左不変統計構造のモジュライ空間と
双対平坦性および共役対称性

広島大学大学院　先進理工系科学研究科　数学プログラム

小林彦蔵 (Hikozo KOBAYASHI) *

概要

情報幾何学の文脈において，Lie 群上の左不変統計構造と呼ばれる概念が古畑–井ノ口–小林 [Inf. Geom. (2021)] によって定義されている．本講演では可換 Lie 群 $\mathbb{R}^n$ および非可換な二系列の Lie 群上の左不変統計構造の中で，“双対平坦” と呼ばれる重要なクラスの分類について紹介する．本講演の内容は，大野優氏（北海道大学），奥田隆幸氏（広島大学），田丸博士氏（大阪公立大学）との共同研究に基づく．

1　導入

微分幾何において，群が作用する多様体上の不変幾何構造（Riemann 計量，擬 Riemann 計量，複素構造，symplectic 構造など）の分類や構成は主な研究テーマの 1 つである．特に Lie 群 G に対して，G 上の左不変幾何構造の研究は近年盛んに行われている ([4], [6], [7], [8], [9])．

多様体上の幾何構造の 1 つに，「統計構造」と呼ばれる概念がある．これは，パラメータ付けられた確率分布族の幾何構造を一般化した概念であり，計量と Affine 接続の組であって，適切な条件を満たすものとして定義される（定義 2.1.1）．特に双対平坦（定義 2.1.2）と呼ばれる統計構造のクラスは情報幾何学において重要であり，主な舞台となる ([1])．また，[3] は，Lie 群上の統計構造であって計量と接続が共に左不変となるものを「左不変統計構造」と呼んだ（定義 3.1.1）．その例として，平均と分散でパラメトライズされる 1 次元正規分布全体の集合に 2 次元可解 Lie 群の構造が入り，情報幾何学において重要な統計構造である，Fisher 計量と甘利–Chentsov の α-接続の組が，この上で左不変統計構造となることが [3] の中で示されている．また [5] の中で，これは多次元正規分布族の場合に拡張された．

我々はこの「左不変統計構造」に着目し，ある Lie 群が与えられたとき，その上の左不変統計構造であって，「双対平坦」なクラスと，後に定義される「共役対称（定義 2.1.3）」と呼ばれるクラスを分類することを考える．

Lie 群 G 上の左不変統計構造が，左不変計量と左不変接続の組によって定義されることに着目すると，上記の問題はまず，左不変計量全体の空間が “簡単” な Lie 群に対して，取り組むことが自然で

* E-mail:m234263@hiroshima-u.ac.jp

あると考えられる．[6] は Lie 群 G 上の左不変計量全体の空間にある同値関係を定め，その商空間を「G 上の左不変計量のモジュライ空間」と呼んだ．また [9] は，このモジュライ空間が 1 点集合となる単連結 Lie 群 G は次の 3 つのうちどれかと同型となることを示している；

$$G = \mathbb{R}^n, \quad G_{\mathbb{R}\mathrm{H}^n}\ (n \geq 2), \quad H^3 \times \mathbb{R}^{n-3}\ (n \geq 3).$$

ここで，$G_{\mathbb{R}\mathrm{H}^n}$ は n 次元実双曲空間 $\mathbb{R}\mathrm{H}^n$ の Lie 群と呼ばれ，$\mathrm{SO}(n,1)$ の単位連結成分 $\mathrm{SO}^0(n,1)$ の岩澤分解における可解部分であり，$\mathbb{R}\mathrm{H}^n$ に単純推移的な作用を持つ．また H^3 は 3 次元ハイゼンベルグ群である．左不変計量のモジュライ空間に関する研究は積極的に行われており，[4]，[7]，[8] などがある．

