グラスマン多様体のSAGBI基底を用いたトーリック退化

小脇修和
大阪大学大学院情報科学研究科

1　序

グラスマン多様体、旗多様体、Schubert 多様体などを対象とするトーリック退化は以前から表現論やグレブナー基底などを使って研究されている数学の重要な研究分野の一つである。その中でも matching field を用いた研究は近年盛んに行われている。特に block diagonal matching field は [6] で初めて定義され、多くの研究がなされている。定理 1 で $\ell = 2$ の block diagonal matching field については完全な解決が得られている。

定理 1 ([2, Theorem 1.3])**.** *Block diagonal matching field* $\mathcal{B}_{(a_1,\cdots,a_s),2}$ は $\mathrm{Gr}(k,n)$ のトーリック退化を生じる。

本講演では、グラスマン多様体の $\ell \geq 3$ の block diagonal matching field について完全な解決を与える。

2　SAGBI 基底とトーリック退化

n 変数多項式環 $\mathbb{K}[\mathbf{x}] = \mathbb{K}[x_1,\cdots,x_n]$ の単項式は $\mathbf{x}^{\mathbf{a}} = {x_1}^{a_1}{x_2}^{a_2}\cdots{x_n}^{a_n}$ で表され、格子点 $\mathbf{a} = (a_1,\cdots,a_n) \in \mathbb{N}^n$ と同一視される。

2.1　単項式順序

$\mathbb{N}^n$ での全順序が **単項式順序** であるとは、0 ベクトルがただ一つの最小元で、$\mathbf{a} < \mathbf{b}$ なら、任意の $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c} \in \mathbb{N}^n$ で $\mathbf{a}+\mathbf{c} < \mathbf{b}+\mathbf{c}$ となるときにいう。単項式順序が多項式環の単項式の集合における全順序を導く。

2.2　イニシャルイデアル

多項式 f の単項式順序 $<$ に関する **イニシャル単項式** とは、f の項の中で、$<$ に関して最大となるもののことをいう。与えられた単項式順序で、それぞれの 0 でない多項式 $f \in \mathbb{K}[\mathbf{x}]$ はただ一つのイニシャル単項式 $\mathrm{in}_<(f)$ を持つ。I が $\mathbb{K}[\mathbf{x}]$ のイデアルなら、**イニシャルイデアル**とは、単項式イデアル

$$\mathrm{in}_<(I) = \langle \mathrm{in}_<(f) : f \in I \rangle$$

のことである。

また、イニシャルは重みによる定義もでき、重み $\omega = (\omega_1, \cdots, \omega_n) \in \mathbb{R}^n$ を固定する。任意の多項式 $f = \sum_{\mathbf{a} \in \mathbb{N}^n} c_{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{x}^{\mathbf{a}}$(ただし、$c_{\mathbf{a}} \in \mathbb{K}$ は有限個を除いて 0) で、イニシャル $\mathrm{in}_\omega(f)$ を内積 $\omega \cdot \mathbf{a}$ が最大となるような全ての項 $c_{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{x}^{\mathbf{a}}$ の和と定義する。これは重みが最大となるものをイニシャルとするもので、イニシャルが単項式になるとは限らない。イデアル I のイニシャルイデアルは、

$$\mathrm{in}_\omega(I) = \langle \mathrm{in}_\omega(f) : f \in I \rangle$$

で定義される。

2.3 グレブナー基底

多項式環 $\mathbb{K}[\mathbf{x}]$ のイデアル I を考える。有限部分集合 $\mathcal{G} \subset I$ が I の $<$ での**グレブナー基底**であるとは、$\mathrm{in}_<(I)$ が $\{\mathrm{in}_<(g) : g \in \mathcal{G}\}$ で生成されるということである。

2.4 トーリック退化

素イデアルかつ二項式で生成されるイデアルを、トーリックイデアルという。このとき、以下の定理が知られている。

定理 2 ([3, Theorem 1.1.17])**.** V をアフィン多様体とする。このとき、V がアフィントーリック多様体であることと、V がトーリックイデアルで定義されるアフィン多様体であることは同値である。

