Odd colorings of Biplanar graphs

名古屋大学大学院 多元数理科学研究科
北野草太 (Sota KITANO) *

概要

Graph G の odd coloring とは proper coloring φ で,「任意の non-isolated vertex $v \in V(G)$ に対してある color c が存在して, $|\varphi^{-1}(c) \cap N(v)|$ が奇数となる」という条件を満たすものである. Graph G の odd coloring に必要な最小の色数を G の odd chromatic number と呼び, $\chi_o(G)$ と書く. 本稿では biplanar graph の odd chromatic number について, biplanar graph G が $\delta(G) \geq 3$, $\mathrm{gir}(G) \geq 6$ を満たすならば $\chi_o(G) \leq 12$ という定理を証明する.

1 グラフ理論について

初めに, グラフ理論の基礎的な用語について定義する.

有限集合 V と V の異なる 2 元からなる部分集合の族 E の対 $G = (V, E)$ を simple graph と呼ぶ. simple でない graph も存在するが, 本稿では simple graph しか扱わないので単に graph と書いたときは simple graph を指すものとする. Graph $G = (V, E)$ の集合 V を vertex set, 集合 E を edge set と呼びそれぞれ $V(G)$, $E(G)$ と書く. $V(G)$ の元を vertex, $E(G)$ の元を edge と呼ぶ. さらに $\{u, v\} \in E(G)$ を単に uv あるいは vu と書く. Vertex set の大きさ $|V(G)|$ を graph G の order と呼び, edge set の大きさ $|E(G)|$ を graph G の size と呼ぶ. G の edge $e = uv \in E(G)$ について, vertex u と v は隣接するという. ある vertex v に隣接する vertex の集合を v の neighbor と呼び $N(v)$ と書く. vertex v に隣接する vertex の数 $|N(v)|$ を v の degree と呼び $d(v)$ と書く.（一般的には $\deg v$ や $\deg_G(v)$ などと書かれることも多い.） $d(v) = 0$ を満たす頂点を isolated vertex と呼ぶ. Graph G の持つ maximum degree を $\Delta(G)$ と書き, minimal degree を $\delta(G)$ と書く. さらに G の average degree を $\tilde{d}(G) \left(= \frac{\sum_{v \in V} d(v)}{|V(G)|}\right)$ と書く. Degree が a となる vertex を a-vertex と呼ぶ.

Graph G と graph H が $V(H) \subset V(G)$ かつ $E(H) \subset E(G)$ を満たすとき, H を G の subgraph と呼ぶ. graph G の subgraph H が任意の $u, v \in V(H)$ に対して, $uv \in E(G)$ ならば $uv \in E(H)$ を満たすとき, H を G の induced subgraph と呼ぶ. H が G の subgraph であることを $H \subset G$ と表記し, vertex set $V' \subset V(G)$ による induced subgraph を $G[V']$ と表記する. graph G が graph H を induced subgraph に含まないとき, G は H-free であるという. 任意の頂点間に path が存在する

* E-mail:sota.kitano.c3@math.nagoya-u.ac.jp

graph を connected graph と呼ぶ. graph G の極大な connected subgraph を G の component と呼ぶ.

有限個の vertex の列 $W = (v_1, \cdots, v_n)$ で任意の $1 \leq i \leq n-1$ に対して $v_i v_{i+1} \in E(G)$ のとき, W を walk と呼ぶ. (walk の定義に無限列を含める場合もある.) 全ての vertex が互いに異なる walk を path (道) と呼ぶ. また, $v_1 = v_n$ かつそれ以外の vertex が互いに異なる walk を cycle と呼ぶ. walk $W = (v_1, \cdots, v_n)$ に対して walk の length を $n-1$ と定める.