我々は，Lie 群 G 上の左不変統計構造全体の空間 $\mathcal{L}\mathrm{Stat}(G)$（定義 3.1.2）に対しても，[6] と同様な同値関係 $\sim$ を定め，その商空間 $\mathcal{ML}\mathrm{Stat}(G) := \mathcal{L}\mathrm{Stat}(G)/\!\sim$ を「G 上の左不変統計構造のモジュライ空間」と定義する（定義 3.2.3）．また $\mathcal{L}\mathrm{Stat}(G)$ の次の部分集合；

$$\mathcal{L}\mathrm{Stat}^{\mathrm{DF}}(G) := \{G \text{ 上の双対平坦な左不変統計構造}\},$$
$$\mathcal{L}\mathrm{Stat}^{\mathrm{CS}}(G) := \{G \text{ 上の共役対称な左不変統計構造}\},$$

に対して，$\mathcal{ML}\mathrm{Stat}^{\mathrm{DF}}(G) := \mathcal{L}\mathrm{Stat}^{\mathrm{DF}}(G)/\!\sim$，$\mathcal{ML}\mathrm{Stat}^{\mathrm{CS}}(G) := \mathcal{L}\mathrm{Stat}^{\mathrm{CS}}(G)/\!\sim$ と表す．我々は与えられた Lie 群 G に対し，これら 3 つのモジュライ空間の間の関係性および様子に興味がある．我々は左不変計量のモジュライ空間が 1 点集合となる上記 3 つの Lie 群に対し，それぞれにおける双対平坦および共役対称となる左不変統計構造の分類を行い，モジュライ空間 $\mathcal{ML}\mathrm{Stat}^{\mathrm{DF}}(G)$, $\mathcal{ML}\mathrm{Stat}^{\mathrm{CS}}(G)$ を決定した．結果を以下に記す；

表 1　$\mathcal{ML}\mathrm{Stat}(G)$ の計算結果

G	$\mathcal{ML}\mathrm{Stat}(G)$
$\mathbb{R}^n$	$S^3((\mathbb{R}^n)^*)/\mathrm{O}(n)$
$G_{\mathbb{R}\mathrm{H}^n}$	$S^3(\mathfrak{g}^*_{\mathbb{R}\mathrm{H}^n})/\mathrm{SO}(1)\times\mathrm{O}(n-1)$
$H^3 \times \mathbb{R}^{n-3}$	$S^3((\mathfrak{h} \oplus \mathbb{R}^{n-3})^*)/\mathrm{S}(\mathrm{O}(2)\times\mathrm{O}(1))\times\mathrm{O}(n-3)$

表 2　$\mathcal{ML}\mathrm{Stat}^{\mathrm{DF}}(G)$ および $\mathcal{ML}\mathrm{Stat}^{\mathrm{CS}}(G)$ の計算結果

G	$\mathcal{ML}\mathrm{Stat}^{\mathrm{CS}}(G)$	$\mathcal{ML}\mathrm{Stat}^{\mathrm{DF}}(G)$
$\mathbb{R}^n$	$\mathcal{ML}\mathrm{Stat}(\mathbb{R}^n)$	定理 4.1.1
$G_{\mathbb{R}\mathrm{H}^n}$	$\mathbb{R}$	$\{\pm 1\}$
$H^3 \times \mathbb{R}^{n-3}$	$(\mathbb{R}^{n-3} \oplus S^3((\mathbb{R}^{n-3})^*))/\mathrm{O}(n-3)$	$\emptyset$

ただし $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}\mathrm{H}^n}$，$\mathfrak{h}$ はぞれぞれ $G_{\mathbb{R}\mathrm{H}^n}$ および H^3 の Lie 環を表す．本講演では特に，$\mathcal{ML}\mathrm{Stat}^{\mathrm{DF}}(\mathbb{R}^n)$ に関する定理 4.1.1 について説明する．

2　統計多様体

2.1　定義と例

本節では統計多様体の定義と例，および双対平坦や共役対称といった統計構造のクラスを紹介する．(M,g) を Riemann 多様体とし，∇^g を g に関する Levi-Civita 接続とする．また M 上の Affien 接続 ∇ に対し，R^{∇} によって ∇ の定める M 上の曲率を表す．