重み ω, イデアル I を考え、イニシャルイデアル $\mathrm{in}_\omega(I)$ がトーリックイデアルなら、これを I の**トーリック退化**と呼ぶ。

2.5 SAGBI 基底

多項式環の多項式の集合 $\{f_1, \cdots, f_r\}$ が与えられた単項式順序で **SAGBI 基底** であるとは、部分代数 $\mathbb{K}[f_1, \cdots, f_r]$ のイニシャルが常にある f_i のイニシャル単項式で生成される部分代数の元になることをいう。SAGBI とは Subalgebra Analogue of Gröbner Bases for Ideals の略である。$\mathcal{F}$ を $\mathbb{K}[\mathbf{t}]$ の多項式の集合とし、R=$\mathbb{K}[\mathcal{F}]$ とする。$\mathbb{K}[\mathbf{t}]$ の単項式順序を $<$ とする。$\mathrm{in}_<(f_i) = \mathbf{t}^{\mathbf{a_i}}$ とする。別の多項式環 $\mathbb{K}[\mathbf{x}]$ を考え、環準同型 $\mathbb{K}[\mathbf{x}] \to R : x_i \mapsto f_i$ のカーネルを I とする。同様に、$\mathbb{K}[\mathbf{x}] \to \mathrm{in}_<(R) : x_i \mapsto \mathrm{in}_<(f_i)$ のカーネルを $I_{\mathcal{A}}$ とすると、$I_{\mathcal{A}}$ はトーリックイデアルとなる。ω を $<$ を表現する重みとし、$\mathcal{A}^T\omega$ を $\mathbb{K}[\mathbf{x}]$ の重みとする。ただし、$\mathcal{A}$ は、$\mathrm{in}_<(f_i)$ に対応する $a_i \in \mathbb{N}^n$ を列ベクトルとする整数行列である。このとき、以下が成り立つ。

定理 3 ([7, Theorem11.4])**.** 集合 $\mathcal{F}$ が SAGBI 基底であることと $\mathrm{in}_{\mathcal{A}^T\omega}(I) = I_{\mathcal{A}}$ となる

ことは同値である。

3 プリュッカー代数

$[n] := \{1, ..., n\}$ とし、$[n]$ の中から k 個取り出した部分集合の族を $\mathbf{I}_{k,n}$ とする。

3.1 プリュッカーイデアル

プリュッカーイデアル $\mathcal{I}_{k,n}$ は環準同型

ψ: $\mathbb{K}[P_I] \to \mathbb{K}[x_{ij}]$

$P_I \mapsto \det(X_I)$

のカーネルとして定義される。ただし、$\mathbb{K}[P_I | I \in \mathbf{I}_{k,n}]$ は $\binom{n}{k}$ 変数、$\mathbb{K}[x_{i,j} | 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq n]$ は nk 変数 の多項式環であり、X_I は (i, j) 成分が $x_{i,j}$ となる $k \times n$ 行列から、I に含まれる番号の列のみを取り出したものである。

プリュッカー代数 $A_{k,n}$ は有限生成代数 $\psi(\mathbb{K}[P_I])$ として定義される。

プリュッカー座標は、小行列式 $\det(X_I)(I \in \mathbf{I}_{k,n})$ の集合であり、ψ を通して、P_I と同一視される。

3.2 グラスマン多様体

n 次元空間の k 次元部分空間全てで構成される多様体を **グラスマン多様体**$\mathrm{Gr}(k, n)$ という。プリュッカー代数はグラスマン多様体の斉次座標環として知られている [5, Proposition 14.2]。

3.3 Matching field

$k \times n$ **matching field** は写像 Λ:$\mathbf{I}_{k,n} \to S_k$ のことである (S_k は対称群)。このような matching field を $\mathrm{Gr}(k, n)$ の matching field と呼ぶことにする。