Order が 1 以上の graph から vertex v_1, $\cdots$, v_n と $v_i (1 \leq i \leq n)$ に接続する edge を全て取り除いた subgraph を $G - \{v_1, \cdots, v_n\}$ で表す. 同様に size が 1 以上の graph から edge e_1, $\ldots$, e_n を取り除いた graph を $G - \{e_1, \cdots, e_n\}$ で表す. $n = 1$ のときは単に $G - v$, $G - e$ と表記する. Connected graph G において, 任意の $v_1, \cdots, v_{k-1}$ に対して $G - \{v_1, \cdots, v_{k-1}\}$ $(k \geq 2)$ が connected のとき, G は k-connected (k-連結) であるという.

ある edge $e = uv$ に対して, 新たな vertex u を追加して edge e を path (u, w, v) に置き換える操作 edge e の subdivide (細分) と呼ぶ.

任意の異なる vertex の間に edge が存在する graph を complete graph と呼び, order n の complete graph を K_n と書く. 特に K_1 を trivial graph と呼ぶ.

異なる edge 同士が交わらないように平面上に vertex と edge を配置できる graph を planar graph と呼ぶ. G の異なる edge 同士が交わらないような配置を G の埋め込みと呼ぶ. planar graph G と G の埋め込み $\tilde{G}$ は同一視できるので, $\tilde{G}$ を plane graph と呼ぶ. 埋め込み $\tilde{G}$ は平面をいくつかの領域に分割する. これらの領域を face と呼ぶ. それぞれの face を形成している walk を boundary と呼ぶ. face f の boundary の length を face の degree と呼び $d(f)$ と書く.

Graph G の vertex set $V(G)$ から $\mathbb{N}$ への map $\varphi : V(G) \to \mathbb{N}$ で, 任意の $uv \in E(G)$ に対して $\varphi(u) \neq \varphi(v)$ を満たすものを, G の proper (vertex) coloring と呼び, $\varphi(V(G))$ の元を color と呼ぶ. つまり, graph の各頂点に対して, 隣接する頂点が異なる color になるような彩色のことである. $|\varphi(V(G))| = k$ となるとき, φ を proper k-coloring と呼ぶ. graph G が proper k-coloring を持つとき, G は k-colorable であるという. G が proper k-coloring を持つような k の中で最も小さい整数を chromatic number と呼び, $\chi(G)$ と書く.

2 導入

2.1 Odd coloring の定義

この章では Petruševski と Škrekovski によって導入された odd coloring の定義と planar graph の odd coloring を紹介する [4]. Proper coloring に対して parity condition を追加した vertex coloring を odd coloring と呼ぶ.

定義 2.1. (Odd coloring) Graph G の proper coloring φ が odd coloring であるとは, 「任意の non-isolated vertex $v \in V(G)$ に対してある color c が存在して, $|\varphi^{-1}(c) \cap N(v)|$ が奇数となる」という parity condition を満たすことを言う. Graph G の odd coloring に必要な最小の色数を odd chromatic number と呼び, $\chi_o(G)$ と書く.

定義より $\chi(G) \leq \chi_o(G)$（$\chi(G)$ は G の chromatic number）が常に成り立つ.

Odd coloring の例を見る前にいくつか記号を導入する. 写像 $\varphi : V(G) \to \{1, \cdots, k\}$ が G の coloring のとき, $v \in V(G)$ に対して, $L^*_\varphi(v) = \big\{c \in \{1, \cdots, k\} : |\varphi^{-1}(c) \cap N(v)| \equiv 1(\mathrm{mod}.2)\big\}$ と定義する. すなわち, $L^*_\varphi(v)$ は v の近傍で奇数回登場する color の集合である. また, $L^*_\varphi(v) \neq \emptyset$ のとき, 任意に $c \in L^*_\varphi(v)$ を選び, $\varphi^*(v)$ と書く. $L^*_\varphi(v) = \emptyset$ のときは $\varphi^*(v) = 0$ と定める.

例 2.2. (Odd coloring の例) 図 1 の graph G は, $\chi_o(G) = 4$ であり, φ_1 は odd coloring だが, φ_2 は v_3 が parity condition を満たさないので odd coloring ではない.

