\right)+\frac{m}{2}+\frac{1}{2}} \left\|u(t) - \mathcal{A}_m(t)\right\|_q &\geq \liminf_{t\to+\infty} t^{\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{q}\right)} \left\|\delta_t\left(\mathcal{A}_{m+1}(1) - \mathcal{A}_m(1)\right)\right\|_q \\
&\quad - \limsup_{t\to+\infty} t^{\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{q}\right)+\frac{m}{2}+\frac{1}{2}} \left\|u(t) - \mathcal{A}_{m+1}(t)\right\|_q \\
&= \left\|\mathcal{A}_{m+1}(1) - \mathcal{A}_m(1)\right\|_q
\end{aligned}$$

と評価され，

$$\lim_{t\to+\infty} t^{\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{q}\right)+\frac{m}{2}+\frac{1}{2}} \|u(t)-\mathcal{A}_m(t)\|_q = \|\mathcal{A}_{m+1}(1)-\mathcal{A}_m(1)\|_q$$

を得る．また，(1) $\Leftrightarrow$ (2) は $\mathcal{A}_{m+1}(1)-\mathcal{A}_m(1)$ の具体的表示と Hermite 多項式の直交性

$$\int_{\mathbb{R}^n} \boldsymbol{h}_{\nu,\alpha}(x)\,\boldsymbol{h}_{\nu,\beta}(x)\,G_\nu(x)\,dx = \begin{cases} \left(\dfrac{2}{\nu}\right)^{|\alpha|}\alpha!, & \alpha=\beta,\\ 0, & \alpha\neq\beta \end{cases}$$

より従い，(1) $\Rightarrow$ (3) は $\|\mathcal{A}_{m+1}(1)-\mathcal{A}_m(1)\|_q > 0$ と式 (3.2) より従う．(3) $\Rightarrow$ (1) は明らか.

## 参考文献


[1] I. S. Aranson, L. Kramer, *The world of the complex Ginzburg–Landau equation*, Rev. Modern Phys., **74** (2002), no.1, 99–143.

[2] T. Cazenave, S. Snoussi, *Finite-time blowup for some nonlinear complex Ginzburg–Landau equations*, Partial differential equations arising from physics and geometry, 172–214, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 450, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2019.

[3] J. Chen, B. Wang, Z. Wang, *Complex valued semi-linear heat equations in super-critical spaces $E^s_\sigma$*, Math. Ann., **386** (2023), no.3-4, 1351–1389.

[4] A. Gmira, L. Véron, *Large time behaviour of the solutions of a semilinear parabolic equation in $\mathbb{R}^N$*, J. Differential Equations, **53** (1984), no.2, 258–276.

[5] N. Hayashi, E. I. Kaikina, P. I. Naumkin, *Landau–Ginzburg type equations in the subcritical case*, Commun. Contemp. Math., **5** (2003), no.1, 127–145.

[6] N. Hayashi, E. I. Kaikina, P. I. Naumkin, *Global existence and time decay of small solutions to the Landau–Ginzburg type equations*, J. Anal. Math., **90** (2003), 141–173.

[7] K. Ishige, M. Ishiwata, T. Kawakami, *The decay of the solutions for the heat equation with a potential*, Indiana Univ. Math. J., **58** (2009), no.6, 2673–2707.

[8] K. Ishige, T. Kawakami, *Refined asymptotic profiles for a semilinear heat equation*, Math. Ann., **353** (2012), no.1, 161–192.

[9] K. Ishige, T. Kawakami, *Asymptotic expansions of solutions of the Cauchy problem for nonlinear parabolic equations*, J. Anal. Math., **121** (2013), 317–351.

[10] K. Ishige, T. Kawakami, K. Kobayashi, *Asymptotics for a nonlinear integral equation with a generalized heat kernel*, J. Evol. Equ., **14** (2014), no.4-5, 749–777.

[11] K. Ishige, T. Kawakami, H. Michihisa, *Asymptotic expansions of solutions of fractional diffusion equations*, SIAM J. Math. Anal., **49** (2017), no.3, 2167–2190.

[12] T. Kawakami, *Higher order asymptotic expansion for the heat equation with a nonlinear boundary condition*, Funkcial. Ekvac., **57** (2014), no.1, 57–89.

[13] T. Kawakami, H. Takeda, *Higher order asymptotic expansions to the solutions for a nonlinear damped wave equation*, NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl., **23** (2016), no.5, Art. 54, 30 pp.

[14] T. Kawakami, Y. Ueda, *Asymptotic profiles to the solutions for a nonlinear damped wave equation*, Differential Integral Equations, **26** (2013), no.7-8, 781–814.

[15] R. Kusaba, T. Ozawa, *Weighted estimates and large time behavior of small amplitude solutions to the semilinear heat equation*, Differ. Equ. Appl., **15** (2023), no.3, 235–268.

[16] R. Kusaba, T. Ozawa, *Asymptotic behavior of global solutions to the complex Ginzburg–Landau type equation in the super Fujita-critical case*, submitted (arXiv:2401.06363).

[17] S. Machihara, Y. Nakamura, *The inviscid limit for the complex Ginzburg–Landau equation*, J. Math. Anal. Appl., **281** (2003), no. 2, 552–564.

[18] M. Nakamura, *Remarks on the derivation of several second order partial differential equations from a generalization of the Einstein equations*, Osaka J. Math., **57** (2020), no.2, 305–331.

[19] M. Nakamura, Y. Sato, *Existence and non-existence of global solutions for the semilinear complex Ginzburg–Landau type equation in homogeneous and isotropic spacetime*, Kyushu J. Math., **75** (2021), no. 2, 169–209.

[20] D. Shimotsuma, T. Yokota, K. Yoshii, *Cauchy problem for the complex Ginzburg–Landau type equation with $L^p$-initial data*, Math. Bohem., **139** (2014), no. 2, 353–361.

[21] D. Shimotsuma, T. Yokota, K. Yoshii, *Existence and decay estimates of solutions to complex Ginzburg–Landau type equations*, J. Differential Equations, **260** (2016), no. 3, 3119–3149.