定義 2.1.1 ([10])**.** ∇ を M 上のねじれのない Affine 接続とする．∇g が対称となるとき，(M,g,∇) を**統計多様体**という．またこのとき (g,∇) を M 上の**統計構造**と呼ぶ．

(g,∇^g) は Levi-Civita 接続の定義から M 上の自明な統計構造となることに注意する．

定義 2.1.2. (M,g,∇) を統計多様体とする．$R^{\nabla}=0$ が成り立つとき，統計多様体 M は**双対平坦**であるという．またこのとき (g,∇) を M 上の双対平坦統計構造と呼ぶ．

M 上に Affine 接続 ∇ が与えられると，∇ との組で計量 g を保つような M 上のもう一つの Affine 接続 $\overline{\nabla}$ が次式によって定まる；

$$Xg(Y,Z)=g(\nabla_X Y,Z)+g(Y,\overline{\nabla}_X Z).$$

ここで X,Y,Z は M 上の任意のベクトル場である．$\overline{\nabla}$ は ∇ の g に関する双対 Affine 接続と呼ばれる．特に与えられた Affine 接続 ∇ が (g,∇) の組で M 上の統計構造となるとき，$(g,\overline{\nabla})$ も統計構造であり，特に統計多様体 $(M,g,\overline{\nabla})$ は M の双対統計多様体と呼ばれる．

定義 2.1.3 ([10])**.** $R^{\nabla}=R^{\overline{\nabla}}$ が成り立つとき，統計多様体 (M,g,∇) は**共役対称**であるという．またこのとき M 上の統計構造 (g,∇) は共役対称性を持つという．

M 上の任意のベクトル場 X,Y,Z,W に対して曲率の関係式；

$$g(R^{\nabla}(X,Y)Z,W)+g(R^{\overline{\nabla}}(X,Y)W,Z)=0,$$

が成り立つことから，特に次が成り立つことがわかる；

$$\{M \text{ 上の双対平坦統計構造 }\}\subset\{M \text{ 上の共役対称性を持つ統計構造 }\}.$$

ここで，情報幾何学において重要な確率分布族に定まる統計構造の例をみる．

例 2.1.4. 平均 μ と分散 σ^2 でパラメータ付けられた 1 次元正規分布全体の集合；

$$\mathcal{N}:=\left\{p(t,\theta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)\right\}_{\theta=(\mu,\sigma)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_{>0}}\qquad(t\in\mathbb{R}),$$

は自然に $\mathbb{R}^2$ の上半平面と同一視でき，多様体構造が入る．g^F，C を $\mathcal{N}$ 上の任意の点 $\theta=(\mu,\sigma)$ お

よび θ における接ベクトル X, Y, Z に対して,

$$g^F(X,Y) := \int_{\mathbb{R}} (X \log p(t,\theta))(Y \log p(t,\theta)) p(t,\theta) dt,$$
$$C(X,Y,Z) := \int_{\mathbb{R}} (X \log p(t,\theta))(Y \log p(t,\theta))(Z \log p(t,\theta)) p(t,\theta) dt,$$

と定めると g^F, C はそれぞれ $\mathcal{N}$ 上の Riemann 計量および 3 次対称テンソルとなる. また C と実数 α に対して次式により $\mathcal{N}$ 上の Affine 接続 $\nabla^{(\alpha)}$ が定義できる;

$$g^F(\nabla^{(\alpha)}_X Y, Z) = g^F(\nabla^{g^F}_X Y, Z) - \frac{\alpha}{2} C(X,Y,Z).$$

情報幾何学において, g^F と $\nabla^{(\alpha)}$ はそれぞれ正規分布の空間に対する Fisher 計量および甘利-Chentsov の α-接続としてよく知られており, $(\mathcal{N}, g^F, \nabla^{(\alpha)})$ は統計多様体となる ([1]). また次が知られている;

(1) 任意の実数 α に対して $(g^F, \nabla^{(\alpha)})$ は共役対称性を持つ,
(2) $(g^F, \nabla^{(\alpha)})$ が $\mathcal{N}$ 上の双対平坦統計構造であることと $\alpha = \pm 1$ であることは同値である.

