On the center of a wreath product of truncated polynomial rings

近畿大学工業高等専門学校　非常勤講師
小西正秀 (Masahide KONISHI) *

概要

環 $(R[x_1, \ldots, x_N]/\langle x_1^{r_1}, \ldots, x_N^{r_N}\rangle) \wr S_n$ の中心を求める。

1　導入

テクニカルレポートに目を通している皆様、こんにちは。最早若手と名乗って良いのかどうかも分かりませんが、諸事情あって一度研究から距離を置き、戻ってきて博士取得を目指す身です。

単なる身の上話なのですが、この研究集会に最後に参加したのが丁度十年前、コロナ禍前の最後の研究発表が六年前と、随分ブランクが空いきました。その間に研究能力は向上したかと言うと凡そアカデミックではない業務をこなす間の現状維持が関の山でした。若き数学者志望の皆さん、数学に打ち込めるというのは人生に於いて非常に貴重な期間ですので、私みたいにならないよう精進して下さい。十年前と比べて社会の数学需要も高まっていますし、博士取得後の割とシームレスに用意されている状況なので、そう述べなくとも目が輝いている人が多いやも知れないなと、世代間ギャップの観測を楽しみにしています。

数学の本題に入りますが、今回の内容は博士論文に向けて導いた結果の概説となっています。ある環の中心を求めるという問題を難しく考えて高等テクニックを用いて示そうと試行錯誤しましたが、最終的に辿り着いたのは何の変哲も無い、定義さえ分かれば学部生でも理解可能な方法でした。但し文章での説明には組み合わせ論的な難しさ、整え切れなかったスパゲティコード状態の諸々を含むので、講演に於いては肝となる特殊なケースの計算を通じてその心を理解して頂くことに務め、このテクニカルレポートもなるべく平易に主要な部分が感じ取れるように書こうとしましたが、準備時間の都合で後半駆け足となってしまいました。

具体的に必要とされる知識としては、対称群 S_n とその巡回積表示、共役類と n の分割の対応が分かっていて、環に於いては群環や可換環 R 上のテンソル積を知っていれば十分です。輪積 (wreath 積) の定義を知り計算するだけならテンソル積を知らなくても手を動かせるので、実際に積を取って考えると何をしているのか把握できます。難解な理論に疲れた時の計算練習にでもお使い下さい。

* E-mail:m-konishi@ktc.ac.jp, masahide.konishi0915@gmail.com

2　概説

R を可換環とし、n を 1 以上の整数とする。以下、主定理の一部、$N = 1$ かつ $r_1 = 2$ である場合を示す為に必要な定義を書き、主定理を得るまでの流れを書く。証明は省略する。

S_n は集合 $\{1, \ldots, n\}$ から $\{1, \ldots, n\}$ への全単射全体の集合として定義する。

$\sigma \in S_n$ と $c_1 \in \{1, \ldots, n\}$ に対し、$c_{k+1} = \sigma(c_k)$ $(k \geq 1)$ とすると、$c_t = c_1$ となる最小の t が取れ、列 $(c_1\ \ldots\ c_t)$ を得る。これを σ に含まれる t 巡回或いは単に巡回と呼び、t を巡回の長さと呼ぶ。1 から n までの数が全て現れるように巡回を取り尽くして並べたものを σ の巡回積表示と呼ぶ。

巡回積表示は一意ではなく、例えば $\sigma \in S_3$ で $\sigma(1) = 2$、$\sigma(1) = 1$、$\sigma(3) = 3$ となる $\sigma \in S_3$ に対して、$(1\ 2)(3)$、$(2\ 1)(3)$、$(3)(1\ 2)$、$(3)(2\ 1)$ と 4 つの巡回積表示が存在するが、以下ではこの非一意性は特に問題にならない。また、t 巡回 $(c_1\ \ldots\ c_t)$ 自身を巡回に含まれる数を「1 つ右」に移し、それ以外の数は固定する S_n の元と見做すこともできる。

t 巡回 $(c_1\ \ldots\ c_t)$ と $\sigma \in S_n$ に関しては次のような性質があり、S_n の共役類の分類に用いられる。$\sigma(c_1\ \ldots\ c_t)\sigma^{-1} = (\sigma(c_1)\ \ldots\ \sigma(c_t))$。