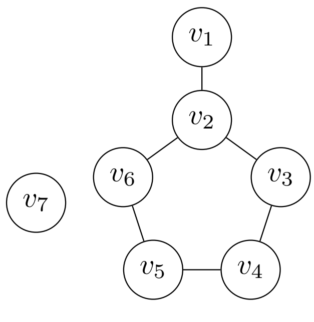

図 1 Graph G

v	$\varphi_1(v)$	$L^*_{\varphi_1}(v)$	$\varphi_1^*(v)$	$\varphi_2(v)$	$L^*_{\varphi_2}(v)$	$\varphi_2^*(v)$
v_1	1	$\{2\}$	2	1	$\{2\}$	2
v_2	2	$\{1\}$	1	2	$\{1\}$	1
v_3	1	$\{2,3\}$	3	1	$\{\}$	0
v_4	3	$\{1,4\}$	1	2	$\{1,3\}$	1
v_5	4	$\{1,3\}$	1	3	$\{1,2\}$	2
v_6	1	$\{2,4\}$	4	1	$\{2,3\}$	2
v_7	1	$\{\}$	0	1	$\{\}$	0

図 2 Graph G の proper colorings φ_1, φ_2

2.2　Planar graph の odd coloring

Odd coloring は特に planar graph について研究されている．この節では planar graph の odd coloring について紹介する．Petruševski と Škrekovski は odd coloring を導入した論文内で以下の予想を立てた [4].

予想 2.3. 任意の planar graph G に対して, $\chi_o(G) \leq 5$.

現在のステートメントは以下の通りで, この予想の完全な解決には至っていない.

定理 2.4. ([3]) 任意の planar graph G に対して, $\chi_o(G) \leq 8$.

以下のは girth（graph に含まれる最小の cycle の長さ）に制限を付け, 予想 2.3を部分的に解決したものである.

定理 2.5. ([1]) 任意の planar graph G に対して, $\mathrm{gir}(G) \geq 5$ ならば $\chi_o(G) \leq 6$.

この定理の証明に用いられた補題は本稿の主定理の証明でも重要な役割を果たした．これについては後述する.

3　主定理

Biplanar graph は適切な辺の分割によって二つの planar graph によって表せる graph であり, planar graph と関係の深い graph である.

定義 3.1. (Biplanar graph) Graph G が二つの planar graph の辺和で表せるとき, G を biplanar graph と呼ぶ．すなわち, $E(G) = E_1 \cup E_2$ を満たす集合 E_1, E_2 が存在し, $(V(G), E_1)$, $(V(G), E_2)$ が共に planar graph となることを言う.

例 3.2. (Biplanar graph の例) 図 3の $K_{3,3}$ は planar graph ではないが, biplanar graph である．実際, $K_{1,3} + 2K_1$ と $K_{2,3} + K_1$ に分割することで二つの planar graph の辺和として表せる.

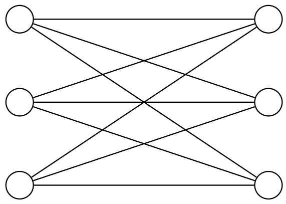

図 3　$K_{3,3}$

Planar graph に対する予想 2.3を biplanar graph に拡張して考察してみる.

問題 3.3. ある正の数 k が存在して, 任意の biplanar graph G に対して $\chi_o(G) \leq k$ となるか.

実はこの問いの答えは偽である. なぜなら complete graph K_n の各辺を丁度一回 subdivide した graph K_n^* の odd chromatic number は n だが, この graph は任意の n について biplanar graph となるからである.

