

変分法による楕円制限 3 体問題の遷移軌道の存在証明

京都大学大学院 情報学研究科 情報学専攻
黒川大雅 (Taiga KUROKAWA) *

概要

近年, 宇宙探査機の軌道設計において, 制限 3 体問題を用いた軌道設計が盛んに研究されている. 制限 3 体問題において, 低エネルギー軌道を考える際, まず問題になるのは, 遷移軌道の存在である. 数値計算や摂動論的な存在証明も行われているが, これらの結果では具体的なエネルギーについてその存在を保証することはできず, 変分法による存在証明はこれを可能にする点で重要である. 2 天体が円運動を行う場合については Moeckel(2005) と講演者の修士論文による結果があるが, より一般に楕円運動を行う場合については Lagrange 系が非自励的になる困難さのために行われていなかった. 講演者は, 非自励な Lagrange 系の端点エネルギー固定条件付き 2 点境界値問題の変分構造を新たに見出すことで, 一般の楕円運動の場合についても存在証明を行うことに成功した. 本講演では, この結果を変分構造に重点をおいて紹介する.

1 導入

1.1 本研究と宇宙探査機の軌道設計との関係

本研究は, 例えば, 宇宙探査機を地球周辺から月周辺に送るミッションを実現するような軌道設計と深く関わっている.

宇宙探査機の軌道設計の理論分野において, 従来は, Hohman 軌道やフライバイ (参考文献 [1].) など, 天体と探査機の 2 体問題を用いた軌道設計を扱うことが一般的であった. 先のミッションを考える場合でも, 探査機の運動を, 地球周辺では (月の影響を無視した) 地球と探査機の 2 体問題, 月周辺では (地球の影響を無視した) 月と探査機の 2 体問題の軌道としてモデル化し, それぞれの軌道をつなぎ合わせる形で軌道設計が行われてきた. もちろん, 地球と月と探査機の 3 体問題によるモデルの方が, より正確に実際の探査機の運動を表現できるのだが, 3 体問題の解析困難さ (Poincaré[2] による非可積分性の結果が有名である. 参考文献 [3].) のために扱われてこなかった.

近年は, 軌道設計の理論分野においても, 3 体問題を用いた軌道設計が盛んに研究されている (参考文献 [4].). ここで, 3 体問題と言っても, 探査機は天体に比べて質量が非常に小さいため, 探査機による天体の運動への影響は無視でき, 1.2 節で説明する **制限 3 体問題** が用いられる.

軌道設計においては, ミッションをできる限り短いスパンで, かつ低コストで達成できるような軌道を設計することが求められるが, 先のミッションを, 低コストで実現することを考える際, まず問題

* E-mail : taiga.k@amp.i.kyoto-u.ac.jp

本研究は, JST 次世代研究者挑戦的研究プログラム JPMJSP2110 の支援を受けたものです.

になるのは、1.3 節で説明する遷移軌道の存在である。

本研究は、この遷移軌道の存在証明を、数学的に厳密に、特に変分法を用いて行うものである。

1.2 平面円制限 3 体問題 (PCR3BP) ・ 平面楕円制限 3 体問題 (PER3BP)

制限 3 体問題とは、2 つの天体からの万有引力の影響を受ける一方、これらの天体への影響は無視できるほどに小さな物体の運動を記述する数理モデルであり、2 つの天体は 2 体問題の有界な解、すなわち円運動または楕円運動を行うものとされる。また、2 つの天体と同一な平面は不変平面であるため、この平面上に運動を制限した問題を考えることができる。この問題を平面制限 3 体問題という。このうち、2 つの天体が円運動をするものは平面円制限 3 体問題 (PCR3BP)、楕円運動をするものは平面楕円制限 3 体問題 (PER3BP) と呼ばれる。PCR3BP と PER3BP は、それぞれ適切な座標変換 (時間変数も取り替える) によって、次のような Lagrange 系として書き表される (参考文献 [1].).

