初期値の台が非コンパクトな空間重み付き一次元半線形波動方程式の解析

東北大学大学院理学研究科数学専攻 博士 2 年
北村駿介 (Shunsuke KITAMURA) *

概要

非線形項に空間変数の重みを持つ一次元半線形波動方程式の, 非コンパクトな台を持つ初期値に対する初期値問題の時間局所解について, 時間局所解が存在しない, つまり瞬間爆発する初期値の条件とその条件の最適性について結果が得られた. 減衰重みの場合は Wakasa(2017)[23] において, 十分小さな初期値に対して有界性や可積分性の条件を加えて時間局所解の存在とその最大存在時間の評価が得られている. その一方で, 重みが増大する場合は空間遠方における解の値を制御できなくなる. このような状況では時間局所解の存在すら困難であると予想でき, 実際その予想の補強として, Kurokawa-Takamura(2003)[12] では空間重みの無い 2 次元以上の半線形波動方程式の初期値が動径方向無限遠で発散する場合において, いかなる時間局所解も存在しないことが示されている.

1 導入

偏微分方程式論においては, その研究の方向性として, 具体的な事象をモデル化した方程式に対して詳細に解析する場合と, これらの背景や導出過程に左右されない強固な理論, いわゆる一般論を構築する方針があると考えられる. これらは相互に作用しながら発展を続けており, 今回の講演では一般論の構築を見据えたモデル方程式の条件を変えた場合の解析の結果について述べる. 最初に一般論とはどういう形で記述されどのような意味を持つのかを述べた後, モデル方程式が担う役割について述べ, そして今回の主結果である条件を変えた場合の解析の結果について述べる.

1.1 一次元非線形波動方程式の一般論

一次元の非線形波動方程式の初期値問題

$$\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=H(u,u_x,u_t,u_{xx},u_{xt}) & \text{in} \quad \mathbf{R}\times(0,\infty), \\ u(x,0)=\varepsilon f(x),\ u_t(x,0)=\varepsilon g(x), & x\in\mathbf{R} \end{cases} \tag{1}$$

に対して, 添え字は偏微分を表わすとし, 既知関数 H,f,g と初期値の大きさを表わすパラメータ ε を H,f,g ; 十分滑らか, $\mathrm{supp}\{f,g\}$; コンパクト, $0<\varepsilon\ll 1$ と仮定する. 初期値問題 (1) の解の最大存

* E-mail:shunsuke.kitamura.s8@dc.tohoku.ac.jp 本研究は JST 科学技術イノベーション創出に向けた大学フェローシップ創設事業 JPMJFS2102 の支援を受けたものである.

在時間を lifespan として, $\widetilde{T}(\varepsilon)$ という記号で下記のように定義する.

$$\widetilde{T}(\varepsilon) := \sup\{t>0; \text{適当に固定した } (f,g) \text{ に対して (1) の古典解 } u(x,t) \text{ が存在する }\}.$$

lifespan について, $\widetilde{T}(\varepsilon)=\infty$ を満たすならば時間大域解を持つと言い, $0<\widetilde{T}(\varepsilon)<\infty$ を満たす, つまり有限時間で解 u が発散するならば時間局所解を持つと言う. また, 解析を行う上で初期値に対して $(f,g)\equiv 0 \Rightarrow u\equiv 0$ が成り立たなければ解の一意性が崩れてしまうので, $H(0)=0$ を要請する. この条件は H をマクローリン展開したときに定数部分が 0 という条件と同値であり, 高次の剰余項を R_{n+1} として展開すると次のようになる.

$$H(u,u_x,u_t,u_{xx},u_{xt}) = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{1}{\alpha!}(u\partial_{\lambda_0}+u_x\partial_{\lambda_1}+u_t\partial_{\lambda_2}+u_{xx}\partial_{\lambda_3}+u_{xt}\partial_{\lambda_4})^{\alpha} H(\hat{\lambda})\Big|_{\hat{\lambda}=0} + R_{n+1}.$$

この展開は初期値問題 (1) の ε が十分小さいことから解 u も小さいので成立する. 上記において $|\alpha|=1$ の項は線形より, この項を入れると線形部分が波動方程式では無くなる. 従って解 u は小さいので, 非線形項の主な部分は $|\alpha|\geq 2$ の低次の項であると考えることができる. このような考察のもと, Li, Yu and Zhou[21] によって初期値問題 (1) に対して次のような古典解の長時間存在が示されている.

