グラフの有限集合を生成する禁止条件

東京理科大学　大学院理学研究科　応用数学専攻
小谷崇文 (Takafumi KOTANI) *

概要

グラフの族 $\mathcal{H}$ に対して, グラフ G が $\mathcal{H}$ のどのグラフも誘導部分グラフとして含まないとき, グラフ G は $\mathcal{H}$-free であるといい，この $\mathcal{H}$ を G の禁止部分グラフという．本研究は，最小次数が 4 以上の $\mathcal{H}$-free グラフ全体が有限集合を成すような族 $\mathcal{H}$ を調べた．本講演では，研究背景とともに，その結果を紹介する．

1　導入

1.1　グラフ

$E \subseteq \binom{V}{2}$ のとき，V と E の組 (V, E) を，V を**頂点集合**，E を**辺集合**とする**無向単純グラフ**といい，V の要素を**点**または**頂点**，E の要素を**辺**と呼ぶ．また，$|V|$ も $|E|$ も有限のとき，(V, E) は**有限グラフ**という．本講演では，有限無向単純グラフのみを扱うので，有限無向単純グラフのことを単に**グラフ**と呼ぶことにする．(図 1 のように，頂点と辺で構成される図形がグラフである．)

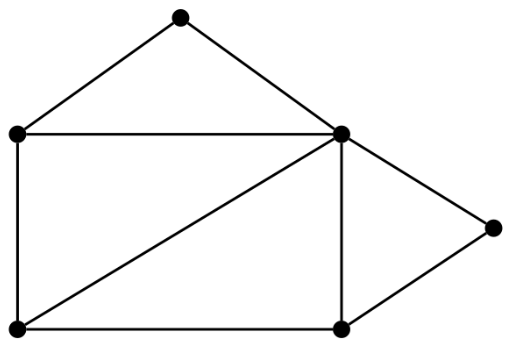

図 1　グラフの例

グラフ G の頂点集合は $V(G)$，辺集合は $E(G)$ で表される．また，$|V(G)|$ はグラフ G の**位数**と呼ぶ.

* E-mail:kotani.graph0518@gmail.com

1.2　近傍，次数

辺の端点は，その辺に**接続する**といい，辺は端点に**接続する**という．共通の辺に接続する 2 つの頂点は**隣接する**といい，共通の頂点に接続する 2 本の辺は**隣接する**という．隣接する 2 つの頂点に対して，片方はもう一方の**近傍**であるという．グラフ G における頂点 v の近傍の集合を $N_G(v)$ と書く．グラフ G の頂点 v に対して，v の近傍の個数を，G における v の**次数**といい，$d_G(v)$ と書く（つまり，$d_G(v) = |N_G(v)|$）．次数が 0 の頂点を**孤立点**という．$\delta(G) := \min\{d_G(x) \mid x \in V(G)\}$ は G の**最小次数**，$\Delta(G) := \max\{d_G(x) \mid x \in V(G)\}$ は G の**最大次数**と呼ばれる．

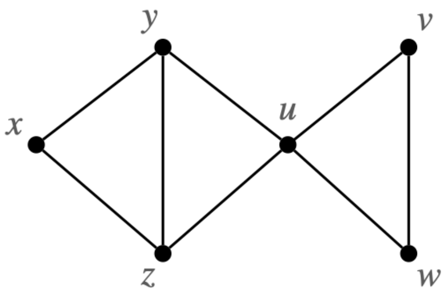

図 2　グラフ G

図 2 のグラフ G の場合，$d_G(x) = 2, d_G(u) = 4, \delta(G) = 2, \Delta(G) = 4$ である．

1.3　特別なグラフ

頂点を一列に並べたとき，連続する頂点が隣接し，連続しない頂点が隣接しないようにできるグラフを**道**といい，n 頂点の道を P_n で表す．位数が 3 以上で，頂点を円周上に並べたとき，連続する頂点が隣接し，連続しない頂点が隣接しないようにできるグラフを**閉路**といい，n 頂点の閉路を C_n で表す．どの 2 頂点も隣接するグラフを**完全グラフ**といい，n 頂点の完全グラフを K_n で表す．どの辺も 2 つの異なる集合の間に存在するように，V を 2 個の集合に分割できるグラフを**二部グラフ**という．また，異なる分割集合に属するどの 2 頂点も隣接しているとき，**完全二部グラフ**といい，m 頂点と n 頂点に分割される完全二部グラフを $K_{m,n}$ で表す．