PCR3BP ・ PER3BP

$L_\mu^C : (\mathbb{R}^2 \setminus \{^t(-\mu, 0) \cup ^t(1 - \mu, 0)\}) \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$: PCR3BP の Lagrangian

$$L_\mu^C(\mathbf{z}, \mathbf{v}) := \frac{1}{2}|\mathbf{v}|^2 + {}^t\mathbf{z}J\mathbf{v} + V_\mu(\mathbf{z})$$

$L_\mu^E : \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{^t(-\mu, 0) \cup ^t(1 - \mu, 0)\}) \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$: PER3BP の Lagrangian

$$L_\mu^E(t, \mathbf{z}, \mathbf{v}) := \frac{1}{2}|\mathbf{v}|^2 + {}^t\mathbf{z}J\mathbf{v} + f(t)V_\mu(\mathbf{z})$$

ただし、以下の通りとした。

$$0 < \mu \leq \frac{1}{2} \text{ (2 つの天体の相対質量)}, \quad 0 \leq e < 1 \text{ (2 つの天体の楕円運動の離心率)}, \quad J := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$f(t) := \frac{1}{1 + e \cos t}, \quad V_\mu(\mathbf{z}) := \frac{1}{2}|\mathbf{z}|^2 + \frac{1 - \mu}{|z + {}^t(\mu, 0)|} + \frac{\mu}{|z - {}^t(1 - \mu, 0)|} > 0$$

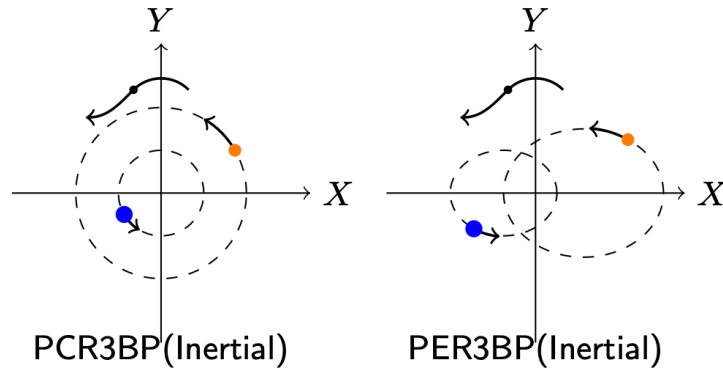


図 1: PCR3BP と PER3BP のイメージ図 (慣性座標系)

ここで注意したいのは、PCR3BP は L_μ^C が時間に依存しない自励系であるのに対し、PER3BP は L_μ^E が時間に依存する非自励系であるということである。従って、それぞれのエネルギー関数を次の

ように定義すると, E_μ^C は PCR3BP の保存量だが, E_μ^E は PER3BP の保存量ではない.

$$E_\mu^C(\mathbf{z}, \mathbf{v}) := \frac{1}{2}|\mathbf{v}|^2 - V_\mu(\mathbf{z}), \quad E_\mu^E(t, \mathbf{z}, \mathbf{v}) := \frac{1}{2}|\mathbf{v}|^2 - f(t)V_\mu(\mathbf{z})$$

1.3 PCR3BP・PER3BP の遷移軌道

まず, PCR3BP の遷移軌道について説明する. あるエネルギー値 $h \in \mathbb{R}$ が与えられると, 配位空間の各点はそのエネルギー値を実現する初期値を取れるものと取れないものに分けられる. すなわち, 前者の領域は $\{\mathbf{z} \mid h + V_\mu(\mathbf{z}) \geq 0\}$ であり, このような領域はエネルギー値 h の **Hill 領域**と呼ばれる. 次の図 2 では, $\mu = 0.012$ (地球・月系の相対質量) のときの適当なエネルギー値に対する Hill 領域を, 白の範囲で表した. また, 右の図は左の図の長方形領域を拡大したものである.