定理 1.1 初期値問題 (1) が自然数 α を用いて $\hat{\lambda}=0$ の近傍において $H(\hat{\lambda})=O(|\hat{\lambda}|^{1+\alpha})$ を満たすとき, ある正定数 $\varepsilon_0=\varepsilon_0(f,g,\alpha)$ が存在して, 任意の $0<\varepsilon\leq\varepsilon_0$ を満たす ε に対して下記が成立する.

$$\widetilde{T}(\varepsilon) \geq \begin{cases} C\varepsilon^{-\alpha/2} & \text{in general case,} \\ C\varepsilon^{-\alpha(1+\alpha)/(2+\alpha)} & \text{if } \displaystyle\int_{\mathbf{R}} g(y)dy = 0, \\ C\varepsilon^{-\min\{\beta_0/2,\alpha\}} & \text{if } \quad \partial_u^{\beta} H(\hat{0}) = 0 \text{ for } 1+\alpha \leq \forall\beta \leq \beta_0. \end{cases}$$

ここで, $C>0$ は ε に因らない定数である.

この定理 1.1 の H に対する原点近傍の条件はまさに考察から得られた非線形項の低次の項について条件付けをしている. また, 定理 1.1 の場合分けは最初の 2 つは強 Huygens の原理により, $\displaystyle\int_{\mathbf{R}} g(y)dy=0$ の場合は初期値の影響が空間次元が高次元の場合と同じようになることに起因する. 最後の場合分けは非線形項に u の冪が低次で入るときは単純なエネルギー法によって解を構成できず, 別の不等式を使う際に逐次近似の評価が悪くなることに起因する.

また, $f\equiv g\equiv 0$ のとき, 解の一意性より (1) の解は $u\equiv 0$ となり $\widetilde{T}(\varepsilon)=\infty$ を満たす. 従って, 時間局所解を持つ (1) に対して $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0}\widetilde{T}(\varepsilon)=\infty$ が成り立つことが予想できるため, lifespan の下から ε^{-1} の関数によって評価されるのは自然である. このような, lifespan の ε の関数による下からの評価を一般論という.

1.2 モデル方程式の解析による一般論の最適性と一般論の改良

この一般論に対して, さらに良い ε のオーダーの関数では評価できない, つまり一般論が最適な評価であることを示す為には, 特別な初期値と非線形項を用いて同じ ε のオーダーの関数によって lifespan が上から評価されることを示せば良い. 特に最適性は, 滑らかさを犠牲にして詳細な解析が

可能になる $H=|u|^p$ や $H=|u_t|^p$ $(p>1)$ と定義したモデル方程式によって示される．定理 1.1 の最初の 2 つの場合は Zhou[24] により非線形項を $H=|u|^{1+\alpha}$ と，最後の場合に対しては Zhou[25] により非線形項を $H=|u|^\gamma|u_t|^{1+\alpha-\gamma}$ $(0\leq\gamma\leq\alpha)$ と置くことによって最適性が示されている．

さらに，Morisawa, Sasaki and Takamura[22] によるモデル方程式 $H=|u_t|^p+|u|^q(p,q>1)$ の解析および Kido, Sasaki, Takamatsu and Takamura[13] によるモデル方程式 $H=|u_t|^p|u|^q+|u|^r(p,q,r>1)$ によって，空間一次元の一般論のより細かい場合分けが必要であることが示され，実際に Takamatsu[15] によって，一次元非線形波動方程式の一般論の分類が不十分であり，次の場合分けを追加すべきであることが示された．

$$\widetilde{T}(\varepsilon)\geq C\varepsilon^{-\beta_0(1+\alpha)/(2+\beta_0)} \text{ if } \int_{\mathbf{R}} g(y)dy=0 \text{ and } \partial_u^\beta H(\hat{0})=0 \text{ for } 1+\alpha\leq\forall\beta\leq\beta_0<2\alpha.$$

