

# 加群の局所化の漸近挙動について

名古屋大学大学院多元数理科学研究科

木村海渡 (Kaito KIMURA) \*

## 概要

$R$  を可換ネーター環、 $I$  を  $R$  のイデアル、 $M$  を有限生成  $R$  加群とする。整数  $n$  を無限大に飛ばしたときの剰余加群  $M/I^n M$  の漸近挙動は可換環論における古典的な研究対象の一つである。特に  $M/I^n M$  から定まる集合や不変量などの漸近的な振る舞いは盛んに研究されてきた。本講演では全ての素イデアルでの局所化に関する漸近挙動を考察し、深度、入射次元、Bass 数といった可換環論における主要な不変量についての漸近安定性を与える。

## 1 導入

本稿を通して  $R$  は可換ネーター環、 $I$  は  $R$  のイデアル、 $M$  は有限生成  $R$  加群とする。自然数等で添字付けられた特定の条件や性質を満たすような可換環上の加群、及びその集合や不変量の族についての極限の挙動を考察する問題を漸近問題と呼ぶ。漸近問題における最も古典的な対象の一つはイデアルの冪による剰余加群の漸近的な振る舞い、すなわち  $n \rightarrow \infty$  における剰余加群  $M/I^n M$  の挙動である。本稿では加群に関するいくつかの不変量に対してこの問題を考察していく。

まずはこの方向の漸近問題に関する歴史や背景について述べる。以下で登場するいくつかの集合や不変量について本節では詳細を省くが、本稿における新規の結果に関係する用語は次節以降で定義から説明をする。本研究の原点は 1979 年の Brodmann [1] による素因子集合の漸近安定性の研究である。素因子集合とは各加群ごとに定まる環のスペクトラムの部分集合（すなわち素イデアルの集まり）であり、Brodmann は  $M/I^n M$  から定まるこの素因子集合を考えると、十分大きい整数  $n$  に対しては全ての集合が等しくなっていることを証明した。このように剰余加群  $M/I^n M$  の挙動は十分大きい整数  $n$  において一定あるいは規則的なものであると期待されており、その振る舞いは次数付き加群や重複度の理論などと深く関係している。Brodmann [2] は同じく 1979 年に grade および深度と呼ばれる、イデアルと加群に関する 2 つの不変量についても漸近安定性を証明した。これらの量は Ext 加群（または Bass 数）の消滅や Koszul 複体、正則列と呼ばれる環の元の列など複数の観点から特徴付けることができる極めて重要な量であり、イデアルの高度や環の次元といった次元論的な不変量との間に非自明な不等式が存在する。特に可換環論において最も重要な環および加群のクラスの一つである Cohen–Macaulay 性はこの深度と次元の間の不等式が等式となることで定義される。従って環や加群の深度を正確に与えることにより得られる恩恵は大きい。

Brodmann は [1] の結果を用いて、正則列による特徴付けから grade や深度の漸近安定性を示し

---

\* E-mail:m21018b@math.nagoya-u.ac.jp

た。一方で Kodiyalam [9] は Ext 加群の消滅による深度の特徴付けに注目してより一般的な主張を与え、その系として Brodmann の結果の別証明を与えた。現在ではその主張は Theodorescu [13] によって一般化され、次のような形で知られている：任意の有限生成  $R$  加群  $N$  と整数  $i$  に対して、全ての  $n > 0$  で Ext 加群  $\text{Ext}_R^i(N, M/I^n M)$  が有限長を持つならば、それらの長さは十分大きい  $n$  について多項式成長する。この文脈では零多項式との一致によって、Ext 加群の消滅が特徴付けられるのである。特に上述の Kodiyalam の結果は漸近問題の言葉で「Bass 数の漸近挙動は多項式で表現可能である」と記述できる。Bass 数も環や加群の不変量の一つであり、上で見てきたように Bass 数の値でも深度を測ることができる。他方で、Bass 数の消滅で特徴付けられるもう一つの主要な不変量として入射次元という量が存在する。Kodiyalam のアプローチによる恩恵の一つはこの入射次元の漸近安定性が系として得られることである。先に Cohen–Macaulay と呼ばれる環のクラスが登場したが、それと並んで重要視される環のクラスに Gorenstein があり、これは環自身の入射次元の有限性で定義される。

これらの結果はある意味で局所的な部分に注目した漸近問題と捉えることもできる。2006 年に Rotthaus と Şega [10] は環のスペクトラムにおけるザリスキー開軌跡に注目することで言うなれば大域的な観点から漸近問題を研究し、限定的な状況において深度に関する様な漸近安定性を証明した。本稿の主題は可換環論において一般的あるいは十分に弱いとされている仮定のもとで、剰余加群  $M/I^n M$  の大域的な漸近挙動を考察することである。より詳細に述べると、加群の局所化の漸近挙動が局所化する素イデアルに依存せず、ある程度統一的な振る舞いを見せることがわかる。本講演の内容は [7, 8] に基づいており、後述する新規性のある結果は漸近問題に新しい視点を与えるものと共に、いくつかの結果は上述の [2, 9, 10] の結果を一般化する。