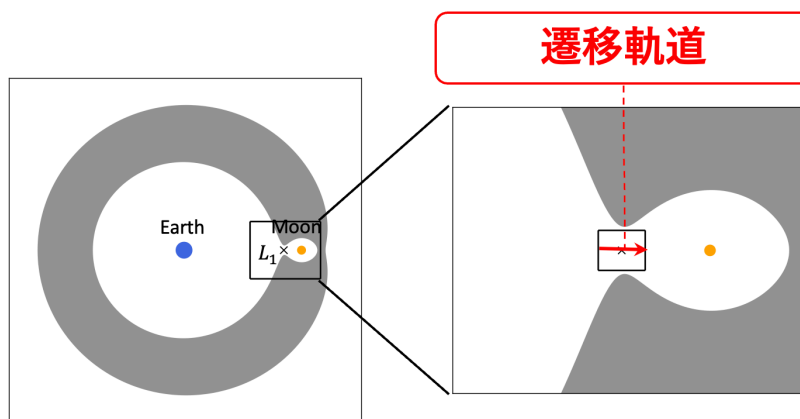


図 2: Hill 領域と遷移軌道

図 2 に表すように, この Hill 領域には窪みがあるが, ここにはサドル・センター型平衡点 L_1 が存在し, 一般に L_1 のエネルギー値よりもわずかに大きなエネルギーに関する Hill 領域は, 同様の窪みを持つ. 本研究で PCR3BP の遷移軌道とは, そのようなエネルギー値を実現する解で, L_1 の左側の領域を出発し, L_1 の右側の領域に到達するものと定義する. 従って, PCR3BP の遷移軌道は, 2.2 節で述べるエネルギー固定条件付き 2 点境界値問題として構成することができる.

次に, PER3BP の遷移軌道について説明する. この場合, エネルギー h の Hill 領域は $\{\mathbf{z} \mid h + f(t)V_\mu(\mathbf{z}) \geq 0\}$ であり, 時間に依存して変化する. 一方, PCR3BP と PER3BP の Euler-Lagrange 方程式を比較すれば明らかのように, PCR3BP の平衡点であることと PER3BP の平衡点であることは同値であり, PER3BP も L_1 を平衡点に持つ. L_1 のエネルギー値も時間に依存して変化するが, L_1 の最大エネルギー値よりもわずかに大きなエネルギーに関する Hill 領域は, 任意の時刻で, 図 2 と同様の窪みを持つ. 本研究で PER3BP の遷移軌道とは, ある時刻でそのようなエネルギー値を実現する解で, L_1 の左側の領域を出発し, L_1 の右側の領域に到達するものと定義する. 従って, PER3BP の遷移軌道は, 2.3 節で述べる終端エネルギー固定条件付き 2 点境界値問題として構成することができる.

また, 注意しておきたいのは, 2 つの天体と同一な平面上に運動を制限する前の (空間) 制限 3 体問題についても, 円・楕円それぞれ遷移軌道を考えられるが, 平面制限 3 体問題の遷移軌道は, (空間) 制

限 3 体問題の遷移軌道でもあるため、遷移軌道の存在に関しては、平面制限 3 体問題で示せば十分であるということである。

1.4 遷移軌道の存在に関する先行研究と本研究の立ち位置

PCR3BP・PER3BP のどちらについても、数値計算によって遷移軌道の存在を示唆する結果は数多く知られているが、数学的に厳密な結果は数えるほどしかない。また、数学的に厳密な結果には、摂動論による結果と、変分法による結果とがあるが、前者は具体的なエネルギーについてその存在を保証することはできず、後者はこれを可能にする点で重要である。

PCR3BP については、摂動論による結果として Moser(1958,[5]) の結果が、変分法による結果として Moeckel(2005,[6]) の結果と、筆者の修士論文の結果がある。

一方、PER3BP については、摂動論による結果として Fitzgerald&Ross(2022,[7]) の結果があるが、変分法による結果は本研究が初めてである。

ここで、PER3BP の遷移軌道の変分法による存在証明が、なぜこれまで困難だったのかといえば、1.3 節で定義した遷移軌道を与えるような変分構造が知られていなかったからである。Moeckel(2005) の用いた Maupertuis 汎関数による変分構造は自励系でしか機能しないため、PER3BP に拡張することができない。一方、筆者の修士論文で用いた Lagrange 汎関数による変分構造は、自励系ではエネルギー固定条件付き 2 点境界値問題の変分構造として機能するが、2.3 節で述べるように、実は非自励系では終端エネルギー固定条件付き 2 点境界値問題の変分構造として機能することがわかり解決に至った。

2 2 点境界値問題の変分構造

この章では、次で定める一般的な Lagrange 系を考える。(仮定 (i)~(iii) は、後で定義する汎関数の最小化曲線について、第一変分をとる際の微分と積分の交換が可能であることを保証し、Euler-Lagrange 方程式を導くための仮定である。参考文献 [8].)