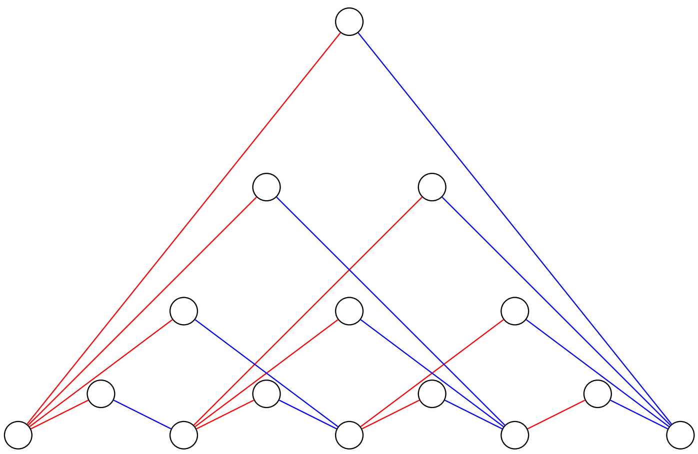

図 4　K_5^* が biplanar graph であることを示す図

例えば K_5^* は図 4に示すように赤の辺と青の辺に分割することでそれぞれ planar graph となる. また, 一般の K_n^* についても同様の分割によって biplanar graph であることを示すことができる.

以上から biplanar graph 全体の族について odd chromatic number の上限は存在しない. 一方でこの族の chromatic number の上限は 12 以下であることが分かっている. そこで以下の問題を考える.

問題 3.4. Biplanar graph 全体の族にどのような条件を課せば odd chromatic number の上限が 12 以下になるか.

この疑問に対して本稿では以下を主定理として示す. この定理は筆者のオリジナルの結果である.

定理 4.8. 任意の biplanar graph G について, $\delta(G) \geq 3$, $\mathrm{gir}(G) \geq 6$ ならば $\chi_o(G) \leq 12$.

この定理によって少なくとも $\delta(G) \geq 3$, $\mathrm{gir}(G) \geq 6$ という条件を課せば $\chi_o(G) \leq 12$ であることは示されたが, これ以上に条件を緩めることができるかについては分かっていない.

4 主定理の証明

主定理の証明には二つの補題と放電法を用いる. 準備として odd c^+-critical graph を定義する.

定義 4.1. (Odd c^+-critical graph) Graph G が $\chi_o(G) \geq c$ かつ任意の proper subgraph H に対して $\chi_o(H) < c$ を満たすとき, G を odd c^+-critical graph と呼び, odd c^+-critical graph の全体を $\mathcal{S}_c$ と書く.

そもそも一般に graph G と subgraph H に対して $\chi_o(H) \leq \chi_o(G)$ が成り立つとは限らないが, 定理を証明する際には odd c^+-critical graph という極小性を持った graph を考えることは有用である.

例 4.2. (Odd c^+-critical graph の例) 図 5の C_5 は odd 5^+-critical graph である. 実際, $\chi_o(C_5) = 5$ であるが, 任意の proper subgraph H について $\chi_o(H) < 5$ となる.

一つ目の補題は odd c^+-critical の基本的な構造について述べたものである.

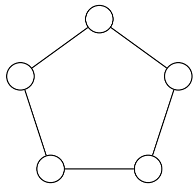

図 5　C_5

補題 4.3. $c \geq 4$, $G \in \mathcal{S}_c$ とする．以下が成り立つ．
(1) 任意の $v \in V(G)$ に対して, $d(v) \equiv 0(\mathrm{mod}.2)$ または $d(v) > \lfloor \frac{c}{2} \rfloor$.
(2) 任意の $e = xy \in E(G)$ に対して, $d(x) \equiv d(y)(\mathrm{mod}.2)$ ならば $\max\{d(x), d(y)\} > \frac{c-1}{2}$ または $d(x) = d(y) = \frac{c-1}{2}$.