## 2 主結果

前節で記述したが、本稿の主題である漸近問題とは剰余加群  $M/I^n M$  に関する不変量が整数  $n$  が十分大きいときにどのように振る舞うかを考察する問題である。そこでまずは、本稿で観察する加群の不変量とそれに付随して定まる局所環のクラスについて定義を与える。以降、混乱が生じる恐れが無ければ添え字は省略する。

**Definition 2.1.**  $R$  は極大イデアル  $\mathfrak{m}$  と剰余体  $k$  を持つ局所環とする。(以降は単に  $(R, \mathfrak{m}, k)$  と書いてそのような局所環  $R$  を表すこととする。)

- $i$  次の Ext 加群  $\text{Ext}_R^i(k, M)$  の  $k$  ベクトル空間としての次元を  $M$  の  $i$  次の Bass 数と呼ぶ。特に  $R$  の素イデアル  $\mathfrak{p}$  に対して、 $R_{\mathfrak{p}}$  加群  $M_{\mathfrak{p}}$  の  $i$  次の Bass 数を  $\mu_R^i(\mathfrak{p}, M)$  と書く。
- $R$  加群  $M$  の深度  $\text{depth}_R M$  を次で定義する。

$$\text{depth}_R M = \begin{cases} \inf\{n \geq 0 \mid \mu_R^n(\mathfrak{p}, M) \neq 0\} & (M \neq 0), \\ \infty & (M = 0). \end{cases}$$

- $R$  加群  $M$  の次元  $\dim_R M$  を次で定義する。

$$\dim_R M = \begin{cases} \sup\{n \geq 0 \mid \exists \mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_n \text{ s.t. } M_{\mathfrak{p}_i} \neq 0 (\forall i)\} & (M \neq 0), \\ -\infty & (M = 0). \end{cases}$$

- 非零加群  $M$  に対しては不等式  $\text{depth } M \leq \dim M$  が常に成立している。逆の不等式  $\text{depth } M \geq \dim M$  が成立するとき  $M$  は Cohen–Macaulay であるという。特に  $R$  加群として  $R$  が Cohen–Macaulay であるとき、 $R$  を Cohen–Macaulay 環という。
- $\text{cmd}_R M := \dim M - \text{depth } M$  を  $R$  加群  $M$  の Cohen–Macaulay 欠度 (以下では単に  $\text{cmd}$ ) と呼ぶ。
- $\text{id}_R M := \sup\{n \geq 0 \mid \mu_R^n(\mathfrak{p}, M) \neq 0\}$  を  $R$  加群  $M$  の入射次元という。  
(本来入射次元は入射分解の長さとしてより一般の環上の加群に対して定義され、局所環上の有限生成加群に対してはその値がここでの定義と等しくなる。これは非自明な命題として知られているが、本稿では簡単のために Bass 数の非消滅の上限を定義として採用している。)
- $R$  加群として  $R$  が有限の入射次元をもつ (すなわち  $\text{id } R < \infty$  となる) とき、 $R$  を Gorenstein 環という。Gorenstein 環は Cohen–Macaulay 環となることが知られている。

前節に登場した深度、入射次元、Bass 数に関する先行研究は次の結果である。

**Theorem 2.2.** ( $R, \mathfrak{m}, k$ ) を局所環とし、整数  $i$  を固定する。

- (1) (Brodmann [2]) ある自然数  $k$  が存在して、等式  $\text{depth}(M/I^n M) = \text{depth}(M/I^k M)$  が任意の  $n \geq k$  に対して成立する。
- (2) (Kodiyalam [9]) ある自然数  $k$  が存在して、等式  $\text{id}(M/I^n M) = \text{id}(M/I^k M)$  が任意の  $n \geq k$  に対して成立する。
- (3) (Kodiyalam [9]) ある自然数  $k$  と有理係数多項式  $f$  が存在して、任意の  $n \geq k$  に対して  $\mu^i(\mathfrak{m}, M/I^n M) = f(n)$  となる。

前節の通りこれらの結果はある意味で局所的な漸近問題と解釈することができて、対して本稿では大域的な漸近挙動を研究する。すなわち定理 2.2 に対応する次の問いを考察していく。