Lagrangian

$$L : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}, \quad L = L(t, \mathbf{z}, \mathbf{v})$$

(i) C^2

(ii) $\exists c_1, c_2, c_3 > 0$

s.t. $|L| \leq c_1 + c_2|\mathbf{z}|^2 + c_3|\mathbf{v}|^2$

(iii) $\exists c_4, c_5, c_6 > 0$

s.t. $\sum_{i=1}^d |L_{z_i}| + \sum_{i=1}^d |L_{v_i}| \leq c_4 + c_5|\mathbf{z}|^2 + c_6|\mathbf{v}|^2$

エネルギー関数を次のように定義しておく。

$$E(t, \mathbf{z}, \mathbf{v}) := L_{\mathbf{v}}(t, \mathbf{z}, \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} - L(t, \mathbf{z}, \mathbf{v})$$

以下の3つの異なる制約条件各々について、その制約条件付き2点境界値問題の変分構造を順に述べる。

- 所要時間固定条件
- エネルギー固定条件
- 終端エネルギー固定条件

また、最小化問題を考える際の曲線集合と汎関数を、次のように定義しておく。

曲線集合と汎関数

$[a, b] \subset \mathbb{R}$, $z_S, z_G \in \mathbb{R}^d$, $h \in \mathbb{R}$ に対し、次のように定義する。

$$\mathcal{C}^{[a,b]} := \{c^{[a,b]} \in H^1((a, b), \mathbb{R}^d) \mid c^{[a,b]}(a) = z_S, c^{[a,b]}(b) = z_G\},$$

$$\mathcal{A}^{[a,b]} : \mathcal{C}^{[a,b]} \rightarrow \mathbb{R}, \mathcal{A}^{[a,b]}(c^{[a,b]}) := \int_{[a,b]} L(t, c^{[a,b]}(t), \dot{c}^{[a,b]}(t)) dt,$$

$$\mathcal{A}^{a,h} : \sqcup_{b \in (a, +\infty)} \mathcal{C}^{[a,b]} \rightarrow \mathbb{R}, \mathcal{A}^{a,h}(c^{[a,b]}) := \int_{[a,b]} L(c^{[a,b]}(t), \dot{c}^{[a,b]}(t)) + h dt.$$

2.1 時間区間固定条件付き2点境界値問題の変分構造

時間区間固定条件付き2点境界値問題

与えられた時間区間 $[a, b] \subset \mathbb{R}$ と2点 $z_S, z_G \in \mathbb{R}^d$ に対して、

Euler-Lagrange 方程式の解 $c^{[a,b]} \in C^2([a, b], \mathbb{R}^d)$ で、次の条件を満たすものは存在するか?

$$c^{[a,b]}(a) = z_S, c^{[a,b]}(b) = z_G.$$

この時間区間固定条件付き2点境界値問題は、自励か非自励かにかかわらず意味を持ち、その変分構造はよく知られているように、以下の通りである。

命題 1. (時間区間固定条件付き2点境界値問題の変分構造)

$c_*^{[a,b]} \in \mathcal{C}^{[a,b]} \cap C^2([a, b], \mathbb{R}^d)$ について、次が成り立つ。

$$\mathcal{A}^{[a,b]}(c_*^{[a,b]}) = \inf\{\mathcal{A}^{[a,b]}(c^{[a,b]}) \mid c^{[a,b]} \in \mathcal{C}^{[a,b]}\}$$

$$\Rightarrow c_*^{[a,b]} : \text{時間区間固定条件付き2点境界値問題の解 } (T, z_S, z_G). \quad \square$$

2.2 エネルギー固定条件付き 2 点境界値問題の変分構造

エネルギー固定条件付き 2 点境界値問題

与えられたエネルギー値 $h \in \mathbb{R}$ と 2 点 $z_S, z_G \in \mathbb{R}^d$ に対して,
時間区間 $[a, b]$ と Euler-Lagrange 方程式の解 $c^{[a,b]} \in C^2([a, b], \mathbb{R}^d)$ で, 次の条件を満たすものは存在するか?

$$\begin{aligned} c^{[a,b]}(a) &= z_S, \quad c^{[a,b]}(b) = z_G, \\ \forall t \in [a, b], \quad E(c^{[a,b]}(t), \dot{c}^{[a,b]}(t)) &= h. \end{aligned}$$

このエネルギー固定条件付き 2 点境界値問題は, 任意の時刻でエネルギー値 h を実現する必要があるため, 自励系の場合にのみ意味を持ち, 以下の変分構造が知られている.