Fisher 計量および甘利-Chentsov の α-接続は, より一般の確率分布の空間に対しても定義される. 詳細は [1] を参照されたい.

2.2 差テンソル

本節では, 計量との組で統計構造と等価となる「差テンソル」および「3 次形式」を紹介する.

定義 2.2.1. (M, g, ∇) を統計多様体とする. 次で定義される M 上の $(1,2)$-テンソル場 K と $(0,3)$-テンソル場 C をそれぞれ統計構造 (g, ∇) に対する**差テンソル**および **3 次形式**と呼ぶ;

$$K(X,Y) := \nabla_X Y - \nabla^g_X Y, \quad C(X,Y,Z) := (\nabla_X g)(Y,Z).$$

ここで X, Y, Z は M 上の任意のベクトル場である.

差テンソルおよび 3 次形式は定義から対称テンソル場である. また次の関係式が成り立つ ([2]);

$$C(X,Y,Z) = -2g(K(X,Y),Z), \quad (\nabla^g_X C)(Y,Z,W) = -2g((\nabla^g_X K)(Y,Z),W).$$

(M, g) を Riemann 多様体, $\mathcal{A}(M) := \{M$ 上の Affine 接続 $\}$ とし以下を定める;

$$\mathcal{A}_{\mathrm{Stat}}(M,g) := \{\nabla \in \mathcal{A}(M) \mid (M,g,\nabla)\text{: 統計多様体}\},$$
$$\mathcal{K}(M,g) := \{K \in \Gamma(T^{(1,2)}M) \mid K\text{: 対称かつ } g \text{ に関してサイクリック}\},$$
$$S^3(M) := \{C \in \Gamma(T^{(0,3)}M) \mid C\text{: 対称}\}.$$

ただし, 本稿の中で M 上の $(1,2)$-テンソル場 K が

$$g(K(X,Y),Z) = g(K(Y,Z),X) = g(K(Z,X),Y).$$

を満たすとき，g **に関してサイクリック**であると呼ぶことにする．同様に内積付き有限次元実線型空間 (V, g) 上の V 値双線型形式 $K \in \mathrm{Hom}(V \otimes V, V)$ に対しても任意の $X, Y, Z \in V$ に対して上の等式を満たすとき，K は g **に関してサイクリック**であると呼ぶ．Riemann 多様体において，統計構造を定める Affine 接続と差テンソルおよび 3 次形式は次の意味で等価である．

命題 2.2.2. (M, g) を Riemann 多様体とする．次はそれぞれ全単射である；

$$\mathcal{A}_{\mathrm{Stat}}(M, g) \ni \nabla \longmapsto K^{\nabla} \in \mathcal{K}(M, g), \qquad \mathcal{K}(M, g) \ni K \longmapsto C^K \in S^3(M).$$

ただし $K^{\nabla}(X, Y) := \nabla_X Y - \nabla^g_X Y$，$C^K(X, Y, Z) := -2g(K(X, Y), Z)$ とする．

系 2.2.3. Riemann 多様体 (M, g) に対し以下が成立；

$$\mathcal{A}_{\mathrm{Stat}}(M, g) \xleftrightarrow{1:1} \mathcal{K}(M, g) \xleftrightarrow{1:1} S^3(M).$$

Riemann 多様体 (M, g) において，$C \equiv 0 \in S^3(M)$ に対応する $\mathcal{A}_{\mathrm{Stat}}(M, g)$ の元は g に関する Levi-Civita 接続 ∇^g である．統計多様体 (M, g, ∇) において，(g, ∇) に対する差テンソル K を用いることで曲率 R^{∇} は次のように書ける ([2])；

$$R(X, Y) = R^{\nabla^g}(X, Y) + (\nabla^g_X K)_Y - (\nabla^g_Y K)_X + [K_X, K_Y].$$