以上のことから，モデル方程式の解析は一般の場合の解の存在性を議論する上で最適性を保証するものでありながら，モデル方程式の lifespan 評価を行うことによって一般の場合も解析できる場合もあり，さらにモデル方程式の lifespan 評価から非線形項が一般の場合の最適な lifespan 評価を予想することができる．つまり，モデル方程式の解析と一般論の構築は表裏一体の関係にあると言える．

注意点として，一次元の場合には任意の指数 $p>1$ に対して解が有限時間爆発することが Kato[6] によって示されているが，空間次元 n が 2 以上の場合は，$(n-1)p^2-(n+1)p-2=0$ の正の根として定義される Strauss 指数 $p_0(n)$ より大きい場合には時間大域解が得られることが John[5]$(n=3)$, Glassey[4]$(n=2)$, Georgiev, Lindblad and Sogge[3]$(n\geq4)$ によって示されている．

1.3　初期値の台が非コンパクトな場合

一般論とその最適性では解の有限伝播性が重要な役割を果たしており，初期値の台がコンパクトであるという条件を課すことによって空間無限遠方での影響を無視して非線形項の冪の可積分性の影響を詳細に解析することが出来る．逆に言えば，初期値の台が非コンパクトである場合には空間無限遠方での解のコントロールが必要になり，空間次元が 2 以上で時間大域解が得られる非線形項のオーダーであっても初期値の減衰オーダーによっては有限時間で解が爆発する例が存在する．

空間次元 n が 2 以上の場合は詳しく解析がされており，(1) の $H=|u|^p$ の場合について Asakura[2] によって初期値の減衰のオーダーによる解が有限時間爆発する条件及び時間大域解が得られる条件の予想が下記のように示された．

・初期値 (f,g) に対してある $C>0$ が存在して

$$f(x)\equiv0,\quad g(x)\geq\frac{C}{(1+|x|)^{1+\kappa}} \text{ with } 0<\kappa<\frac{2}{p-1}$$

のとき，時間大域解は得られない．

・$p>p_0(n)$ かつ初期値 (f,g) に対して

$$(1+|x|)^{1+\kappa}\left(\sum_{|\alpha|\leq[n/2]+2}|\nabla_x^\alpha f(x)|+\sum_{|\beta|\leq[n/2]+1}|\nabla_x^\beta g(x)|\right) \text{ with } \kappa\geq\frac{2}{p-1}$$

が十分小さいとき，時間大域解が得られる．

この予想は Agemi and Takamura[1], Kubota[11], Tsutaya([18], [19], [20]), Takamura[16], Kubo[7], Kubo and Kubota([8],[9]) によって肯定的に示された．その後, Takamura, Uesaka and Wakasa[17] によって, 初期値のオーダーとして最適な時間大域解が得られる十分条件を下記のように改良した.

$$(1+|x|)^{1+\kappa}\left(\frac{|f(x)|}{1+|x|}+\sum_{1\le|\alpha|\le[n/2]+2}|\nabla_x^{\alpha}f(x)|+\sum_{|\beta|\le[n/2]+1}|\nabla_x^{\beta}g(x)|\right)\ll 1 \text{ with } \kappa\ge\frac{2}{p-1}$$

これは初期状態 f のオーダーが改良されている．また, Kurokawa and Takamura[12] において, 初期値が

$$f(x)\equiv 0,\quad g(x)\ge\frac{\phi(x)}{(1+|x|)^{1+2/p-1}} \text{ where } \lim_{|x|\to\infty}\phi(x)=\infty \ \&\ \phi:\text{radial}$$

のとき, つまり臨界冪より log 増大などにより僅かに減衰が足りない場合において, 時間大域解が得られないことを示している．さらに, $g(x)\ge\phi(x)$ の場合, つまり無限遠方で発散している場合はそもそも時間局所解すら得られないということを系として示している.