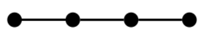

図 3　道 P_4

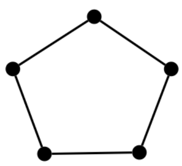

図 4　閉路 C_5

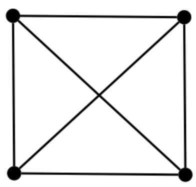

図 5　完全グラフ K_4

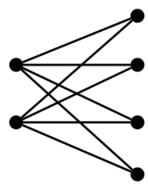

図 6　完全二部グラフ $K_{2,4}$

1.4　道，距離，直径

P を道とする．$V(P) = \{x_0, x_1, ..., x_l\}$，$E(P) = \{x_0x_1, x_1x_2, ..., x_{l-1}x_l\}$ のとき，$P = x_0x_1x_2, ..., x_l$ と表す．x_0, x_l を P の**端点**といい，x_0 と x_l は P によって**結ばれている**という．整数 l は道 P の**長さ**という．x と y を端点とするような道を ***x*-*y* 道**という．図 7 のグラフ G の場合，図 8 の P は，G の y-v 道である．また，P は長さ 4 の道である．

G の 2 頂点 x, y に対して, G の最短の x-y 道の長さを, G における x と y の**距離**といい, $\mathrm{dist}_G(x, y)$ と書く．G に x-y 道が存在しないとき，$\mathrm{dist}_G(x, y) := \infty$ とする．任意の G の 2 頂点間の距離の最大値を G の**直径**といい，$\mathrm{diam}(G)$ と書く．図 7 のグラフ G の場合，$\mathrm{dist}_G(x, v) = 2, \mathrm{diam}(G) = 2$ である．

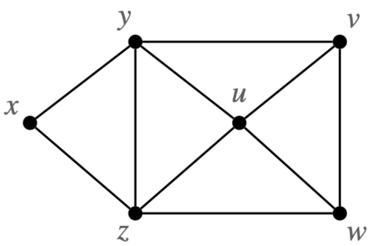

図 7　グラフ G

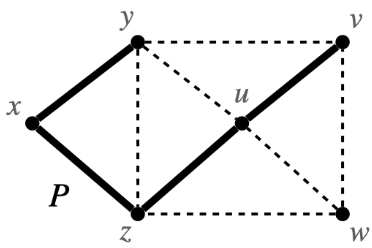

図 8　グラフ G の道 P

1.5　部分グラフ，誘導部分グラフ

$G = (V, E), G' = (V', E')$ をグラフとする．$V' \subseteq V$ かつ $E' \subseteq E$ であるとき，G' は G の**部分グラフ**といい，$G' \subseteq G$ で表すことにする．$G' \subseteq G$ かつ G' が任意の $x, y \in V'$ に対して $xy \in E$ となる辺をすべて含むとき，G' は G の**誘導部分グラフ**といい，$G' \prec G$ で表すことにする．

グラフ G の誘導部分グラフは，頂点部分集合 $U \subseteq V$ だけで一意的に決まる．U で誘導される部分グラフを $G[U]$ で表すことにする．

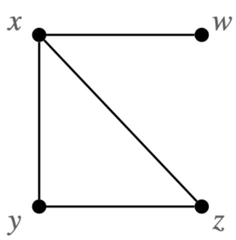

図 9　グラフ G

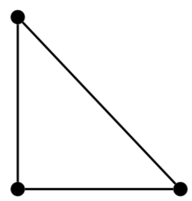

図 10　G の誘導部分グラフの例

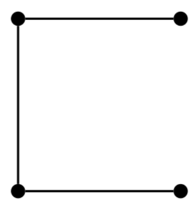

図 11　G の誘導部分グラフではない例

連結グラフの 2 つの族 $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ について，各 $H_2 \in \mathcal{H}_2$ に対して，$H_1 \prec H_2$ となる $H_1 \in \mathcal{H}_1$ が存在するとき，$\mathcal{H}_1 \leq \mathcal{H}_2$ と書く．