命題 2.2.4. g^E を $\mathbb{R}^n$ 上の Euclid 計量とし $(\mathbb{R}^n, g^E, \nabla)$ を統計多様体とする．このとき $\mathbb{R}^n$ 上の任意のベクトル場 X, Y に対して以下が成り立つ；

$$R^{\nabla}(X, Y) = [K_X, K_Y].$$

ただし K は統計構造 (g^E, ∇) に対する $\mathbb{R}^n$ 上の差テンソルである．

3　統計 Lie 群と左不変統計構造のモジュライ空間

本節では G を Lie 群とし，$\mathfrak{g}$ によって G の Lie 環を表す．また，

$$\widetilde{\mathfrak{M}}(G) := \{G \text{ 上の左不変 Riemann 計量 }\} \simeq \{\mathfrak{g} \text{ 上の内積 }\},$$

とおく．

3.1　統計 Lie 群

定義 3.1.1 ([3])**.** (I, ∇) を G 上の統計構造とする．I，∇ が共に左不変であるとき (G, I, ∇) を**統計 Lie 群**という．またこのとき (I, ∇) を G 上の**左不変統計構造**と呼ぶ．

確率分布族に対する統計 Lie 群の例としては [3] および [5] を参照されたい．I を $\mathfrak{g}$ 上の内積，$\mathcal{LA}(G) := \{G \text{ 上の左不変 Affine 接続 }\}$ とし以下を定める；

$$\begin{aligned} \mathcal{LA}_{\mathrm{Stat}}(G, I) &:= \{\nabla \in \mathcal{LA}(G) \mid (G, I, \nabla)\text{: 統計 Lie 群 }\}, \\ \mathcal{K}(\mathfrak{g}, I) &:= \{K \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}, \mathfrak{g}) \mid K\text{: 対称かつ } I \text{ に関してサイクリック }\}, \\ S^3(\mathfrak{g}^*) &:= \mathfrak{g}^* \odot \mathfrak{g}^* \odot \mathfrak{g}^* = \{C \in \mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}^* \mid C\text{: 対称 }\}. \end{aligned}$$

ただし $\mathfrak{g}^*$ は $\mathfrak{g}$ の双対空間であり，$\mathfrak{g}$ が n 次元のとき線型空間 $S^3(\mathfrak{g}^*)$ は $\binom{n+2}{3}$ 次元である．このとき系 2.2.3 と同様な次の 1 対 1 対応が存在する；

$$\mathcal{LA}_{\mathrm{Stat}}(G,I) \xleftrightarrow{1:1} \mathcal{K}(\mathfrak{g},I) \xleftrightarrow{1:1} S^3(\mathfrak{g}^*).$$

定義 3.1.2.

$$\mathcal{L}\mathrm{Stat}(G) := \widetilde{\mathfrak{M}}(G) \times S^3(\mathfrak{g}^*),$$

と定める．$\mathcal{L}\mathrm{Stat}(G)$ は G 上の左不変統計構造全体の集合と見なせる．

以下では，G 上の左不変計量と $S^3(\mathfrak{g}^*)$ の元の組に対しても左不変統計構造と呼ぶことにする．

3.2 モジュライ空間

本節では，[6] が導入した Lie 群上の左不変計量のモジュライ空間および，我々が導入する「Lie 群上の左不変統計構造のモジュライ空間」を紹介する．$\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ は $\widetilde{\mathfrak{M}}(G)$ に基底変換によって次のように作用する；

$$F.I := I(F^{-1}\,\cdot\,, F^{-1}\,\cdot\,) \quad (F \in \mathrm{GL}(\mathfrak{g}),\ I \in \widetilde{\mathfrak{M}}(G)).$$