命題 2. エネルギー固定条件付き 2 点境界値問題の変分構造 $b_* > 0$ と $c_*^{[a,b_*]} \in C^{[a,b_*]} \cap C^2([a, b_*], \mathbb{R}^d)$ について, 次が成り立つ.

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^{a,h}(c_*^{[a,b_*]}) &= \inf\{\mathcal{A}^{a,h}(c^{[a,b]}) \mid c^{[a,b]} \in \sqcup_{b \in (a, +\infty)} C^{[a,b]}\} \\ \Rightarrow c_*^{[a,b_*]} &: \text{エネルギー固定条件付き 2 点境界値問題の解 } (h, z_S \text{ and } z_G). \quad \square \end{aligned}$$

今, Lagrange 系は自励系のみ考えているため, $[a, b]$ 区間を $[0, b-a]$ に置き換えたものは同値であり, $a = 0$ として一般性を失わないことに注意したい.

2.3 終端エネルギー固定条件付き 2 点境界値問題の変分構造

終端エネルギー固定条件付き 2 点境界値問題

与えられたエネルギー値 $h \in \mathbb{R}$ と 2 点 $z_S, z_G \in \mathbb{R}^d$ に対して,
時間区間 $[a, b]$ と Euler-Lagrange 方程式の解 $c^{[a,b]} \in C^2([a, b], \mathbb{R}^d)$ で, 次の条件を満たすものは存在するか?

$$\begin{aligned} c^{[a,b]}(a) &= z_S, \quad c^{[a,b]}(b) = z_G, \\ E(c^{[a,b]}(b), \dot{c}^{[a,b]}(b)) &= h. \end{aligned}$$

この終端エネルギー固定条件付き 2 点境界値問題は, 非自励系の場合にも意味を持ち, 以下の変分構造を発見した.

命題 3. 終端エネルギー固定条件付き 2 点境界値問題の変分構造 $b_* > 0$ と $c_*^{[a,b_*]} \in C^{[a,b_*]} \cap C^2([a, b_*], \mathbb{R}^d)$ について, 次が成り立つ.

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^{a,h}(c_*^{[a,b_*]}) &= \inf\{\mathcal{A}^{a,h}(c^{[a,b]}) \mid c^{[a,b]} \in \sqcup_{b \in (a, +\infty)} C^{[a,b]}\} \\ \Rightarrow c_*^{[a,b_*]} &: \text{終端エネルギー固定条件付き 2 点境界値問題の解 } (h, z_S \text{ and } z_G). \quad \square \end{aligned}$$

今, 終端時刻 b についても最小化する最小化曲線が終端エネルギー固定条件を満たすことを述べたが,

実は, 始端時刻 a についても同様のことが成り立つ, すなわち始端エネルギー固定条件を満たすということが従うことを注意しておく.

3 主結果

最後に, PCR3BP の遷移軌道に関する修士論文の結果と, PER3BP の遷移軌道に関する主結果を紹介する.

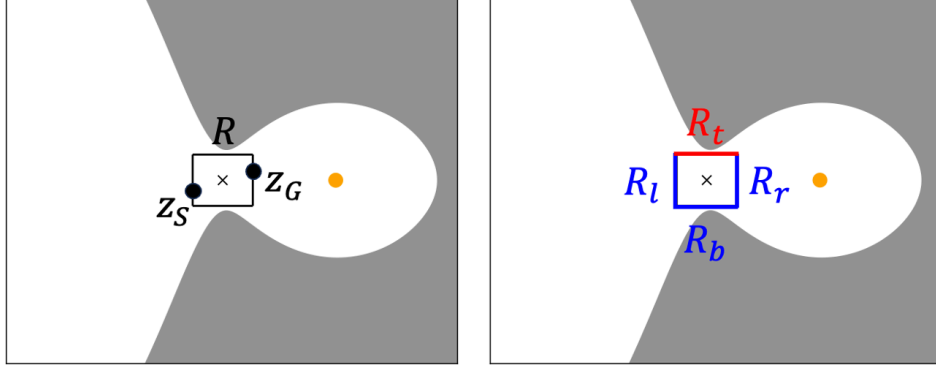


図 3: 2 点境界値と曲線の動く範囲とその境界のイメージ

曲線集合と汎関数

$T > 0, R \subset \mathbb{R}^2, z_S, z_G \in R, h \in \mathbb{R}$ に対し, 次のように定義する.