以上が空間次元 n が 2 以上の場合であり, $n=1$ の場合はそもそも時間大域解が得られないという観点から解析が少なく, 次のような非線形項に空間変数による減衰を加えた方程式に対して解析が行われている.

$$\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=\dfrac{|u|^p}{\langle x\rangle^{1+a}} & \text{in } \mathbf{R}\times(0,\infty),\\ u(x,0)=\varepsilon f(x),\quad u_t(x,0)=\varepsilon g(x), & x\in\mathbf{R}, \end{cases}\tag{2}$$

ここで, $p>1$ かつ $a\in\mathbf{R}$, $\langle x\rangle:=\sqrt{1+x^2}$ であり, ε は十分小さく $(f,g)\in C^2(\mathbf{R})\times C^1(\mathbf{R})$ と仮定する．最初にこの方程式を解析したのは Suzuki[14] であり, $a\ge -1$ の場合において (2) の非線形項 $|u|^p$ の代わりに符号変化を許す $|u|^{p-1}u$ としたものを解析し, 空間 1 次元であるにも関わらず奇関数かつある程度減衰する初期値に対して時間大域解の存在をある p の範囲で示した．後に Kubo & Osaka & Yazici[10] によって, その p の範囲が最適と思われるところまで拡張された．また, Wakasa[23] は (2) で初期値に対して $f\in L^\infty(\mathbf{R})$, $g\in L^1(\mathbf{R})$ を仮定して, (2) の lifespan を $T(\varepsilon)$ とすると,

$$T(\varepsilon)\sim\begin{cases} C\varepsilon^{-(p-1)/(1-a)} & \text{for } -1\le a<0,\\ \phi^{-1}(C\varepsilon^{-(p-1)}) & \text{for } a=0,\\ C\varepsilon^{-(p-1)} & \text{for } a>0 \end{cases}$$

を得た．ここで, ϕ^{-1} は関数 $\phi(s):=s\log(2+s)$ の逆関数である．また, $T(\varepsilon)\sim A(\varepsilon,C)$ なる記号は, C_1 と C_2 という ε に無関係な正定数が存在して, 不等式 $A(\varepsilon,C_1)\le T(\varepsilon)\le A(\varepsilon,C_2)$ を満たすことを表すものとする.

このような非線形項に時空変数 (t,x) が入ったモデル方程式の解析は, 一般論を非線形項が非自励的な場合も含むように拡張する際の足掛かりとなるものであり, 加えて, 初期値の台がコンパクトという条件を外すことによって空間変数による重みの影響を大きくしてより詳細に解析する狙いがある．(2) に対して次の主結果が得られた.

2 主定理

定理 2.1　$\varepsilon=1$ とし, 任意の $p>1$ と $a\in\mathbf{R}$ を持つ (2) の初期値に対して, ある $R>0, T_1>0$ と球対称な函数 Φ が存在して, $\forall|x|\geq R$ と $\forall t\in[0,T_1)$ に対して,

$$f(x+t)+f(x-t)+\int_{x-t}^{x+t}g(y)dy\geq\frac{\Phi}{\langle x-\mathrm{sgn}(1+a)t\rangle^{(-1-a)/(p-1)}}$$

が成り立つと仮定する. ここで, sgn は符号関数とし, 関数 Φ は

$$\Phi:=\Phi(|x|-t)\ \text{with}\ \lim_{|r|\to\infty}\Phi(r)=\infty\quad\text{または}\quad\Phi:=M\ :\ \text{large constant}$$

とする. このとき, $\Phi^{p-1}t^2\gg 1$ ならば (2) の古典解 u はその (x,t) で存在しない.

定理 2.2　$\varepsilon=1$ とし, 任意の $p>1$ と $a\in\mathbf{R}$ を持つ (2) の初期値に対して, ある $T_2>0$ と球対称な函数 Φ が存在して, $\forall x\in\mathbf{R}$ と $\forall t\in[0,T_2)$ に対して,

$$\left|f(x+t)+f(x-t)+\int_{x-t}^{x+t}g(y)dy\right|\leq\frac{\Phi}{\langle x+\mathrm{sgn}(1+a)t\rangle^{(-1-a)/(p-1)}}$$

かつ $\Phi^{p-1}t^2\ll 1$ が成り立つと仮定する. ここで, sgn は符号関数とし, 関数 Φ は定理 2.1 と同様. このとき, (2) の古典解 u が $\mathbf{R}\times[0,T_2)$ 上存在する.

