Some relations between Schwarz-Pick type inequality and von Neumann's inequality

名古屋大学大学院多元数理科学研究科
荒神健太 (Kenta KOJIN) *

概要

複素関数論と作用素論のそれぞれの文脈で現れる二つの不等式の関係を調べる．単位円盤上の一様ノルムが 1 以下の正則関数全体を Schur クラスという．その自然な一般化の一つとして Schur-Agler クラスというものが知られており，この関数族に対する最良の Schwarz-Pick 型の不等式を示す．さらにその応用として，2×2 行列に対するダイレーション理論を考察する．

1　導入

本稿では複素関数論と作用素論のそれぞれの文脈で重要な二つの不等式の関係を調べる．領域 $\Omega \subset \mathbb{C}^d$ 上の Schur クラスは

$$\mathscr{S}(\Omega) = \{f \in \mathcal{O}(\Omega) \mid \sup_{z \in \Omega} |f(z)| \leq 1\}$$

として定義される．ただし，$\mathcal{O}(\Omega)$ は Ω 上の正則関数全体である．まず複素関数論の文脈で知られている，単位円盤 $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ 上の Schwarz-Pick の不等式 [13, page 5] を紹介する．これは Schwarz の補題に現れる不等式の一般化である．

Theorem 1.1 (Schwarz-Pick の不等式)**.** $f \in \mathscr{S}(\mathbb{D})$ が絶対値 1 の定数関数ではない時，任意の $z, w \in \mathbb{D}$ に対して次の不等式が成り立つ:

$$\left|\frac{f(z) - f(w)}{1 - \overline{f(w)}f(z)}\right| \leq \left|\frac{z - w}{1 - \overline{w}z}\right|.$$

単位円盤 $\mathbb{D}$ 上の擬双曲距離を Theorem 1.1 の不等式の右辺，即ち

$$d_{\mathbb{D}}(z, w) = \left|\frac{z - w}{1 - \overline{w}z}\right| \quad (z.w \in \mathbb{D})$$

によって定義する．Schur クラスや後に現れる関数族は定数関数 $f(z) = e^{i\theta}$ $(\theta \in \mathbb{R})$ を含むが，これらの関数としての振る舞いは自明であるため，本稿では簡単のために $|\alpha| = 1$ の時は $d_{\mathbb{D}}(\alpha, \alpha) = 0$ と定義する．すると，任意の $z, w \in \mathbb{D}$ に対して Theorem 1.1 から容易に $d_{\mathbb{D}}(z, w) =$

* E-mail:m20016y@math.nagoya-u.ac.jp

$\sup_{f\in\mathscr{S}(\mathbb{D})} d_{\mathbb{D}}(f(z), f(w))$ が従う. この表示から, 一般の領域 $\Omega\subset\mathbb{C}^d$ 上の Möbius 擬距離

$$d_\Omega(z,w)=\sup_{f\in\mathscr{S}(\Omega)} d_{\mathbb{D}}(f(z),f(w)) \quad (z,w\in\Omega)$$

を考えることは自然である. なお, 本質的に同等な Carathéodory 擬距離は $c_\Omega=\tanh^{-1}(d_\Omega)$ で与えられる. 任意の $f\in\mathscr{S}(\Omega)$ に対して, Möbius 擬距離の定義から自明に Schwarz-Pick 型の不等式

$$d_{\mathbb{D}}(f(z),f(w))\le d_\Omega(z,w) \quad (z,w\in\Omega) \tag{1.1}$$

を得る. Carathéodory 擬距離は Schwarz-Pick 型の不等式を満たす "最小" の擬距離であり, 小林擬距離がある種の双対にあたる [19, Proposition 3.1.7, Remark 3.1.29]. ここで, この不等式に関して本稿で考察する問題点を二つ述べる. まず, 単位円盤 $\mathbb{D}$ の場合と異なり一般の領域 Ω に対する Möbius 擬距離 d_Ω の具体的な表示を得ることは困難である. また, Möbius 擬距離の定義から不等式 (1.1) は与えられた $\mathscr{S}(\Omega)$ 部分集合に対しての最良不等式にならない可能性がある. そこで本稿では筆者の論文 [21] に基づき, 単位円盤上の Schur クラスの一般化として作用素論において重要な役割を果たす Schur-Agler クラス $SA(B_\delta)\subset\mathscr{S}(B_\delta)$ (2 章で厳密な定義を与える) に対する最良の Schwarz-Pick 型の不等式を考察する. なお, 作用素論的アプローチを行う本研究では, 関数の正則性以上に von Neumann の不等式と呼ばれる作用素不等式が重要な役割を果たす. 実際, Schur-Agler クラスを一般化した正則ではない関数を含む関数族に対しても主結果にあたる不等式が成り立つ.