Matching field の例として、 $\Lambda(I) = \mathrm{id}(\forall I \in \mathbf{I}_{k,n})$ がある。この matching field を **diagonal matching field** という。

行列が matching field を誘導するとは、行列の (i, j) 成分を、$x_{i,j}$ に対応する重みとみなすと、$\det(X_I)$ から選ばれるイニシャルが、その matching field によって選ばれる項 $x_{\Lambda(I)(1)i_1} x_{\Lambda(I)(2)i_2} \cdots x_{\Lambda(I)(k)i_k}$ と、いずれの I に対しても同じになっているということである。Matching field が **coherent** であるとは、それぞれの $I \in \mathbf{I}_{k,n}$ で、

$$\mathrm{in}_M(P_I) := \mathrm{in}_M(\psi(P_I)) = x_{\Lambda(I)(1)i_1} x_{\Lambda(I)(2)i_2} \cdots x_{\Lambda(I)(k)i_k}$$

となるような $k \times n$ 行列 M が存在するときをいう。Coherent matching field を誘導する行列の 1 行目はすべて 0 としてよい。

例 1. Coherent matching field の例として、diagonal matching field があり、$k \times n$ 行列

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & M^{k-2} & 2 \times M^{k-2} & \cdots & (n-2) \times M^{k-2} & (n-1) \times M^{k-2} \end{pmatrix}$$

が diagonal matching field を誘導する ($M \geq n$)。

例えば、Gr$(3,6)$ の diagonal matching field は、$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 10 & 20 & 30 & 40 & 50 \end{pmatrix}$ で誘導される。どの 3 列を取り出しても対角成分の和が最大となっていることがわかるだろう。

3.4 Block diagonal matching field

$\mathcal{B}_{(a_1,\cdots,a_s),\ell}$($\ell, k, n$ は $1 < \ell \leq k < n$ を満たす自然数であり、$a_1, \cdots, a_s$は正の整数で $\sum_{i=1}^{s} a_i = n$ を満たす。) を Gr(k,n) の ℓ 行目以外は単調増加で、行ごとの差は十分大で、ℓ 行目は s 個のブロックに分かれていて、ブロックサイズが $a_1, \cdots, a_s$ になっている行列から誘導される matching field と定義する。ブロックとは、行列の ℓ 行目が $\cdots b_{a_{i-1}} > c_1 < c_2 < \cdots < c_{a_i} > d_1 \cdots$ となっているとき、$c_1, \cdots, c_{a_i}$ のように単調増加になっている列を集めたものをいう。このような ℓ 行目のみブロックでの単調増加、残りが単純な単調増加な matching field $\mathcal{B}_{(a_1,\cdots,a_s),\ell}$ を **(s-)block diagonal matching field** という。ブロックサイズは一つのブロックに入っている列の個数を言い、この例では a_i である。具体的な行列の形は以下のとおりである。

定義 1. 一般に、Gr(k,n) の $\mathcal{B}_{(a_1,\cdots,a_s),\ell}$ を誘導する行列は、

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (n-a_1) \times L^{\ell-2} & (n-a_1+1) \times L^{\ell-2} & (n-a_1+2) \times L^{\ell-2} & \cdots & (a_n-2) \times L^{\ell-2} & (a_n-1) \times L^{\ell-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & L^{k-2} & 2 \times L^{k-2} & \cdots & (n-2) \times L^{k-2} & (n-1) \times L^{k-2} \end{pmatrix}$$

上の行列の L は下の行の差が上の行の差より十分大きくなるように n 以上の数から適当にとる。この定義の block diagonal matching field の $\ell = 2$ のものは、先行研究 [1][6] での定義の block diagonal matchingfield と一致する。

例 2. Gr$(3,6)$ で考えよう。$\mathcal{B}_{(2,4),2}$ は、

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 10 & 20 & 30 & 40 & 50 \end{pmatrix}$$