$$\mathcal{C}_{z_S \rightarrow z_G}^T(R) := \{c^T \in H^1((0, T), \mathbb{R}^2) \mid c^T(0) = z_S, c^T(T) = z_G\},$$

$$\mathcal{A}_\mu^{C(E), h} : \sqcup_{T>0} \mathcal{C}_{z_S \rightarrow z_G}^T \rightarrow \mathbb{R}, \mathcal{A}_\mu^{C(E), h}(c^T) := \int_{[0, T]} L_\mu^{C(E)}(c^T(t), \dot{c}^T(t)) + h \, dt.$$

3.1 PCR3BP の遷移軌道が存在するための十分条件 (筆者の修士論文の結果)

定理. $h > E_\mu^C(L_1) = -V_\mu(L_1)$ について, Lagrange 点 $L_1 = ({}^t(x_e, 0), \mathbf{0})$ を中心とする長方形領域 $R = [x_e - c, x_e + c] \times [-k, k] \subset \mathbb{R}^2$ で, 次の Cond.1(L-PCR3BP) を満たすものが存在するとする.

Cond.1(L-PCR3BP)

$$\forall z \in R, h + V_\mu(z) > \frac{1}{2}|z - {}^t(x_e, 0)|^2.$$

このとき, 任意の $z_S \in R_l$ と $z_G \in R_r$ について, $\mathcal{A}_\mu^{C, h}(c_*^{T_*}) = \inf\{\mathcal{A}_\mu^{C, h}(c^T) \mid c^T \in \sqcup_{T>0} \mathcal{C}_{z_S \rightarrow z_G}^T(R)\}$ が成り立つような, $T_* > 0$ と $c_*^{T_*} \in \mathcal{C}_{z_S \rightarrow z_G}^{T_*}(R)$, すなわち time-free な最小化曲線が存在する. さらに, R について, 次の Cond.2・3(L-PCR3BP) が成り立つとする.

Cond.2(L-PCR3BP)

$$\forall z \in R_l \cup R_r, 8(h + V_\mu(z)) < (\partial_x V_\mu(z))^2,$$

Cond.3(L-PCR3BP)

$$\forall z \in R_b, 8(h + V_\mu(z)) > (\partial_y V_\mu(z))^2.$$

最後に, T_* と, ある $z_S \in R_l$ と $z_G \in R_r$ について, 次の Cond.4(L-PCR3BP) が成り立つなら, c_*^{T*} は, R 内で z_S から z_G へ至るような, エネルギーが h の PCR3BP の解, すなわち遷移軌道である.

Cond.4(L-PCR3BP)

$$\inf_{c^{T*} \in \mathcal{C}_{z_S \rightarrow z_G}^{T*}(R)} \mathcal{A}_\mu^{C,h}(c^{T*}) < \inf_{\tilde{c}^{T*} \in \mathcal{T}_{z_S \rightarrow z_G}^{T*}(R)} \mathcal{A}_\mu^{C,h}(\tilde{c}^{T*}).$$

ただし, $\mathcal{T}_{z_S \rightarrow z_G}^T(R)$ は, 次のように定義した.

$$\mathcal{T}_{z_S \rightarrow z_G}^T(R) := \{\tilde{c}^T \in \mathcal{C}_{z_S \rightarrow z_G}^T(R) \mid \exists t \in (0, T) \text{ s.t. } \tilde{c}^T(t) \in R_t\}.$$

□

この定理において, R を Cond.1 を満たすコンパクト凸集合としてとることは, time-free な最小化曲線が存在するために本質的な仮定である. そのため, この最小化曲線について第一変分をとって Euler-Lagrange 方程式の弱解であることを導くには, この最小化曲線が端点以外で R の境界に達さないことを示す必要がある. Cond.2 は, $R_l \cup R_r$ に達さないこと, Cond.3 は, R_b に達さないこと, Cond.4 は, R_t に達さないことを保証する条件に対応している.

次の PER3BP に関する主結果との比較のために, もう少し詳しく言えば, Cond.2 は, エネルギーが h の PCR3BP の解が, $R_l \cup R_r$ に接するなら, R の外から来て外に向かうという条件 (外部接触条件) であり, Cond.3 は, エネルギーが h の PCR3BP の解が, R_b に左から右に接するなら, R の外から来て外に向かうという条件 (方向付き外部接触条件) である.