二つ目の補題を紹介する前にいくつかの記号を定義する．

次数が d となる頂点を d-vertex と呼ぶ．また, ある頂点 v が d-vertex と隣接するとき, この頂点を (u に対する)d-neighbor と呼ぶ．$N(v)$ に含まれる d-vertex 全体の集合を $N_d(v)$ と書く．頂点 v が奇次数または 2-neighbor を持つとき, v を easy vertex と呼ぶ．また, 頂点 v に隣接する easy vertex の集合を $N_{ez}(v)$ と書く．

補題 4.4は定理 2.5を証明する際に利用された．主定理の証明ではこの補題を一般化したものを利用する．

補題 4.4. ([1]) $c \geq 5$ とする． $G \in \mathcal{S}_c$ とすると, 任意の easy vertex v に対して, $2d(v) \geq |N_2(v)| + |N_{ez}(v)| + c - 1$.

補題 4.4を一般化するため, まずは easy vertex の定義を一般化する．

定義 4.5. (n-easy vertex) 頂点 v が奇次数であるか, または 2-neighbor, $\cdots$, $2n$-neighbor のいずれかを持つとき, v を n-easy vertex と呼ぶ．また, 頂点 v に隣接する n-easy vertex の集合を $N_{nez}(v)$ と書く．

補題 4.4を一般化した以下の補題を用意する．主定理の証明では $n = 2$ の場合を利用する．

補題 4.6. $n \in \mathbb{N}$, $c \geq 4n + 1$ とする． $G \in \mathcal{S}_c$ とすると, 任意の n-easy vertex v に対して, $2d(v) \geq (\sum_{k=1}^{n} |N_{2k}(v)|) + |N_{nez}(v)| + c - 1$.

主定理の証明には放電法を用いた. これは planar graph に関する Euler's formula から定まる普遍量に注目し, 各頂点, 面, コンポーネントに電荷を定義し, その移動によって矛盾を引き起こす手法である.

定理 4.7. (Euler's formula) Plane graph G について, 以下が成り立つ. ただし, $F(G)$ は G の面の集合, $C(G)$ はコンポーネントの集合である.

$$|V(G)| - |E(G)| + |F(G)| - |C(G)| = 1$$

Plane graph G に対して, $X(G) = V(G) \cup F(G) \cup C(G)$ とする. 写像 $\mu_G : X(G) \to \mathbb{Z}$ を以下で定める.

$$\mu_G(x) = \begin{cases} 2d(x) - 6 & (x \in V(G)) \\ d(x) - 6 & (x \in F(G)) \\ 6 & (x \in C(G)). \end{cases}$$

この写像によって与えられる値を各頂点, 面, コンポーネントの持つ初期電荷とみなす. このとき,

$$\begin{aligned} &= \sum_{f \in F(G)} (d(f) - 6) + \sum_{v \in V(G)} (2d(v) - 6) + \sum_{c \in C(G)} 6 \\ &= 2|E(G)| - 6|F(G)| + 4|E(G)| - 6|V(G)| + 6|C(G)| \\ &= -6(|V(G)| - |E(G)| + |F(G)| - |C(G)|) \\ &= -6. \end{aligned}$$

つまり, 電荷の和 $S = \sum_{x \in X(G)} \mu_G(x)$ は定数である.
定理 4.8の証明では, 与えられた初期電荷に対して放電アルゴリズムを定めて電荷を移動させ, 最終的に各頂点, 面, コンポーネントの持つ電荷が全て 0 以上であることを示し矛盾を導く.

定理 4.8. 任意の biplanar graph G について, $\delta(G) \geq 3$, $\mathrm{gir}(G) \geq 6$ ならば $\chi_o(G) \leq 12$.

証明. Biplanar graph $G \in \mathcal{S}_{13}$ が $\delta(G) \geq 3$, $\mathrm{gir}(G) \geq 6$ を満たすとする.
G は二つの planar graph の辺和として表せるので, 定この二つの planar graph G_1, G_2 の埋め込みを固定し, それぞれについて μ_{G_1}, μ_{G_2} を定義する. $S = \sum_{x \in X(G_1)} \mu_{G_1}(x) + \sum_{x \in X(G_2)} \mu_{G_2}(x)$ と定めると, $S = -12$ である.