1.6　連結，k-連結

$G = (V, E)$ を空でないグラフとする．G の任意の 2 頂点間に道が存在するとき，G は**連結グラフ**といい，そうでないときには，G は**非連結グラフ**という．また，G の極大な連結部分グラフを，G

の**連結成分**という．ただし，連結成分は常に空でないものとする．図 12 が連結グラフの例，図 13 が非連結グラフの例である．

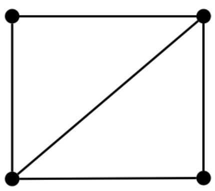

図 12　連結グラフの例

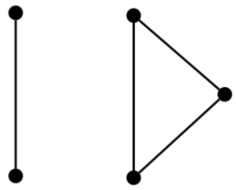

図 13　非連結グラフの例

$|V(G)| > k, |X| < k$ である集合 $X \subseteq V$ に対して，$G - X (:= G[V \setminus X])$ が連結であるとき，G は ***k*-連結**であるという．つまり，k-連結グラフとは，どの k 未満個の頂点を取り除いても連結なグラフのことである．k-連結グラフは最小次数が k 以上になることに注意する（理由は省略する）．図 14 のグラフは，どの 1 点を取り除いても連結であるので，2-連結グラフであるが，図 15 のグラフは，頂点 u を取り除くと連結ではなくなるので，2-連結グラフではない．

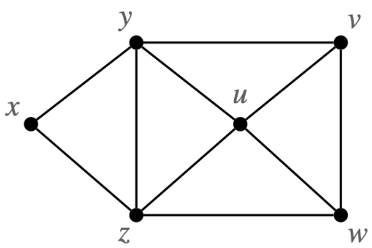

図 14　2-連結グラフの例

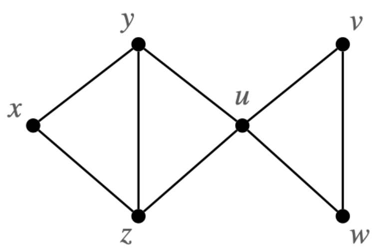

図 15　2-連結グラフではない例

2　禁止部分グラフとその研究

2 つのグラフ G, H に対して，$H \not\prec G$ とき，G は ***H*-free** であるといい，H は G の**禁止部分グラフ**という．グラフ G とグラフの族 $\mathcal{H}$ に対して，G が任意の $H \in \mathcal{H}$ に対しても H-free であるとき，G は **$\mathcal{H}$-free** であるという．

与えられた連結グラフの族 $\mathcal{H}$ について，$\mathcal{H}$-free グラフの性質を調べる研究は，**禁止部分グラフの研究**と呼ばれる．禁止部分グラフの研究は，グラフ理論の様々なテーマで進められている．この章では，ハミルトン閉路や完全マッチングにおける禁止部分グラフの研究を紹介する．（ハミルトン閉路や完全マッチング以外にも様々なテーマで禁止部分グラフの研究が行われている．）

2.1　ハミルトン閉路

グラフの全ての頂点を含む閉路は，**ハミルトン閉路**と呼ばれ，ハミルトン閉路を含むグラフは**ハミルトングラフ**と呼ばれる．ハミルトン閉路の例は図 16,17 のとおりである．

ハミルトン閉路に関して長年多くの研究が行われている．十分条件について次の古典的な結果が知られている．

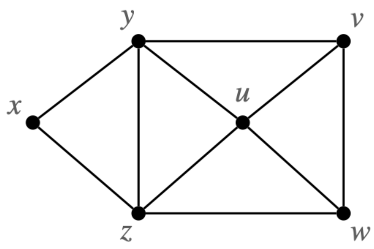

図 16　グラフ G

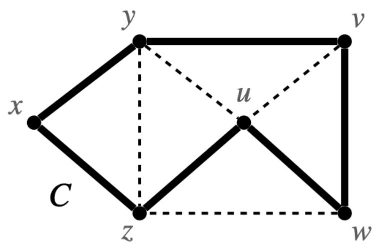

図 17　グラフ G のハミルトン閉路 C

Theorem 2.1 (G. A. Dirac. [2]). 頂点数 $n \geq 3$ で，最小次数が $\frac{n}{2}$ 以上である任意のグラフはハミルトン閉路を持つ．