Cond.2 や Cond.3 から, time-free な最小化曲線が対応する境界に達しないことが従うことを示すには, 非自明な議論が必要であり, 補題 1(Cond.1 を満たす任意のコンパクト凸集合内で, 任意の 2 点境界条件について, time-free な最小化曲線が存在すること) と, 補題 2(Cond.1 を満たす領域内の任意の点の十分小さな開球近傍について, 十分小さな開球内の 2 点境界条件については, time-free な最小化曲線がエネルギー h の古典解であること) を示し用いることで証明できる.

3.2 PER3BP の遷移軌道が存在するための十分条件 (主結果)

主結果. $h > \max_{t \in (0, 2\pi]} E_\mu^E(t, L_1) = -\frac{1}{1+e} V_\mu(L_1)$ について, Lagrange 点 $L_1 = ({}^t(x_e, 0), \mathbf{0})$ を中心とする長方形領域 $R = [x_e - c, x_e + c] \times [-k, k] \subset \mathbb{R}^2$ で, 次の Cond.1(L-PER3BP) を満たすものが存在するとする.

Cond.1(L-PER3BP)

$$\forall z \in R, h + \frac{1}{1+e} V_\mu(z) > \frac{1}{2} |z - {}^t(x_e, 0)|^2.$$

このとき, 任意の $z_S \in R_l$ と $z_G \in R_r$ について, $\mathcal{A}_\mu^{E,h}(c_*^{T*}) = \inf\{\mathcal{A}_\mu^{E,h}(c^T) \mid c^T \in \sqcup_{T>0} \mathcal{C}_{z_S \rightarrow z_G}^T(R)\}$ が成り立つような, $T_* > 0$ と $c_*^{T*} \in \mathcal{C}_{z_S \rightarrow z_G}^{T_*}(R)$, すなわち time-free な最小化曲線が存在する. さらに, この T_* と, R について, 次の Cond.2・3(L-PER3BP) が成り立つとする.

Cond.2(L-PER3BP)

$$\forall t \in (0, 2\pi], \forall \mathbf{z} \in R_l \cup R_r,$$

$$8 \left(h + \left\lceil \frac{T_*}{2\pi} \right\rceil \Delta E + \frac{1}{1 + e \cos t} V_\mu(\mathbf{z}) \right) < \left(\frac{1}{1 + e \cos t} \right)^2 (\partial_x V_\mu(\mathbf{z}))^2,$$

Cond.3(L-PER3BP)

$$\forall t \in (0, 2\pi], \forall \mathbf{z} \in R_b,$$

$$8 \left(h - \left\lceil \frac{T_*}{2\pi} \right\rceil \Delta E + \frac{1}{1 + e \cos t} V_\mu(\mathbf{z}) \right) > \left(\frac{1}{1 + e \cos t} \right)^2 (\partial_y V_\mu(\mathbf{z}))^2.$$

ただし, ΔE は, 次のように定義した.

$$\Delta E := \left(\frac{1}{1 - e} - \frac{1}{1 + e} \right) \max_{\mathbf{z} \in R} V_\mu(\mathbf{z}).$$

最後に, T_* と, ある $z_S \in R_l$ と $z_G \in R_r$ について, 次の Cond.4(L-PER3BP) が成り立つなら, $c_*^{T_*}$ は, R 内で z_S から z_G へ至るような, 終端エネルギーが h の PER3BP の解, すなわち遷移軌道である.

Cond.4(L-PER3BP)

$$\inf_{c^{T_*} \in \mathcal{C}_{z_S \rightarrow z_G}^{T_*}(R)} \mathcal{A}_\mu^{E,h}(c^{T_*}) < \inf_{\tilde{c}^{T_*} \in \mathcal{T}_{z_S \rightarrow z_G}^{T_*}(R)} \mathcal{A}_\mu^{E,h}(\tilde{c}^{T_*}).$$

ただし, $\mathcal{T}_{z_S \rightarrow z_G}^T(R)$ は, 次のように定義した.

$$\mathcal{T}_{z_S \rightarrow z_G}^T(R) := \{ \tilde{c}^T \in \mathcal{C}_{z_S \rightarrow z_G}^T(R) \mid \exists t \in (0, T) \text{ s.t. } \tilde{c}^T(t) \in R_t \}.$$

□

この主結果においても, 先の定理と同様に R を Cond.1 を満たすコンパクト凸集合としてとることは, time-free な最小化曲線が存在するために本質的な仮定であり, Cond.2~4 は, この最小化曲線が対応する境界に達さないことを保証する条件である.