この作用は推移的である．また以下は $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ の部分群である；

$$\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) := \{\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \mid \text{自己同型}\}, \quad \mathbb{R}_{>0} := \{c \cdot \mathrm{id} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \mid c \in \mathbb{R}_{>0}\}.$$

これらの直積を $\mathbb{R}_{>0}\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ とおくと，$\mathbb{R}_{>0}\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ は $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ の部分群とみなせる．従って作用を制限することで $\widetilde{\mathfrak{M}}(G)$ への作用を持つ．

定義 3.2.1 ([6])**.** $\mathbb{R}_{>0}\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ の $\widetilde{\mathfrak{M}}(G)$ への作用による軌道空間を $\mathfrak{PM}(G)$ と書き，これを G 上の左不変計量のモジュライ空間と呼ぶ.

[6] では,

$$\mathbb{R}^\times := \{c \cdot \mathrm{id} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \mid c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\},$$

とし，直積群 $\mathbb{R}^\times\,\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ の $\widetilde{\mathfrak{M}}(G)$ への作用による軌道空間を G 上の左不変計量のモジュライ空間と呼んでいるが，軌道空間として両者は一致することに注意する ([6])．$\mathfrak{PM}(G)$ が 1 点集合となる単連結 Lie 群は [9] によって分類されている．

定理 3.2.2 ([9], [6])**.** $\widetilde{\mathfrak{M}}(G)$ の $\mathbb{R}_{>0}\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$-作用が推移的となる単連結 Lie 群 G は次のうちのどれかと同型である；

$$\mathbb{R}^n, \quad G_{\mathbb{R}\mathrm{H}^n}\ (n \geq 2), \quad H^3 \times \mathbb{R}^{n-3}\ (n \geq 3).$$

我々は，G 上の左不変統計構造全体の空間 $\mathcal{L}\mathrm{Stat}(G)$ に対しても，$\mathbb{R}_{>0}\mathrm{Aut}(G)$-作用を定め，その軌道空間を「$G$ 上の左不変統計構造のモジュライ空間」と定義する；

定義 3.2.3. $\mathbb{R}_{>0}\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ の $\mathcal{L}\mathrm{Stat}(G) = \widetilde{\mathfrak{M}}(G) \times S^3(\mathfrak{g}^*)$ への作用を以下で定める；

$$r\varphi.(I, C) := (r\varphi.I, r\varphi.C) \quad (r\varphi \in \mathbb{R}_{>0}\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}),\ (I, C) \in \mathcal{L}\mathrm{Stat}(G)).$$

ただし $r\varphi.I := r.I(\varphi^{-1}\cdot, \varphi^{-1}\cdot)$，$r\varphi.C := r.C(\varphi^{-1}\cdot, \varphi^{-1}\cdot, \varphi^{-1}\cdot)$ とする．この作用による軌道空間を $\mathcal{ML}\mathrm{Stat}(G)$ と表し，これを G 上の**左不変統計構造のモジュライ空間**と呼ぶ．

ここで統計構造の双対平坦性および共役対称性は，$\mathbb{R}_{>0}\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$-作用によって保たれることに注意する．

注意 3.2.4. $\mathcal{L}\mathrm{Stat}(G)$ は底空間を $\widetilde{\mathfrak{M}}(G)$，ファイバーを $S^3(\mathfrak{g}^*)$ とする自明ベクトル束の構造を持ち，特に $\mathbb{R}_{>0}\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$-同変ベクトル束となる．特に底空間の軌道空間 $\mathfrak{PM}(G)$ が 1 点集合となるとき，$\mathcal{ML}\mathrm{Stat}(G)$ は位相空間として次のように表せる；

$$\mathcal{ML}\mathrm{Stat}(G) = \mathbb{R}_{>0}\mathrm{Aut}(G)\backslash\, \mathcal{L}\mathrm{Stat}(G) = (\mathbb{R}_{>0}\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) \cap \mathrm{O}(\mathfrak{g}))\backslash S^3(\mathfrak{g}^*).$$