この定理は最小次数条件について最良であり，各奇数 $n \geq 3$ について，位数 n, 最小次数が $\frac{n-1}{2}$, かつ，ハミルトン閉路を持たないグラフが存在するが，Matthews と Sumner は次を示した．

Theorem 2.2 (M. M. Matthews and D. P. Sumner. [13]). 頂点数 $n \geq 3$ で，最小次数が $\frac{1}{3}(n-2)$ 以上である任意の 2-連結 $K_{1,3}$-*free* グラフはハミルトン閉路を持つ．

このように，ハミルトン閉路に関して，禁止部分グラフの研究を行うことで，より多くの知見を得ることができる．

Bedrossian によって，次が示された．

Theorem 2.3 (P. Bedrossian. [1]). 2 の連結グラフ H_1, H_2 とする．任意の 2-連結 $\{H_1, H_2\}$-*free* グラフはハミルトン閉路を持つための必要十分条件は，次のいずれかを満たすことである．

(*i*) $\{H_1, H_2\} \leq \{K_{1,3}, Net\}$
(*ii*) $\{H_1, H_2\} \leq \{K_{1,3}, W\}$
(*iii*) $\{H_1, H_2\} \leq \{K_{1,3}, P_6\}$

この定理により，2-連結グラフにハミルトン閉路を保証する禁止部分グラフのペアが決定された．ところが，Faudree らにより，次のことが示された．

Theorem 2.4 (R.J. Faudree, R.J. Gould, Z. Ryjàček and I. Schiermeyer. [8]). 2-連結 $\{K_{1,3}, Z_3\}$-*free* グラフは，有限個の例外を除き，ハミルトン閉路を持つ．

「2-連結 $\{K_{1,3}, Z_3\}$-free グラフはハミルトン閉路を持つ.」という命題は，反例があるため成立しないが，反例が有限個しかないので，$\{K_{1,3}, Z_3\}$ はハミルトン閉路のための禁止条件と見なして良いと言える．

Faudree と Gould により，次の特徴づけを得た．

Theorem 2.5 (R.J. Faudree and R.J. Gould. [9]). 2 の連結グラフ H_1, H_2 とする．任意の 2-連結 $\{H_1, H_2\}$-*free* グラフはハミルトン閉路を持つための必要十分条件は，有限個の例外を除き，次のいずれかを満たすことである．

(i) $\{H_1, H_2\} \le \{K_{1,3}, Net\}$
(ii) $\{H_1, H_2\} \le \{K_{1,3}, W\}$
(iii) $\{H_1, H_2\} \le \{K_{1,3}, P_6\}$
(iii) $\{H_1, H_2\} \le \{K_{1,3}, Z_3\}$

このように，有限個の例外を認めることにより，ハミルトン閉路に関して，より多くの知見を得ることができる．したがって，禁止部分グラフの研究においては，有限個の例外を認めることがある．

2.2 完全マッチング

グラフ中の辺の集合で、互いに端点を共有しないもののことを**マッチング**と呼ぶ．また，グラフ上の全ての頂点が、マッチング中のいずれかの辺の端点になっているとき、そのマッチングを**完全マッチング**と呼ぶ．完全マッチングの例は図 18,19 のとおりである．

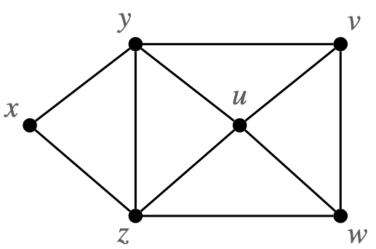

図 18　グラフ G

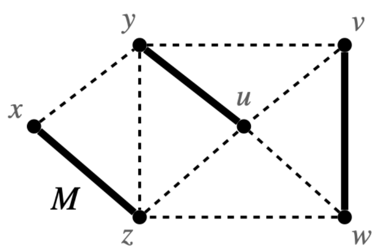

図 19　グラフ G の完全マッチング M

グラフに完全マッチングが存在するための必要十分条件が知られているが，ここでは割愛することにする．一般に偶位数の連結グラフで完全マッチングを持たないグラフは無数に存在する．しかし，Sumner によって，次のことが示された．