さて, 本稿では Schwarz-Pick の不等式と先ほど述べた von Neumann の不等式の関係について考察するのだが, ここで最も簡単な場合に限定して後者を述べる.

Theorem 1.2 (von Neumann の不等式 [5, Theorem 1.47])**.** $\|T\|<1$ を満たす Hilbert 空間上の有界線形作用素 T を考える. ただし, $\|\cdot\|$ は作用素ノルムである. この時, 任意の $f\in\mathscr{S}(\mathbb{D})$ に対して

$$\|f(T)\|\le 1$$

が成り立つ. ここで, $f(T)$ は解析関数カルキュラス [17, 定理 3.2.6] によって定義する.

この不等式が Schur-Agler クラスを導入する動機付けであり, 1990 年の Agler の研究 [1] は複素関数論と作用素論に多大な影響を与えた. また, この不等式は作用素のダイレーション理論において重要な役割を果たす. 作用素のダイレーションとは, 与えらた作用素をより性質の良い作用素の一部として捉えることであり, 4 章で説明する. ここでは, Sz.-Nagy による最も基本的なダイレーション定理を紹介する. ユニタリー作用素のスペクトル分解と Taylor 展開を踏まえると, 下記の Theorem 1.3 から Theorem 1.2 が導かれる.

Theorem 1.3 (Sz.-Nagy [25])**.** Hilbert 空間 H 上の有界線形作用素 T が $\|T\|\le 1$ を満たす時, H を含む Hilbert 空間 K と, K 上のユニタリー作用素 U が存在して, 任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して

$$T^n=PU^n|_H$$

が成り立つ. ただし, $P:K\to H$ は直交射影.

本稿では, まず von Neumann の不等式から Schwarz-Pick 型の不等式を導く. 即ち作用素論を複素関数論に応用する. 次にその逆として, 得られた Schwarz-Pick 型の不等式を応用して 2×2 行列に対するダイレーション理論を考察する.

2 Schur-Agler クラス

この章では単位円盤 $\mathbb{D}$ 上の Schur クラスの一般化の一つである Schur-Agler クラスについて述べる. 細かい部分は参考文献を読んで頂くことにして, ここでは定義を与えた上でいくつかのコメントをするにとどめる. 導入で von Neumann の不等式を紹介したが, Schur-Agler クラスとは von Neumann 型の不等式が常に成立する正則関数のクラスである. このクラスは 1990 年に Agler [1] が多重開円盤 $\mathbb{D}^d$ 上で導入した. ここではより一般の設定の Schur-Agler クラスを紹介する.

d 変数の多項式が成分の $s \times r$ 行列 δ を考える. この時,

$$B_\delta = \{z = (z_1, \ldots, z_d) \in \mathbb{C}^d \mid \|\delta(z)\| < 1\}$$

と定める. ただし, $\|\delta(z)\|$ は行列 $\delta(z)$ の作用素ノルムである.

Examples 2.1. (1)

$$\delta = \begin{bmatrix} z_1 & & \\ & \ddots & \\ & & z_d \end{bmatrix}$$

とおくと, これは多重開円盤 $\mathbb{D}^d = \{(z_1, \ldots, z_d) \in \mathbb{C}^d \mid |z_i| < 1 \ \ (1 \leq i \leq d)\}$ を与える.

(2)

$$\delta = [z_1, \ldots, z_d]$$

とおくと, これは開単位球 $\mathbb{B}_d = \{(z_1, \ldots, z_d) \in \mathbb{C}^d \mid |z_1|^2 + \cdots |z_d|^2 < 1\}$ を与える.