Φ によって場合分けすることによって次の系が得られる.

系 2.1　$\Phi:=\Phi(|x|-t)$ with $\lim_{|r|\to\infty}\Phi(r)=\infty$ の場合, $\forall t>0$ に対して, ある $x\in\mathbf{R}$ が存在して, $\Phi^{p-1}t^2\gg 1$ を満たす. 従って, 時間局所解は存在しない.

系 2.2　$\Phi:=M$: large constant の場合, $T(M)$ を (2) の lifespan として $T(M)\sim CM^{-(p-1)/2}$.

これらの定理および系に対する観察から, 初期値問題 (2) が時間局所解を持つためには可積分性ではなく単純に冪の大きさを考えれば良く, 非線形項の重みの指数 $1+a$ に対して初期値の減衰が $(-1-a)/(p-1)$ 必要であることが明らかになった. また, 初期値の大きさが極端に大きい場合の lifespan 評価について明らかになった.

3 証明の概略

定理 2.1 は John[5] の各点における逐次代入法空間変数に応用することによって証明され, 定理 2.2 は John[5] の各点における逐次近似法を重み付き L^∞ 空間で行うことで証明される. お互いの証明における鍵となる不等式の計算はほとんど同じであるため, 定理 2.1 のみ概略を示す.

$x>0$ と仮定して一般性を失わない. $t>0$ を任意にとり, 初期値が定理の条件を時刻 t までの時間満たしているとする. 背理法を用いる. (2) の古典解 u がその時刻まで存在していると仮定する. Duhamel の原理により (2) と同値な積分方程式は

$$u(x,t)=u^0(x,t)+L(|u|^p\langle x\rangle^{-1-a})(x,t).\tag{3}$$

と表せる．ここで, 積分方程式の線形な部分は

$$u^0(x,t) := \frac{1}{2}\{f(x+t)+f(x-t)\} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(y)dy,$$

Duhamel 項は

$$L(v)(x,t) := \frac{1}{2}\int_0^t ds \int_{x-t+s}^{x+t-s} v(y,s)dy \quad \text{for} \quad v \in C(\mathbf{R}\times[0,\infty))$$

によって定義される．L の積分領域は点 (x,t), 点 $(x-t,0)$, 点 $(x+t,0)$ を結ぶ三角形領域となる．

条件より,

$$u(x,t) \geq u^0(x,t) \geq \frac{\Phi}{2\langle x-\mathrm{sgn}(1+a)t\rangle^{(-1-a)/(p-1)}}.$$

上記を (3) の Duhamel 項に代入して, 符号関数 $\mathrm{sgn}(1+a)$ に注意しながら被積分関数に対して積分の上端または下端を代入し, 積分を計算すると

$$u(x,t) \geq \frac{\Phi^p t^2}{2^p}\left(\frac{\langle x+\mathrm{sgn}(1+a)t\rangle}{\langle x-\mathrm{sgn}(1+a)t\rangle}\right)^{(-1-a)/(p-1)}.$$

が得られる．以下, 時空変数に着目すると一回の代入ごとに下からの評価が $\Phi^{p-1}t^2$ の p の整数冪乗乗だけ増大する．よって, $\Phi^{p-1}t^2 \gg 1 \Rightarrow u(x,t)=\infty$ が得られる．

参考文献

[1] R. Agemi, H. Takamura, *The lifespan of classical solutions to nonlinear wave equations in two space dimensions,* Hokkaido Math. J., **21**(1992), 517-542.

[2] F. Asakura, Existence of a global solution to a semi-linear wave equation with slowly decaying initial data in three space dimensions,Comm. in Partial Differential Equations, **11(13)** (1986), 1459-1487.

[3] V. Georgiev, H. Lindblad, C. Sogge *Weighted Strichartz estimates and global existence for semilinear wave equations*, Amer. J. Math., **119** (1997), 1291-1319.

[4] R. Glassey, *Existence in the large for* $\Box\ u = f(u)$ *in two space dimensions*, Math. Z, **178**(1981), 233-261.