Theorem 2.6 (D. P. Sumner. [17])**.** 偶位数の連結 $K_{1,3}$-*free* グラフは完全マッチングを持つ．

このように，完全マッチングの研究においても，禁止部分グラフの研究により，より多くの知見が得られる．

Saito らは次のことを示した．

Theorem 2.7 (M. D. Plummer and A. Saito. [16])**.** 位数 3 以上の連結グラフ H に対して，偶位数の連結 H-*free* グラフが完全マッチングを持つならば，$H = K_{1,3}$ または $H = K_{1,2}$ である．

これらの 2 つの結果により，1 個のグラフを禁止することで完全マッチングの存在を保証する禁止部分グラフが決定された．

Fujita ら [11] によって，2 個のグラフを禁止することで完全マッチングの存在を保証する禁止部分グラフの組が決定された．

その後，Ota と Sueiro[15] により，完全マッチングの存在を保証する禁止部分グラフの組が完全決定された．

3　有限集合を生成する禁止部分グラフ条件

3.1　定義

整数 $k \geq 1$ とグラフの族 $\mathcal{H}$ に対して, $\mathcal{G}_k$ (resp. $\mathcal{G}^{(k)}$) は k-連結グラフ (resp. 最小次数 k 以上のグラフ) 全体の集合を表し, $\mathcal{G}_k(\mathcal{H})$ (resp. $\mathcal{G}^{(k)}(\mathcal{H})$) は $\mathcal{G}_k$(resp.$\mathcal{G}^{(k)}$)) に属する $\mathcal{H}$-free グラフ全体の集合を表す．さらに，整数 $k, l \geq 1$ とグラフの族 $\mathcal{H}$ に対して, $\mathcal{G}_k^{(l)}$ は 最小次数 l 以上の k-連結グラフ全体の集合を表し, $\mathcal{G}_k^{(l)}(\mathcal{H})$ は $\mathcal{G}_k^{(l)}$ に属する $\mathcal{H}$-free グラフ全体の集合を表す.

$$\mathcal{G}_k(\mathcal{H}) := \{G \mid G \text{ は } k\text{-連結 } \mathcal{H}\text{-free グラフ }\}$$
$$\mathcal{G}^{(k)}(\mathcal{H}) := \{G \mid G \text{ は最小次数 } k \text{ 以上の } \mathcal{H}\text{-free グラフ }\}$$
$$\mathcal{G}_k^{(l)}(\mathcal{H}) := \{G \mid G \text{ は最小次数 } l \text{ 以上の } k\text{-連結 } \mathcal{H}\text{-free グラフ }\}$$

n を $n > 2$ の整数, $P = x_1x_2...x_n$ を位数 n の道, $y_1, y_2, ..., y_m, z_1, z_2, ..., z_m$ を $x_1, ..., x_n$ とは異なる $2m$ 個の頂点とする. Y_n^m, Y_n^{m*} を次のように定めるグラフとする:

$V(Y_n^m) = V(P) \cup \{y_1, y_2, ..., y_m\}$, $V(Y_n^{m*}) = V(P) \cup \{y_1, y_2, ..., y_m, z_1, z_2, ..., z_m\}$,
$E(Y_n^m) = E(P) \cup \{x_1y_1, x_1y_2, ..., x_1y_m\}$, and
$E(Y_n^{m*}) = E(P) \cup \{x_1y_1, x_1y_2, ..., x_1y_m, x_nz_1, x_nz_2, ..., x_ny_m\}$.