という行列から誘導される matching field であり、これは、

$\mathcal{B}_{(2,4),2}(I) = \begin{cases} (12) & (I \cap \{1,2\} = 1) \\ \mathrm{id} & (\text{それ以外}) \end{cases}$ である。

3.5 Matching field イデアル

Matching field を Λ とすると、**matching field イデアル** $\mathcal{I}_\Lambda \subset \mathbb{K}[x_{ij}]$ は、写像
$\phi_\Lambda : \mathbb{K}[P_I] \to \mathbb{K}[x_{ij}]$

$P_I \mapsto x_{\Lambda(I)(1)i_1} x_{\Lambda(I)(2)i_2} \cdots x_{\Lambda(I)(k)i_k}$

（ただし、$I = \{i_1, \cdots, i_k\}$ とする。）
のカーネルだ。このイデアルはトーリックイデアルとなっている。

4 主定理

次の二つの定理は本講演の主結果である。

定理 4. $\ell \geq 4$,$a_s \geq 2$ とする。$\mathrm{Gr}(k,n)$ で、*block diagonal matching field* $\mathcal{B}_{(a_1,\cdots,a_s),\ell}$ を考える。プリュッカー座標が *SAGBI* 基底になる必要十分条件は、$a_1 \leq 4$ かつ、$a_i \geq 4 (2 \leq i \leq s-1) \Rightarrow k+1 \geq \sum_{t=i}^{s} a_t$ である。

定理 5. $\mathrm{Gr}(k,n)$ で、*block diagonal matching field* $\mathcal{B}_{(a_1,\cdots,a_s),3}$ を考えると、プリュッカー座標は常に *SAGBI* 基底になる。

例 3. 4×8 行列 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 10 & 20 & 30 & 40 & 50 & 60 & 70 \\ 200 & 300 & 400 & 500 & 600 & 700 & 0 & 100 \end{pmatrix}$ が誘導する block diagonal matching field $\mathcal{B}_{(6,2),4}$ を考える。これは $a_1 \geq 5$ なので定理 4 よりプリュッカー座標は SAGBI 基底にならない。

例 4. 4×8 行列

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 10 & 20 & 30 & 40 & 50 & 60 & 70 \\ 500 & 600 & 700 & 300 & 400 & 0 & 100 & 200 \end{pmatrix}$$

が誘導する block diagonal matching field $\mathcal{B}_{(3,2,3),4}$ でプリュッカー座標は SAGBI 基底になる。事実 $\forall i$ で $a_i \leq 3$ なので定理 4 よりプリュッカー座標が SAGBI 基底になる。

参考文献

[1] Oliver Clarke and Fatemeh Mohammadi, Toric degenerations of Grassmannians and Schubert varieties from matching field tableaux. J. Algebra 559 (2020), 646–678.

[2] Oliver Clarke, Fatemeh Mohammadi and Francesca Zaffalon, Toric degenerations of partial flag varieties and combinatorial mutations of matching field polytopes. arXiv:2206.13975

[3] David A.Cox, John B.Little and Henry K Schenck, Toric varieties. Graduate Studies in Mathematics, 124. American Mathematical Society, Providence, RI, 2011.

[4] Akihiro Higashitani and Hidefumi Ohsugi, Quadratic Gröbner bases of block diagonal matching field ideals and toric degenerations of Grassmannians. J. Pure Appl. Algebra 226 (2022), no. 2, Paper No. 106821, 14 pp.

[5] Ezra Miller and Bernd Sturmfels, Combinatorial commutative algebra. Graduate Texts in Mathematics, 227. Springer-Verlag, New York, 2005.

[6] Fatemeh Mohammadi and Kristin Shaw, Toric degenerations of Grassmannians from matching fields. Algebr. Comb. 2 (2019), no. 6, 1109–1124.

[7] Bernd Sturmfels, Gröbner bases and convex polytopes. University Lecture Series, 8. American Mathematical Society, Providence, RI, 1996.