[5] F.John, *Blow-up of solutions of nonlinear wave equations in three space dimensions*, Manuscripta Math. **28** (1979), 235-268.

[6] T. Kato *Blow up of solutions of some nonlinear hyperbolic equations*, Comm. Pure Appl. Math, **33**(1980), 501-505.

[7] H. Kubo *On the critical decay and power for semilinear wave equations in odd space dimensions*, Discrete Contin. Dynam. Systems, **2**(1996), 173-190.

[8] H. Kubo, K. Kubota *Asymptotic behavior of radially symmetric solutions of* $\Box\ u = |u|^p$ *for super critical values p in odd space dimensions*, Hokkaido Math. J., **24**(1995), 287-336.

[9] H. Kubo, K. Kubota *Asymptotic behavior of radially symmetric solutions of* $\Box\ u = |u|^p$ *for super critical values p in even space dimensions,* , Japan J. Math., **24**(1998), 191-256.

[10] H.Kubo, A.Osaka and M.Yazici, *Global existence and blow-up for wave equations with weighted nonlinear terms in one space dimension*, Interdisciplinary Information Sciences, **19** (2013), 143-148.

[11] K. Kubota *Existence of a global solution to a semi-linear wave equation with initial data of non-compact support in low space dimensions*, Hokkaido Math. J., **22**(1993), 123-180 .

[12] Y. Kurokawa, H. Takamura *Blow-up for semilinear wave equations with a data of the critical decay having a small loss*, Rend. Instit. Mat. Trieste, **XXXV** (2003), 165-193.

[13] R. Kido, T. Sasaki, S. Takamatsu, H. Takamura *The generalized combined effect for one dimensional wave equations with semilinear terms including product type*, arXiv:2305.00180

[14] 鈴木彩子, 「空間１次元における非線形波動方程式の解の大域存在と爆発」, 埼玉大学理工学研究科, 太田雅人研究室修士論文, 平成 22 年 2 月

[15] S. Takamatsu *Improvement of the general theory for one dimensional nonlinear wave equations related to the combined effect*, arXiv:2308.02174

[16] H. Takamura *Blow-up for semilinear wave equations with slowly decaying data in high dimensions*, Differential and Integral Equations, **8**(1995), 647-661.

[17] H. Takamura, H. Uesaka, K. Wakasa, *Blow-up theorem for semilinear wave equations with non-zero initial position*, J. Differential Equations, **249** (2010), 914-930

[18] K.Tsutaya *A global existence theorem for semilinear wave equations with data of non compact support in two space dimensions*, Comm. Partial Differential Equations, **17(11&12)** (1992), 1925-1954.

[19] K.Tsutaya *Global existence theorem for semilinear wave equations with non-compact data in two space dimensions,* J. Differential Equations, **104**(1993), 332-360.

[20] K.Tsutaya *Global existence and the lifespan of solutions of semilinear wave equations with data of non compact support in three space dimensions,* Funkcialaj Ekvacioj, **37**(1994), 1-18.

[21] T.-T. Li, X. Yu, and Y.Zhou, *Life-span of classical solutions to one-dimensional nonlinear wave equations*, Chinese Ann. Math. Ser. B **13** (1992) no. 3, 266-279. A Chinese summary appears in Chinese Ann. Math. Ser. A **13** (1992), no. 4, 516.

[22] K. Morisawa, T. Sasaki and H. Takamura, *The combined effect in one space dimension beyond the general theory for nonlinear wave equations*, Commun. Pure Appl. Anal. **22** (2023), no. 5, 1629–1658.

[23] K.Wakasa, *The lifespan of solutions to wave equations with weighted nonlinear terms in one space dimension*, Hokkaido Math. J., **46** (2017), 257-276.

[24] Y. Zhou, *Life span of classical solutions to* $u_{tt} - u_{xx} = |u|^{1+\alpha}$, Chinese Ann. Math. Ser. B **13** (1992) no. 2, 230-243. A Chinese summary appears in Chinese Ann. Math. Ser. A **13** (1992), no. 2, 280.

[25] Y.Zhou, *Blow up of solutions to the Cauchy problem for nonlinear wave equations*, Chinese Ann. Math. Ser. B **22** (2001), 275-280.