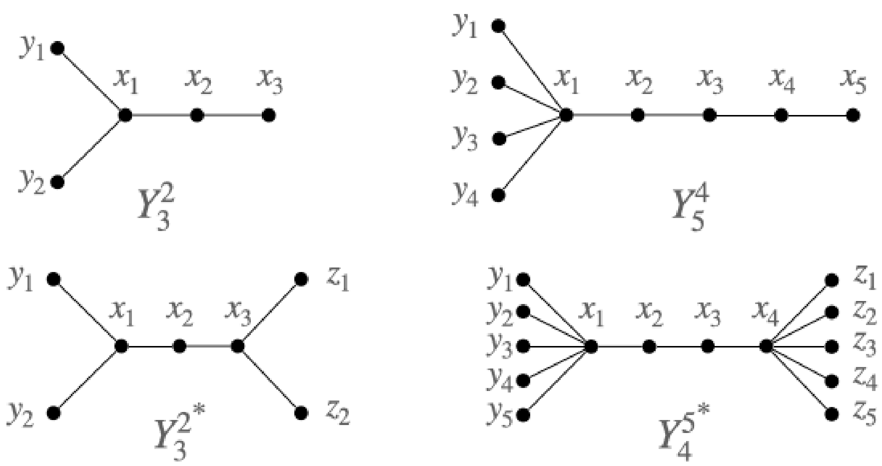

図 20　グラフ Y_3^2, Y_5^4, Y_3^{2*} and Y_4^{5*}

Y' は図 21 のグラフを表すものとする.

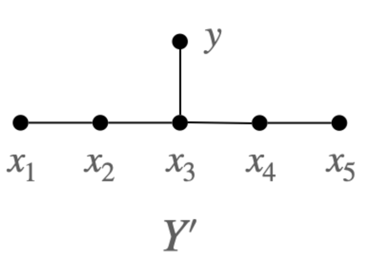

図 21　グラフ Y'

3.2 研究目的・背景

本研究の目的は

$$|\mathcal{H}| = 3 \text{ かつ } \mathcal{G}^{(4)}(\mathcal{H}) \text{ が有限} \tag{1.1}$$

の条件を満たす連結グラフの族 $\mathcal{H}$ の特徴づけである．$\mathcal{H}$ に位数 2 の完全グラフが属するとき， 明らかに $\mathcal{G}^{(4)}(\mathcal{H})$ が有限である．したがって， $\mathcal{H}$ に属するグラフが位数 3 以上であると仮定してよい．

ハミルトン閉路の例でも見たように，禁止部分グラフの研究では，有限個の例外を認めることで，より多くの知見が得られる．つまり，禁止部分グラフの研究では，次のような命題を調べる．

- 任意の k-連結 $\mathcal{H}$-free グラフは，有限個の例外を除いて，性質 P を満たす．

しかし，このような研究の方法には 1 つ落とし穴がある．$\mathcal{G}_k(\mathcal{H})$ が有限になったと仮定すると，任意の性質 P に対して，$\mathcal{G}_k(\mathcal{H})$ の要素全てを例外に設定することで，上記の命題は常に真となる．P に依存せず命題が真となるので，$\mathcal{H}$ は禁止部分グラフとして特定の性質 P に何ら知見を与えない．このような $\mathcal{H}$ は禁止部分グラフの研究の雑音となってしまうため，前もってそのような $\mathcal{H}$ を特定しておく必要がある．

このような背景の下，有限集合を生成する禁止部分グラフ条件の研究が始まった．この研究は，

$$\mathcal{G}_k(\mathcal{H}) \text{ が有限} \tag{1.2}$$

の条件を満たす連結グラフの族 $\mathcal{H}$ の特徴づけを行う．この研究は [10] から始まり，$1 \leq k \leq 6$ かつ $|\mathcal{H}| \leq 2$ の場合と，$(k, |\mathcal{H}|) = (2, 3)$ の場合に対する (1.2) を満たす族 $\mathcal{H}$ の特徴づけがなされた．

$(k, |\mathcal{H}|) = (3, 3)$ の場合に対する (1.2) を満たす族 $\mathcal{H}$ の必要条件が [3] で示され, 十分条件についてもさまざま研究されている ([3, 4, 7]) が，現在も特徴付けには至っていない．

禁止部分グラフの研究では，次のような命題もよく扱う．

- 任意の最小次数が k 以上の $\mathcal{H}$-free グラフは，有限個の例外を除いて，性質 P を満たす．

よって，3-連結グラフを最小次数 3 以上のグラフに置き換えたものを考えることは自然である．したがって，

$$\mathcal{G}^{(l)}(\mathcal{H}) \text{ が有限} \tag{1.3}$$

の条件を満たす連結グラフの族 $\mathcal{H}$ の特徴づけの研究が始まった．

$(k, |\mathcal{H}|) = (3, 3)$ の場合に対する (1.2) を満たす族 $\mathcal{H}$ の特徴づけには程遠いという状況だが，連結条件を最小次数条件に緩和したことで，問題の見通しが改善され，[5] で，$\{K_3, K_{2,2}\} \subseteq \mathcal{H}$ の場合を除いて，$(l, |\mathcal{H}|) = (3, 3)$ の場合に対する (1.3) を満たす族 $\mathcal{H}$ の特徴づけが得られるまでに至った．