次に, von Neumann の不等式をふまえて B_δ 上の Schur-Agler クラスを定める. Hilbert 空間 H 上の互いに可換な作用素の組 $T = (T_1, \ldots, T_d)$ に対して, $\sigma(T)$ をその Taylor スペクトル [12, 26] とする. Taylor スペクトルの定義をここでは与えないが, $d = 1$ の時は通常の作用素のスペクトルと一致し, H が有限次元の時は可換な行列の組に対する様々なスペクトルと一致する [12]. δ は d 変数の多項式を成分に持つ行列なので, T を δ に自然に代入して作用素ノルム $\|\delta(T)\|$ を考えることができる. Ambrozie と Timotin [6, Lemma 1] は $\|\delta(T)\| < 1$ ならば Taylor スペクトル $\sigma(T)$ が B_δ に含まれることを示した. したがって, 任意の $f \in \mathcal{O}(B_\delta)$ に対して Taylor 関数カルキュラス [12, 26] を用いて作用素ノルム $\|f(T)\|$ を考えることができる. そこで, $\|\delta(T)\| < 1$ を満たす可算無限次元 Hilbert 空間上の任意の可換な作用素の組 $T = (T_1, \ldots, T_d)$ に対して, $\|f(T)\| \leq 1$ となるような $f \in \mathcal{O}(B_\delta)$ 全体の集合として Schur-Agler クラス $SA(B_\delta)$ を定義する. 可算無限次元 Hilbert 空間同士はユニタリー同型なので, [26, Theorem 4.5] から上の定義は可算無限次元 Hilbert 空間の選び方によらない. また, 定義から $SA(B_\delta) \subset \mathscr{S}(B_\delta)$ は自明である. $d = 1$ かつ $\delta = [z]$, 即ち $B_\delta = \mathbb{D}$ の時, Theorem 1.2 から $SA(\mathbb{D}) = \mathscr{S}(\mathbb{D})$ が従う. また, 安藤ダイレーション [7] により $SA(\mathbb{D}^2) = \mathscr{S}(\mathbb{D}^2)$ も従う. しかし, $d \geq 3$ の場合 $SA(\mathbb{D}^d) \subsetneq \mathscr{S}(\mathbb{D}^d)$ である [23]. Schur-Agler クラスに属する関数の著しい性

質は Agler 分解と呼ばれる関係式を満たすことであり, これは関数の挙動が半正定値行列 (厳密には再生核) で記述されることを意味する [6, Theorem 3]. $\delta = [z]$ の時はともかく, 一般の Schur-Agler クラスはかなり特殊な関数族に見えるかもしれない. しかし, 連続関数はコンパクト集合上で有界になるという基本的な事実の類似物として, 開集合上の任意の正則関数 f に対し, Taylor 関数カルキュラス $T \mapsto f(T)$ は局所的に有界になることが知られている (詳細は [4]). よって, 開集合上の任意の正則関数は局所的に Schur-Agler クラスに属する関数のスカラー倍になることがわかる. この事実と Agler 分解の簡単な応用として, 岡の拡張定理や岡-Weil の定理の作用素論的な証明を与えることができる [4]. 最後に, 与えられた関数の挙動を記述するような半正定値行列を見つける Agler 分解に関して, Agler の原論文 [1] では本質的に Hahn-Banach の定理しか使われていない点は注目に値する. 作用素値関数の場合など考察する設定固有の問題はあれど, Hahn-Banach の定理の一般性ゆえに様々な設定において Agler のアプローチは有効である (例えば [3, 6, 9, 10]).

3　主結果 1

この章では [21] で得た Schwarz-Pick 型の不等式を紹介する. その前に, 問題設定に合わせて Schur-Agler クラスを一般化した関数族を定義しよう. 前章で述べた Agler 分解を得るためには, 関数が Schur-Agler クラスに含まれていることが必要十分条件である. よって, **可算無限次元** Hilbert 空間上の作用素の情報が必要になるわけだが, この理由は単純で正則関数のグラフは**無限個**の点で構成されるからである. $\mathbb{C}^d$ 内の開集合が可分であることと正則関数の連続性を考えれば, 非可算無限次元空間ではなく可算無限次元空間を考えれば十分であることに納得がいくだろう. グラフ上の可算個の点がどのように配置されているかが分かれば, 関数の挙動がわかったことになる. さて, 現在考察している問題は Schwarz-Pick 型の不等式, つまり距離に関する不等式である. 即ち, 関数のグラフ上の (任意の) **二点**の関係が知りたいのである. 従って, 関数は無限次元空間上の作用素の情報を持つ必要はなく, **$\mathbf{2 \times 2}$ 行列**の情報さえ持っていれば本研究においては十分だと予想できる. さらに, 正則性や連続性さえも不要である. そこで, 次のようにして新たな関数族を定義する.