以下の放電アルゴリズムに従って電荷の移動を行う.
・$d(v) = 4$ のとき, $N_G(v)$ のそれぞれ頂点から v に電荷を 1 移動させる.

放電後に $x \in X(G_i)$ が持つ電荷を $\mu^\star_{G_i}(x)$ で表す. 以下の二点を証明する.
(a) 任意の $x \in F(G_i) \cup C(G_i)$ に対して $\mu^\star_{G_i}(x) \geq 0$.
(b) 任意の $v \in V(G)$ に対し $\mu^\star(v) := \mu^\star_{G_1}(v) + \mu^\star_{G_2}(v) \geq 0$.

(a-1)$f \in F(G_i)$ とする．$\mathrm{gir}(G) \geq 6$ より $\mu^{\star}_{G_i}(f) = \mu_{G_i}(f) \geq 6 - 6 = 0$.

(a-2)$c \in C(G_i)$ とする．$\mu^{\star}_{G_i}(c) = \mu_{G_i}(c) = 6$ より明らか.

(b)$v \in V(G)$ とする．
任意の頂点 v に対して $\mu(v) := \mu_{G_1}(v) + \mu_{G_2}(v) = 2d(v) - 12$ が常に成り立つことに注意する．$d(v) < 12$ かつ $N_4(v) \neq \emptyset$ となる場合のみを考えればよい．
(1)$d(v) = 4, 6$ のとき, $N_4(v) \neq \emptyset$ と仮定する．$v \in V_{2ez}$ なので補題 4.6より, $0 \geq 2d(v) - 12 \geq |N_4(v)|$ なのでこれは $N_4(v) \neq \emptyset$ と矛盾．よって, $d(v) = 4, 6$ ならば $N_4(v) = \emptyset$.
(2)$7 \leq d(v) \leq 11$ のとき, 補題 4.6より $|N_4(v)| \leq 2d(v) - 12 = \mu(v)$．よって, $\mu^{\star}(v) = \mu(v) - |N_4(v)| \geq 0$.

以上より任意の $x \in X(G_i)$ に対して $\mu_{G_i}(x) \geq 0$ となるが, $S = -12$ よりこれは矛盾．よって G の極小性から定理 4.8が得られる． □

5 主定理の一般化

定理 4.8を thickness に関して一般化する．

定義 5.1. (thickness) Graph G に対して, 以下を満たす最小の t を G の thickness と呼び, $\theta(G)$ と書く．
(1) 互いに素な集合 $E_1, \cdots, E_t$ が存在して $E(G) = E_1 \cup \cdots \cup E_t$.
(2) 任意の $1 \leq i \leq t$ に対して $(V(G), E_i)$ が planar graph.

定義より $\theta(G) \leq 2$ の graph は biplanar graph である．このように thickness は planar graph や biplanar graph の概念を一般化したものなので, 定理 4.8を thickness について一般化するのは自然な発想である．

定理 5.2. 任意の graph G に対して, $\delta(G) \geq 2\theta(G) - 1$, $\mathrm{gir}(G) \geq 6$ ならば $\chi_o(G) \leq 6\theta(G)$.

参考文献

[1] Cho, E.-K., Choi, I., Kwon, H., & Park, B. (2023). Odd coloring of sparse graphs and planar graphs. *Discrete Mathematics, 346*(5), 113305. https://doi.org/10.1016/j.disc.2022.113305

[2] Kainen, P.C. (1974). Some recent results in topological graph theory. In R.A. Bari & F. Harary (Eds.), *Graphs and Combinatorics* (Lecture Notes in Mathematics, vol. 406). Springer, Berlin, Heidelberg. https://doi.org/10.1007/BFb0066436

[3] Petr, J., & Portier, J. (2022). The odd chromatic number of a planar graph is at most 8. arXiv:2201.12381.

[4] Petruševski, M., & Škrekovski, R. (2022). Colorings with neighborhood parity condition. *Discrete Applied Mathematics, 321*, 385-391. https://doi.org/10.1016/j.dam.2022.07.018