最近，$(k, |\mathcal{H}|) = (4, 3)$ の場合に対する (1.2) を満たす族 $\mathcal{H}$ の必要条件が [14] で示された．$(k, |\mathcal{H}|) = (3, 3)$ の場合と同様に，この研究も特徴づけには至っていない．

本研究では，これまでと同様に，連結度条件を最小次数条件に置き換えることを考えたい．よって，本研究では，$(l, |\mathcal{H}|) = (4, 3)$ の場合に対する (1.3) を満たす族 $\mathcal{H}$ の特徴づけを目的とする．つまり，

$$|\mathcal{H}| = 3 \text{ かつ } \mathcal{G}^{(4)}(\mathcal{H}) \text{ が有限}$$

の条件を満たす連結グラフの族 $\mathcal{H}$ の特徴づけを目的とする．

3.3 主結果

主結果を述べる前に，(3.2) のための基本的な必要条件を紹介しておく．

Lemma 3.1 (Fujisawa, Plummer and Saito. [7])**.** 位数が 3 以上のグラフの族 $\mathcal{H}$ に対して, $\mathcal{G}_4(\mathcal{H})$ が有限のとき，ある整数 l, m, n $(l \geq 3, n \geq m \geq 1, m \leq 4)$ に対して，$\{K_l, K_{m,n}\} \subseteq \mathcal{H}$.

$\mathcal{G}^{(4)}(\mathcal{H}) \supseteq \mathcal{G}_4(\mathcal{H})$ であるから，Lemma 3.1 により，整数 l, m, n $(l \geq 3, n \geq m \geq 1, m \leq 4)$ と連結グラフ T に対する $\mathcal{G}^{(4)}(K_l, K_{m,n}, T)$ の有限性を確認すれば十分である．

[12] で，$\mathcal{G}^{(4)}(K_l, K_{1,n}, T)$ の有限性について，$l = 4, 3 \leq n \leq 4$ の場合を除いて，特徴づけが得られた．したがって，本研究では，$\mathcal{G}^{(4)}(K_l, K_{2,n}, T), \mathcal{G}^{(4)}(K_l, K_{3,n}, T), \mathcal{G}^{(4)}(K_l, K_{4,n}, T)$ の有限性を調べる．また，$\{K_3, K_{2,2}\} \subseteq \mathcal{H}, \{K_3, K_{2,3}\} \subseteq \mathcal{H}$ の場合は，難しくなると予想されるので，ひとまずこれらの場合は除外して考えることにする．

本研究で得られた結果は次のとおりである．

Theorem 3.2. *l, n を $l \geq 3, n \geq 2$, $(l, n) \neq (3, 2), (3, 3)$ となる整数とし, T を位数 3 以上の連結グラフとする. $\mathcal{G}^{(4)}(\{K_l, K_{2,n}, T\})$ が有限のとき, 次のいずれかが成立する:*

(i) $4 \leq l \leq 5$, $n \geq 2$ and $T \prec P_6$;
(ii) $l = 3$, $n = 4$, and $T \prec Y_4^{3*}$, $T \prec Y_3^{3*}$, $T \prec Y_2^{2*}$, $T \prec Y'$;
(iii) $l = 3$, $n \geq 5$, and $T \prec Y_3^{2*}$ or $T \prec Y_2^{2*}$.

Theorem 3.3. *l, m, n を $l \geq 3, 3 \leq m \leq 4, m \leq n$ となる整数とし, T を位数 3 以上の連結グラフとする. $\mathcal{G}^{(4)}(\{K_l, K_{m,n}, T\})$ が有限のとき, $l = 3$ かつ $T \prec Y_t^{2*} (2 \leq t \leq 4)$.*