$E \subset \mathbb{C}^d$ を集合, Δ を E 上の $\mathbb{C}$ 値関数が成分の $s \times r$ 行列とする. この時,

$$B_\Delta = \{z \in E \mid \|\Delta(z)\| < 1\}$$

と定める. $T = (T_1, \ldots, T_d)$ を同時対角化可能な 2×2 行列の組とする. よって, $\sigma(T) = \{z, w\} \subset \mathbb{C}^d$ ならば, ある可逆な 2×2 行列 S が存在して,

$$T = \left(S^{-1} \begin{bmatrix} z_1 & 0 \\ 0 & w_1 \end{bmatrix} S, \ldots, S^{-1} \begin{bmatrix} z_d & 0 \\ 0 & w_d \end{bmatrix} S \right)$$

と書ける. この時 $\sigma(T)$ 上の任意の $\mathbb{C}$ 値関数 f に対して,

$$f(T) = S^{-1} \begin{bmatrix} f(z) & 0 \\ 0 & f(w) \end{bmatrix} S$$

として関数カルキュラスを定義する. これは行列値関数に対する関数カルキュラスに拡張できるため, $\Delta(T)$ が定義可能である (より一般の作用素に対する連続関数カルキュラスや正則関数カルキュラスと異なり, 今は同時対角化可能な行列のみを扱っているので連続性や正則性は不要).

$\sigma(T) \subset B_\Delta$ かつ $\|\Delta(T)\| \leq 1$ を満たす任意の同時対角化可能な 2×2 行列の組 $T = (T_1, \ldots, T_d)$ に対して, $\|f(T)\| \leq 1$ となるような B_Δ 上の $\mathbb{C}$ 値関数全体の集合を $S_{2,gen}(B_\Delta)$ と定める. 特に $E \subset \mathbb{C}^d$ が開集合, Δ の成分が正則関数の時, $S_2(B_\Delta) = S_{2,gen}(B_\Delta) \cap \mathcal{O}(B_\Delta)$ と定義する. この時, $S_2(B_\Delta) \subset \mathscr{S}(B_\Delta)$ であり, δ が多項式成分の行列の時は $SA(B_\delta) \subset S_2(B_\delta) \subset \mathscr{S}(B_\delta)$ が成り立つ [21, Example 3.1].

Definition 3.1. Δ を集合 $E \subset \mathbb{C}^d$ 上の関数が成分の $s \times r$ 行列とした時, B_Δ 上の擬距離 d_Δ を

$$\begin{aligned} d_\Delta(z, w) := \Big\| &(I - \Delta(w)\Delta(w)^*)^{-\frac{1}{2}} (\Delta(z) - \Delta(w)) \\ &\times (I - \Delta(w)^*\Delta(z))^{-1} (I - \Delta(w)^*\Delta(w))^{\frac{1}{2}} \Big\|_{B(\mathbb{C}^r, \mathbb{C}^s)}. \end{aligned}$$

で定める.

Theorem 3.2 ([21, Corollary 4.2, Proposition 5.1])**.** Δ を集合 $E \subset \mathbb{C}^d$ 上の関数が成分の $s \times r$ 行列, $f \in S_{2,gen}(B_\Delta)$ とした時,

$$d_{\mathbb{D}}(f(z), f(w)) \leq d_\Delta(z, w) \quad (z, w \in B_\Delta)$$

が成り立ち, $E \subset \mathbb{C}^d$ が開集合かつ Δ の成分が E 上の正則関数の時は

$$d_\Delta(z, w) = \sup_{f \in S_2(B_\Delta)} d_{\mathbb{D}}(f(z), f(w))$$

が成り立つ. 更に δ が多項式成分の行列の時は

$$d_\delta(z, w) = \sup_{f \in S_2(B_\delta)} d_{\mathbb{D}}(f(z), f(w)) = \sup_{f \in SA(B_\delta)} d_{\mathbb{D}}(f(z), f(w)).$$

が成り立つ. よって上の不等式は Schur-Agler クラスに対する最良不等式である.

なお証明の中で明示的には現れないが, Agler 分解 (とその類似物) を実質的に使用する.

4　主結果 2

前章の結果の応用として 2×2 行列に対するダイレーション理論を論じる前に, 考察の動機付けにあたる事実を紹介する. ダイレーション理論は与えられた作用素を良い性質を持つ作用素の一部として捉える理論であり, von Neumann 型の不等式が重要な役割を果たす事を認識して頂ければ十分である. ダイレーション理論の詳細は [22, 24] などを参照して頂きたい. 1 章で Theorem 1.3 から Theorem 1.2 が従うことをコメントしたが, **行列値関数に対して** von Neumann 型の不等式が成り立つならば, 作用素はダイレーション可能である. この事実は Arveson のダイレーション定理 [8] と呼ばれており, ここではこれを説明する. $T = (T_1, \ldots, T_d)$ を Hilbert 空間 H 上の互いに可換な有界線形作用素の組とし, $sp(T)$ を T のジョイントスペクトル [8] とする. 一般に $\sigma(T) \subset sp(T)$ だが, H が有限次元の時は $\sigma(T) = sp(T)$ が成り立つ [8, 12, 11]. 4 章では 2×2 行列に対するダイレーションを考察するので, どのスペクトルを考えるのかはあまり気にしなくて良い.