ただし，$\mathrm{O}(\mathfrak{g})$ は $\mathfrak{g}$ 上のある内積に関する直交群である．

4 主結果

我々は左不変計量のモジュライ空間が 1 点集合となる 3 つの単連結 Lie 群に対し，それぞれにおける双対平坦および共役対称となる左不変統計構造の分類を行い，モジュライ空間 $\mathcal{ML}\mathrm{Stat}^{\mathrm{DF}}(G)$，$\mathcal{ML}\mathrm{Stat}^{\mathrm{CS}}(G)$ を決定した．結果は表-1, 2 を参照されたい．

4.1 可換 Lie 群 $\mathbb{R}^n$ 上の左不変双対平坦統計構造の分類

本節では，可換 Lie 群 $\mathbb{R}^n$ 上の双対平坦統計構造の分類に関する次の定理の証明を紹介する．

定理 4.1.1. g^E を可換 Lie 群 $\mathbb{R}^n$ における Euclid 計量とし，(g^E, C) を $\mathbb{R}^n$ 上の左不変統計構造とする．以下は同値である；

(a) 左不変統計構造 (g^E, C) は $\mathbb{R}^n$ 上の双対平坦統計構造を誘導する，
(b) $\mathbb{R}^n$ 上の g^E に関する正規直交基底 $\{e_1, \ldots, e_n\}$ と n 個の実数 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ が存在して，

$$C = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (e^i \odot e^i \odot e^i),$$

とかける．ただし $\{e^1, \ldots, e^n\} \subset (\mathbb{R}^n)^*$ は $\{e_1, \ldots, e_n\}$ に対する双対基底である．

V を内積 $\langle , \rangle$ 付き n 次元実ベクトル空間とし，$S^3(V^*)$ の各元 C について，

$$\mathfrak{b}_C := \{K^C_v : V \to V \mid v \in V\},$$

と定める．ただし K^C_v は任意の V の元 u, w に対し，

$$-2\langle K^C_v(w), u\rangle = C(v, w, u),$$

が成り立つものとする．ここで $S^3(V^*)$ の各元 C について，

$$V \ni v \mapsto K_v^C \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V),$$

は線型写像となるので $\mathfrak{b}_C$ は $\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ の線型部分空間である．また次が成り立つ．

命題 4.1.2. $S^3(V^*)$ の各元 C について，$\mathfrak{b}_C$ の各元は V 上の self-adjoint である．すなわち任意に u, v, w に対して次の等式が成り立つ；

$$\langle K_v^C(w), u\rangle = \langle w, K_v^C(u)\rangle.$$

ここで同時対角化を復習しておく．

補題 4.1.3. 線型部分空間 $\mathfrak{a} \subset \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ が次を満たすとする；

(1) $\mathfrak{a}$ の任意の元 f に対し f は V 上の self-adjoint,
(2) $\mathfrak{a}$ は可換.

このとき V 上の正規直交基底 $\{e_1, \ldots, e_n\} \subset V$ が存在して，任意の $1 \leq i \leq n$ と $\mathfrak{a}$ の元 f に対して e_i は f の固有ベクトルとなる．

実際に定理を示す．ただし命題 2.2.4 より以下は同値である；

(1) $\mathbb{R}^n$ 上の左不変統計構造 (g^E, C) が双対平坦統計構造を誘導する,
(2) $\mathfrak{b}_C$ は可換.