$\sigma \in S_n$ の $\{1, \ldots, n\}$ への左からの作用は $\sigma \cdot c = \sigma(c)$ で定める。

1 以上の整数を用いた単調非増加な列 $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ で和が n であるものを n の分割と呼ぶ。

$\sigma \in S_n$ の巡回積表示を取り、巡回の長さを大きい順に $(t_1, \ldots, t_m)$ と並べると n の分割となり、先程の性質と合わせることで S_n の共役類と n の分割が 1 対 1 対応する。例えば $(1\ 2)(3)$ と共役な S_3 の元は $(1\ 3)(2)$ と $(2\ 3)(1)$ で全てであり、この共役類は 3 の分割 $(2, 1)$ と対応する。

特別に 0 の分割を ϕ で表すことにする。n_1 と n_2 を $n_1 + n_2 = n$ となる非負整数とし、n_1 の分割 λ^1 と n_2 の分割 λ^2 の組 (λ^1, λ^2) を n の 2 重分割と呼ぶ。$n_1 \geq n_2$ である必要は無い。n の 2 重分割は定理の記述の際に用いる。

$A = R[x]/\langle x^2 \rangle$ を 1 変数多項式環であって $x^2 = 0$ という関係式を持つ環とする。

A の S_n による輪積 $A \wr S_n$ とは、集合としては $A^{\otimes n} \otimes RS_n$、即ち A の R 上の n 回テンソル積と群環 RS_n との R 上のテンソル積であり、積については以下を線形に拡張したものとして定義される。

$1 \leq i \leq n$ に対し a_i と b_i を A の元、σ と τ を S_n の元としたとき、
$((a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) \otimes \sigma) \times ((b_1 \otimes \cdots \otimes b_n) \otimes \tau) = ((a_1 b_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes a_n b_{\sigma^{-1}(n)})) \otimes \sigma\tau$。
例えば、$((x \otimes 1 \otimes 1) \otimes (1\ 2\ 3)) \times ((x \otimes 1 \otimes 1) \otimes (1\ 2\ 3)) = (x \otimes x \otimes 1) \otimes (1\ 3\ 2)$ である。定義では σ^{-1} を用いているが、実際に計算する際は $(1\ 2\ 3)(x \otimes 1 \otimes 1)$ を $(1 \otimes x \otimes 1)(1\ 2\ 3)$ として扱い、$(x \otimes 1 \otimes 1)(1 \otimes x \otimes 1)$ と $(1\ 2\ 3)(1\ 2\ 3)$ のテンソル積になると解釈すれば楽である。

$A \wr S_n$ の R 上の階数は $2^n \times n!$ である。

以上で基本的を定義を終え、以下 $A \wr S_n$ の中心を求める為の技巧的な話をする。

S_n の単位元を ε で表し、$\sigma \in S_n$ に対し、混同の恐れが無い場合は $(1 \otimes \cdots \otimes 1) \otimes \sigma \in A \wr S_n$ も

単に σ で表すこととする。$x_1 = (x \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1) \otimes \varepsilon$、$x_{i+1} = (i\ i+1)x_i(i\ i+1)\ (1 \le i < n)$ とする。$x_k\ (1 \le k \le n)$ は要するにテンソル積の k 番目にのみ x があり、S_n 部分は ε である $A \wr S_n$ の元である。

このとき、$x_k^2 = 0$ 及び $\sigma x_k = x_{\sigma(k)}$ が成り立つことを用いて以下の手順で中心の元を求めていく。

$A \wr S_n$ の基底として $B = \left\{ x_1^{d_1} \cdots x_n^{d_n} \sigma \mid 0 \le d_i \le 1, \sigma \in S_n \right\}$ を取り、型という概念を導入して B の元を分類する。

型は σ を巡回積表示し、各巡回に対し、巡回の長さをとそれに含まれる数 i による d_i の総和を組にし、それを重複集合としたものである。重複集合とは要素の重複を含めて区別し、順番では区別しない集合であり、重複集合を表す括弧として [ ] を用いることとする。