これらの命題は，有限であるための必要条件を示している．特徴づけを得るためには，これらの条件が十分条件になっているのか調べればよい．つまり，次を調べればよい．

(A) $\mathcal{G}^{(4)}(\{K_l, K_{2,n}, P_6\})$ $(4 \leq l \leq 5, n \geq 2)$ は有限か.
(B) $\mathcal{G}^{(4)}(\{K_3, K_{2,4}, Y_t^{3*}\})$ $(3 \leq t \leq 4)$ は有限か.
(C) $\mathcal{G}^{(4)}(\{K_3, K_{2,4}, Y_2^{2*}\})$ は有限か.
(D) $\mathcal{G}^{(4)}(\{K_3, K_{2,4}, Y'\})$ は有限か.
(E) $\mathcal{G}^{(4)}(\{K_3, K_{2,n}, Y_t^{2*}\})$ $(n \geq 5, 2 \leq t \leq 3)$ は有限か.
(F) $\mathcal{G}^{(4)}(\{K_3, K_{m,n}, Y_t^{2*}\})$ $(3 \leq m \leq 4, m \leq n, 2 \leq t \leq 4)$ は有限か.

本研究では，(C)(E) について結論が得られた．

Theorem 3.4. $\mathcal{G}^{(4)}(\{K_3, K_{2,4}, Y_2^{2*}\})$ は有限である．

Theorem 3.5. $n \geq 5, 2 \leq t \leq 3$ とする．このとき，$\mathcal{G}^{(4)}(\{K_3, K_{2,n}, Y_t^{2*}\})$ は有限である．

(A)(B)(D)(F) については，今後の研究で議論する．

参考文献

[1] P. Bedrossian, Forbidden subgraphs and minimum degree conditions for hamiltonicity, *Ph.D. Thesis, University of Memphis.* (1991).

[2] G. A. Dirac, Some theorems on abstract graphs, *Proc. London Math. Soc. (3).* **2** (1952) 69–81.

[3] Y. Egawa, J. Fujisawa, M. Furuya, M.D. Plummer and A. Saito, Forbidden triples generating a finite set of 3-connected graphs, *Electron. J. Combin.* **22** (2015) #P3.13.

[4] Y. Egawa and M. Furuya, Forbidden triples containing a complete graph and a complete bipartite graph of small order, *Graphs Combin.* **30** (2014) 1149-1162.

[5] Y. Egawa and M. Furuya, Forbidden triples generating a finite set of graphs with minimum degree three, *Discrete Applied Mathematics.* **320** (2022) 282-295.

[6] Y. Egawa and M. Furuya, Forbidden subgraphs generating a finite set of graphs with minimum degree three and large girth, preprint.

[7] Y. Egawa and Z. Zhao, Forbidden triples involving the complete bipartite graph with partite sets having cardinalities two and three, *Ars Combin.* **154** (2021), 159–195.

[8] R.J. Faudree, R.J. Gould, Z. Ryjàček and I. Schiermeyer, Forbidden subgraphs and pancyclicity, *Congr. Numer.* **109** (1995) 13-32.

[9] R.J. Faudree and R.J. Gould, Characterizing forbidden pairs for Hamiltonian properties, *Discrete Math.* **173** (1997) 45-60.

[10] J. Fujisawa, M.D. Plummer and A. Saito, Forbidden subgraphs generating a finite set, *Discrete Math.* **313** (2013) 1835–1842.

[11] S. Fujita, K. Kawarabayashi, C. L. Lucchesi, K. Ota, M. D. Plummer and A. Saito, A pair of forbidden subgraphs and perfect matchings, *J. Combin. Theory Ser. B.* **96** (2006), no. 3, 315–324.

[12] T. Kotani, Stars in forbidden triples generating a finite set of graphs with minimum degree four, submitted.

[13] M. M. Matthews and D. P. Sumner, Hamiltonian results in $K_{1,3}$-free graphs, *J. Graph Theory.* **8** (1984) 139–146.

[14] A. Mori, Properties of finite forbidden triples in 4-connected graphs, *Master's Thesis, Tokyo University of Science*, (2021).

[15] K. Ota and G. Sueiro, Forbidden induced subgraphs for perfect matchings, *Graphs Combin.* **29** (2013), no. 2, 289–299.

[16] M. D. Plummer and A. Saito, Forbidden subgraphs and bounds on the size of a maximum matching, *J. Graph Theory.* **50** (2005), no. 1, 1–12.

[17] D. P. Sumner, 1-factors and antifactor sets, *J. London Math. Soc. (2).* **13** (1976), no. 2, 351–359.