Proof. [定理 4.1.1] (a) $\Rightarrow$ (b) のみ示す．補題 4.1.3 より $\mathbb{R}^n$ 上の正規直交基底 $\{e_1, \ldots e_n\}$ であって，任意の $1 \leq i \leq n$ と $\mathfrak{b}_C$ の元 f に対して e_i が f の固有ベクトルとなるようなものが取れる．以下 λ_i を $K_{e_i}^C$ の e_i についての固有値とする．また C は $S^3((\mathbb{R}^n)^*)$ の元より，

$$C = \sum_{s,t,u=1}^{n} C_{stu}(e^s \otimes e^t \otimes e^u) \quad (C_{stu} \in \mathbb{R}),$$

と一意的に書ける．ただし，

$$C_{stu} = C_{sut} = C_{tsu} = C_{ust} = C_{tus} = C_{uts} \quad (s, t, u \in \{1, \ldots, n\}), \tag{4.1}$$

となることに注意．各 $i = 1, \ldots, n$ に対し，

$$\mathbf{C}_i := (C_{ijk})_{j,k} \in \mathrm{M}(n, \mathbb{R}),$$

とおくと，$\mathbf{C}_i$ は線型写像 $-2K_{e_i}^C : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ の基底 $\{e_1, \ldots e_n\}$ に関する表現行列である．いま任意の $1 \leq j \leq n$ に対して $(-2K_{e_i}^C)(e_j) \in \mathbb{R}e_j$ より，$\mathbf{C}_i$ は対角行列である．さらに，

$$C_{iii} = (\mathbf{C}_i \text{の } (i,i) \text{ 成分}) = -2\lambda_i,$$

がわかる．よって以下を示せばよい；

$$\#\{s, t, u\} \neq 1 \implies C_{stu} = 0 \tag{4.2}$$

- (4.2) の証明；$s \neq t = u$ とする．いま C_{stu} は対角行列 $\mathbf{C}_s$ の対角成分である．係数の対称性 (4.1) より，

$$C_{stu} = C_{ust}$$

となる．C_{ust} は対角行列 $\mathbf{C}_u$ の非対角成分であるので特に 0 である．よって $C_{stu} = C_{ust} = 0$ が成り立つ．また $\#\{s, t, u\} = 3$ ならば，C_{stu} はそもそも $\mathbf{C}_s$ の非対角成分なので 0 である．従って (4.2) が成り立つ．

以上より，

$$C = \sum_{i=1}^{n} -2\lambda_i (e^i \odot e^i \odot e^i)$$

と書ける． □

参考文献

[1] S. Amari and H. Nagaoka. Methods of information geometry, volume 191. American Mathematical Soc., 2000.

[2] N. Bokan, K. Nomizu, and U. Simon. Affine hypersurfaces with parallel cubic forms. Tohoku Mathematical Journal, Second Series, 42(1):101–108, 1990.

[3] H. Furuhata, J.-i. Inoguchi, and S. Kobayashi. A characterization of the alpha-connections on the statistical manifold of normal distributions. Inf. Geom., 4(1):177–188, 2021.

[4] T. Hashinaga, H. Tamaru, and K. Terada. Milnor-type theorems for left-invariant riemannian metrics on lie groups. Journal of the Mathematical Society of Japan, 68(2):669–684, 2016.

[5] S. Kobayashi and Y. Ohno. A characterization of the alpha-connections on the statistical manifold of multivariate normal distributions. arXiv preprint arXiv:2302.07471v2, 2023.

[6] H. Kodama, A. Takahara, and H. Tamaru. The space of left-invariant metrics on a lie group up to isometry and scaling. manuscripta mathematica, 135:229–243, 2011.

[7] Y. Kondo. A classification of left-invariant pseudo-riemannian metrics on some nilpotent lie groups. Hiroshima Mathematical Journal, 52(3):333–356, 2022.

[8] A. Kubo, K. Onda, Y. Taketomi, and H. Tamaru. On the moduli spaces of left-invariant pseudo-riemannian metrics on lie groups. Hiroshima Mathematical Journal, 46(3):357–374, 2016.

[9] J. Lauret. Degenerations of lie algebras and geometry of lie groups. Differential Geometry and its Applications, 18(2):177–194, 2003.

[10] S. L. Lauritzen. Statistical manifolds. Differential geometry in statistical inference, 10:163–216, 1987.