先の PCR3BP の場合と異なり, PER3BP は非自励系であり, エネルギー固定条件ではなく, 終端エネルギー固定条件を考えているため, この場合の Cond.2 と Cond.3 は, 終端エネルギーが h の PER3BP の解に対する外部接触条件を課す必要がある. そこで, 終端エネルギーが h の PER3BP の解の取りうるエネルギー範囲を評価し, その範囲内の任意のエネルギー値で接する場合に対する外部接触条件を満たすという条件を課したのが, 主結果の Cond.2 と Cond.3 である.

また, この場合にも, Cond.2 や Cond.3 から, time-free な最小化曲線が対応する境界に達しないことが従うことを示すには, 非自明な議論が必要であり, 補題 3(Cond.1 を満たす任意のコンパクト凸集合内で, 任意の 2 点境界条件について, time-free な最小化曲線が存在すること) と, 補題 4(Cond.1 を満たす領域内の任意の点の十分小さな開球近傍について, 十分小さな開球内の 2 点境界条件については, time-free な最小化曲線が終端エネルギー h の古典解であること) を示し用いることで証明できる. ただし, 補題 4 の条件を満たすような 2 点境界条件についての time-free な最小化曲線 (補題 3 で存在が保障される) の所要時間が, 今の time-free な最小化曲線の所要時間より十分小さくできることに注意する必要がある.

4 等質量系 ($\mu = \frac{1}{2}$) への適用例 (数値計算結果)

PCR3BP

$$L_1 = (0, 0), E_{\frac{1}{2}}^C(L_1) = -2.$$

次のエネルギーについて,

$$h = -1.85 > -2,$$

L_1 中心の長方形領域 $R = [-c, c] \times [-k, k] \subset \mathbb{R}^2$ を次のようにとって,

$$c = 0.072, k = 0.134,$$

Cond.1~3 を満たし, R の左下に \mathbf{z}_S , 右下に \mathbf{z}_G をとって, Cond.4 を満たすことが数値的に確かめられた.

PER3BP

$$e = 2.0 \times 10^{-4}, L_1 = (0, 0), \max_{t \in [0, 2\pi]} E_{\frac{1}{2}}^E(L_1) \approx -1.9998.$$

次のエネルギーについて,

$$h = -1.85 > -1.9998,$$

L_1 中心の長方形領域 $R = [-c, c] \times [-k, k] \subset \mathbb{R}^2$ を次のようにとって,

$$c = 0.072, k = 0.134,$$

Cond.1~3 を満たし, R の左下に \mathbf{z}_S , 右下に \mathbf{z}_G をとって, Cond.4 を満たすことが数値的に確かめられた.

※ R を選ぶ際, Cond.2・3 については予め, $\lceil \frac{T_*}{2\pi} \rceil = 1$ としておいて, T_* が実際にこの条件を満たすことを確かめた.

参考文献

- [1] 木下宙, 天体と軌道の力学, 東京大学出版会, 1998 年.
- [2] H. Poincaré, Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique, Acta Mathematica, 13:1-270, 1890; English translation: The Three-Body Problem and the Equations of Dynamics, Translated by D. Popp, Springer Cham, Switzerland, 2017.
- [3] 柴山允瑠, 重点解説 ハミルトン力学系 可積分系と KAM 理論を中心に (SGC ライブラリ 130), サイエンス社, 2016 年.
- [4] W. Koon, M. Lo, J. Marsden and S. Ross, Dynamical Systems, the Three Body Problem and Space Mission Design, Online Copy (update April 25, 2011), "https://www.cds.caltech.edu/~marsden/books/Mission_Design.html".
- [5] J. Moser, On the generalization of a theorem of Liapunov, Communications on Pure and Applied Mathematics, 11:257-271, 1958.
- [6] R. Moeckel, A variational proof of existence of transit orbits in the restricted three-body problem, Dynamical Systems, 20(1):45-58, 2005.
- [7] J. Fitzgerald and S. Ross, Geometry of transit orbits in the periodically-perturbed restricted three-body problem, Advances in Space Research, 70(1):144-156, 2022.
- [8] J. Jost (小谷元子 訳), ポストモダン解析学 原著第 3 版, 丸善出版, 2012 年.