Definition 4.1. $X \subset \mathbb{C}^d$ をコンパクト集合とする．$sp(T) \subset X$ かつ任意の $k \in \mathbb{N}$ と X 上の有理関数が成分の任意の $k \times k$ 行列 R に対して

$$\|R(T)\| \leq \sup_{z \in X} \|R(z)\|$$

が成り立つ時, X は T の完全スペクトル集合であるという．

Theorem 4.2 (Arveson のダイレーション定理 [8])**.** コンパクト集合 $X \subset \mathbb{C}^d$ と Hilbert 空間 H 上の互いに可換な有界線形作用素の組 $T = (T_1, \ldots, T_d)$ に対し, X が T の完全スペクトル集合になるための必要十分条件は, H を含む Hilbert 空間 K と K 上の互いに可換な正規作用素の組 $N = (N_1, \ldots, N_d)$ で, $sp(N) \subset \partial X$ かつ X 上の任意の有理関数 r に対して

$$r(T) = Pr(T)|_H$$

を満たすものが存在することである．ただし, ∂X は X 上の有理関数全体からなる一様環に対する X の Silov 境界 [15] で, P は K から H への直交射影である．

ダイレーション理論を研究する際, 完全スペクトル集合を複素関数論に適した形に書き変えた概念を考察することはしばしば有効である．

Definition 4.3. $\Omega \subset \mathbb{C}^d$ を領域とする．$\sigma(T) \subset \Omega$ かつ任意の $k \in \mathbb{N}$ と Ω 上の有界正則関数が成分の任意の $k \times k$ 行列 F に対して

$$\|F(T)\| \leq \sup_{z \in \Omega} \|F(z)\|$$

が成り立つ時, Ω は T の完全スペクトル領域であるという．

有界線形作用素がダイレーション可能か否かを判定するための簡単な条件を与えることは重要である．次の定理は 2×2 行列に対しては作用素ノルムと固有値間の距離の情報が本質的であることを示唆している．証明では Agler [2] による作用素論と複素幾何学を繋ぐ研究を用いる．その論文内で Möbius 擬距離は同時対角化可能な 2×2 行列の組に対する 2 つの固有空間のなす角度で測れることが示されている．Agler はそれを用いて Lempert の定理の作用素論的な証明を与えた．

それでは本稿におけるもう一つの主結果を述べる．

Theorem 4.4 ([21, Corollary 5.8])**.** B_Δ が連結になるような, 正則関数が成分の行列値関数 Δ を考える．この時以下の条件は同値である:

(1) 任意の $z, w \in B_\Delta$ に対して, $d_\Delta(z, w) = d_{B_\Delta}(z, w)$ が成り立つ．

(2)B_Δ は $\sigma(T) \subset B_\Delta$ かつ $\|\Delta(T)\| \leq 1$ を満たす任意の同時対角化可能な 2×2 行列の組 $T = (T_1, \ldots, T_d)$ の完全スペクトル領域になる．

(3)$S_2(B_\Delta) = \mathscr{S}(B_\Delta)$.

Remark 4.5. 同時対角化可能な 2×2 行列の組全体の集合は互いに可換な 2×2 行列の組全体の集合の中で稠密である [14].

Example 4.6. 2 章の Examples 2.1 でみた二つの δ に対して, $d_\delta = d_{B_\delta}$ が従う．よって Theorem 4.4 と Remark 4.5 から, それぞれが縮小作用素の互いに可換な 2×2 行列の組に対する Drury のダ

イレーション定理 [14] と, 可換な行縮小作用素に対する Hartz-Richter-Shalit のダイレーション定理 [16, corollary 3.2] が簡単に導かれる．また, 2 章で述べた様に $d \geq 3$ の時は $SA(\mathbb{D}^d) \subsetneq \mathscr{S}(\mathbb{D}^d)$ となるのに対し, 任意の $d \in \mathbb{N}$ に対して $S_2(\mathbb{D}^d) = \mathscr{S}(\mathbb{D}^d)$ が成り立つ.