例えば $x_1(1\ 2)(3)$ は長さが 2 の巡回 $(1\ 2)$ に対し $d_1 + d_2 = 1 + 0 = 1$ であり、長さが 1 の巡回 (3) に対し $d_3 = 0$ なので、型として $[(2,1),(1,0)]$ を得る。$x_1(3)(2\ 1)$ と巡回積の形を変えても、得られる型は $[(1,0),(2,1)]$ と不変である。

B を用いた線形和 $\displaystyle\sum_{b \in B} \alpha_b b\ (\alpha_b \in R)$ が中心であると仮定して、各 $x_i\ (1 \le i \le n)$ や 2 巡回 $(i_1\ i_2)$ $(1 \le i_1 < i_2 \le n)$ との可換性を考えていく。

B の元 b と b' が同じ型を持つとき、係数 α_b と $\alpha_{b'}$ は等しいことがまず示せる。例えば $x_1(1\ 2)(3)$ と $x_2(1\ 2)(3)$ の型はともに $[(2,1),(1,0)]$ であり、線形和を考えた際に巡回 $(1\ 2)$ との可換性を考えると係数は等しいと分かる。他に、$x_1x_2(1\ 2\ 3\ 4)$ と $x_1x_3(1\ 2\ 3\ 4)$ の型はともに $[(4,2)]$ であり、線形和を考えた際に x_2 との可換性を考えると係数は等しいと分かる。

ここで型 $[(\gamma_i, \delta_i)]$ (i は巡回積で表した際の巡回の個数) に対し、全ての i に対し $\gamma_i = \delta_i$ または $\gamma_i = \delta_i + 1$ となっている型を中心的型と呼ぶことにする。

b の型が中心的型ではないとき、$\alpha_b = 0$ となることが示せる。例えば $(1\ 2)$ の型は $[(2,0)]$ であり、x_1 との可換性を考える。左から掛ければ $x_1(1\ 2)$ なので、$(1\ 2)$ の係数が 0 でなければ、右から x_1 を掛けて $x_1(1\ 2)$ となる元が存在することになる。しかし $(1\ 2)$ に右から x_1 を掛けることは左から x_2 を掛けることとなり、関係式から左から x_2 を掛けて $x_1(1\ 2)$ となる B の元は存在しない。故に $(1\ 2)$ の係数は 0 となる。

各中心的型に対し、その型を持つ b の係数を 1、それ以外を 0 とした線形和は中心となる。例えば $[(2,1)]$ は中心的型であり、$x_1(1\ 2) + x_2(1\ 2)$ は x_1 と x_2 及び $(1\ 2)$ 全てと可換である。

以上から、$A \wr S_n$ の中心の基底の 1 つは各中心的型を用いた線形和の集合であり、条件から中心的型の個数は n の 2 重分割の個数と等しいという定理を得る。例えば $n = 2$ の場合中心的型は $[(2,2)]$、$[(2,1)]$、$[(1,1),(1,1)]$、$[(1,1),(1,0)]$、$[(1,0),(1,0)]$ の 5 つであり、それぞれ 2 重分割 $((2),\phi)$、$(\phi,(2))$、$((1,1),\phi)$,$((1),(1))$,$(\phi,(1,1))$ に対応する。

途中の議論は $R[x]/\langle x^2 \rangle$ を $R[x]/\langle x^r \rangle\ (r \ge 1)$ としても、更に独立な多変数を用いても同様に行えるので、上記定理は以下の主定理へと拡張可能である。

3 主定理

R を単位元を持つ可換環、N を 1 以上の整数、r_i $(1 \leq i \leq N)$ を 1 以上の整数とする。環 $(R[x_1, \ldots, x_N]/\langle x_1^{r_1}, \ldots, x_N^{r_N}\rangle) \wr S_n$ の中心の基底の個数が、n の $\displaystyle\prod_{i=1}^{N} r_i$ 重分割の個数と等しいことを示した。また、[1] の型の概念を拡張し、中心の元は特定の型を持つ元の線形和で表せることを示した。

参考文献

[1] G. Macdonald. *Symmetric functions and Hall polynomials*. Oxford Univ. Press, second edition, 1995.