最後に, 非可換関数論 [5, 18] の文脈における Schur-Agler クラスに対する Schwarz の補題は知られているが [20], 本稿で紹介した手法では Schwarz-Pick 型の不等式の非可換化が実現できないことを注意しておく.

参考文献

[1] J. Agler, On the representation of certain holomorphic functions defined on a polydisk, *Operator Theory: Advances and Applications*, vol.48, 47-66, Birkhäuser, Basel, 1990.

[2] J. Agler, Operator theory and the Carathéodory metric. *Invent. Math.*, 101, 483-500, 1990.

[3] J. Agler and J. E. McCarthy, Global holomorphic functions in several non-commuting variables, *Canadian J. Math.*, 67(2):241-285, 2015

[4] J. Agler and J. E. McCarthy, Operator theory and the Oka extension theorem, *Hiroshima Math. J.*, 45(1):9-34, 2015

[5] J. Agler, J. E. McCarthy, and N. Young, *Operator Analysis Hilbert Space Methods in Complex Analysis*, Cambridge University Press, 2020.

[6] C.-G. Ambrozie and D. Timotin, A von Neumann type inequality for certain domains in $\mathbb{C}^d$, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 131:859-869, 2003.

[7] T. Ando, On a Pair of Commutative Contractions, *Acta. Sci. Math.* 24, 88-90, 1963.

[8] W. B. Arveson, Subalgebras of C^*-algebras II, *Acta Math.* 128, 271-308, 1972.

[9] J. A. Ball and V. Bolotnikov, Realization and interpolation for Schur-Agler-class functions on domains with matrix polynomial defining function in $\mathbb{C}^d$, *J. Funct. Anal.* 213, No. 1, 45-87, 2004.

[10] J. A. Ball and M. D. Guerra Huamán, Test Functions, Schur-Agler Classes and Transfer-Function Realizations: The Matrix-Valued Setting, *Complex Anal. Oper. Theory* 7, 529-575, 2013.

[11] D. Cohen, Dilations of matrices, *Thesis (M.Sc.), Ben-Gurion University*, `https://arxiv.org/abs/1503.07334`

[12] R. E. Curto, Applications of several complex variables to multiparameter spectral theory, *Surveys of some recent results in Operator Theory (J. B. Conway and B. B. Morrel, eds)*, Longman Scientific, Harlow, 25-90, 1988.

[13] S. Dineen, The Schwarz Lemma, *Oxford Mathematical Monographs*, Oxford, 1989.

[14] S. W. Drury, Remarks on von Neumann's inequality, *Banach spaces, Harmonic analysis, and Probability theory* (*R. C. Blei and S. J. Sidney, eds*), *Lecture notes in Math.*, vol. 995, Springer Verlag, Berlin, 14-32, 1983.

[15] T. W. Gamelin, *Uniform algebras*, Chelsea, New York, 1984.

[16] M. Hartz, S. Richter and O. M. Shalit, von Neumann’s inequality for row contractive matrix tuples. Math. Z. 301, 3877-3894, 2022.

[17] 日合文雄・柳研二郎, ヒルベルト空間と線形作用素 (数理情報科学シリーズ), 牧野書店, 1995.

[18] D. S. Kaliuzhnyi-Verbovetskyi and V. Vinnikov, *Foundations of Noncommutative Function Theory*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 199, American Mathematical Society, Providence, RI, 2014.

[19] S. Kobayashi, *Hyperbolic complex spaces*, Grundlehren Math. Wiss., vol. 318, 1998.

[20] K. Kojin, A polynomial approximation result for free Herglotz-Agler functions, *Canadian Mathematical Bulletin*, 66(2), 665-678, 2023.

[21] K. Kojin, Some relations between Schwarz-Pick inequality and von Neumann's inequality, preprint, `https://arxiv.org/abs/2306.08694`

[22] O. M. Shalit, Dilation Theory: a guided tour, In *Operator Theory, Functional Analysis and Applications*, 551-623, 2021.

[23] S. Parrott, Unitary dilations for commuting contractions, *Pac. J. Math.* 34, 481-490, 1970.

[24] V. I. Paulsen, *Completely bounded maps and operator algebras*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[25] B. Sz.-Nagy, Sur les contractions de l'éspace de Hilbert, *Acta Sci. Math.* 15, 87-92, 1953.

[26] J. Taylor, The analytic-functional calculus for several commuting operators, *Acta. Math.*, 125:1-38, 1970.