**Question 2.3.** 整数  $i$  を固定する。

- (1) 等式  $\text{depth}_{R_{\mathfrak{p}}}(M/I^n M)_{\mathfrak{p}} = \text{depth}_{R_{\mathfrak{p}}}(M/I^k M)_{\mathfrak{p}}$  が、任意の  $n \geq k$  と任意の  $R$  の素イデアル  $\mathfrak{p}$  に対して成立するような自然数  $k$  は存在するか？
- (2) 等式  $\text{id}_{R_{\mathfrak{p}}}(M/I^n M)_{\mathfrak{p}} = \text{id}_{R_{\mathfrak{p}}}(M/I^k M)_{\mathfrak{p}}$  が、任意の  $n \geq k$  と任意の  $R$  の素イデアル  $\mathfrak{p}$  に対して成立するような自然数  $k$  は存在するか？
- (3) 次の条件を満たすような自然数  $k$  は存在するか？  
「任意の  $R$  の素イデアル  $\mathfrak{p}$  に対して ( $\mathfrak{p}$  に依存した) ある有理係数多項式  $f$  が存在して、任意の  $n \geq k$  に対して  $\mu^i(\mathfrak{p}, M/I^n M) = f(n)$  となる。」

定理 2.2 における自然数  $k$  は暗示的に極大イデアル  $\mathfrak{m}$  に依存している。この問題 2.3 における非自明な点は、素イデアル  $\mathfrak{p}$  に依存しないような自然数  $k$  が存在するかという点である。一般に素イデアルは (非可算) 無限個存在するので、それらを統一的に制御するような議論が問題 2.3 の解決には求められる。Rotthaus と Şega [10] は環のスペクトラムにおけるザリスキー開軌跡の議論を用いることで問題 2.3(1) を部分的に解決した。

**Theorem 2.4.** (Rotthaus–Şega [10])  $R$  が優秀環 (定義 2.5 を参照)、 $M$  が Cohen–Macaulay 加群で  $\text{Hom}_R(R/I, M) = 0$  であるとする。このとき問題 2.3(1) は肯定的である。

本稿の前半では Rotthaus と Şega のザリスキー開軌跡の議論を参考にして、より一般的な状況で問題 2.3 の (1) と (2) を肯定的に解決することを目指す。そのためにザリスキー位相に関するいくつかの記号や概念を定義する。

**Definition 2.5.** (1)  $R$  の素イデアル全体のなす集合を  $\text{Spec}(R)$  と書く。 $R$  の各イデアル  $J$  に対して  $\text{Spec}(R)$  の部分集合  $V(J) := \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R) \mid J \subseteq \mathfrak{p}\}$  を考えると、 $V(J)$  の形をした部分集合全体を閉集合系とする位相が  $\text{Spec}(R)$  に入る。この位相をザリスキー位相と呼ぶ。

(2) 局所環上の加群の性質  $\mathbb{P}$  が与えられたとき  $\{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R) \mid R_{\mathfrak{p}}$  加群  $M_{\mathfrak{p}}$  は性質  $\mathbb{P}$  を満たす  $\}$  という  $\text{Spec}(R)$  の部分集合が、各  $R$  加群  $M$  に対して考えられる。これは  $R$  加群  $M$  の  $\mathbb{P}$  軌跡と呼ばれる。本稿で扱う軌跡を以下に列挙しておく。

- $\text{Zero}_R(M) := \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R) \mid M_{\mathfrak{p}} = 0\}$ .
- $\text{CM}_R(M) := \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R) \mid \dim(M_{\mathfrak{p}}) \leq \text{depth}(M_{\mathfrak{p}})\}$ . 特に  $\text{CM}(R) := \text{CM}_R(R)$ .
- $C_n^R(M) := \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R) \mid \text{cmd}(M_{\mathfrak{p}}) \leq n\}$ .
- $\text{FID}_R(M) := \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R) \mid \text{id}_{R_{\mathfrak{p}}} M_{\mathfrak{p}} < \infty\}$ . 特に  $\text{Gor}(R) := \text{FID}_R(R)$ .

以上の軌跡の全てについて、それがザリスキー位相においていつ開集合となるかというのは可換環論における古典的な研究対象の一つである。また  $\text{Supp}_R(M) := \text{Spec}(R) \setminus \text{Zero}_R(M)$  は  $M$  の台と呼ばれ、これは  $M$  が有限生成であるときは必ず閉集合となることが知られている。

(3) 局所環とは限らない  $R$  に対しても、 $\text{CM}(R) = \text{Spec}(R)$  のとき  $R$  を Cohen–Macaulay といい、 $\text{Gor}(R) = \text{Spec}(R)$  のとき  $R$  を Gorenstein という。 $R$  が局所環のときは、これらの概念は定義 2.1 のものと一致する。また全ての有限生成  $R$  加群  $M$  に対して  $\text{FID}_R(M) = \text{Spec}(R)$  となるとき  $R$  を正則といい、正則  $\Rightarrow$  Gorenstein  $\Rightarrow$  Cohen–Macaulay という環のクラスの階層が存在する。定義が複雑なためにここで詳細を書くことは避けるが、定理 2.4 で登場した優秀環は正則環の言葉を用いて定義される。優秀環の定義における「正則」という言葉を「Gorenstein」および「Cohen–Macaulay」で置き換えたものをそれぞれ許容環、CM 優秀環と呼ぶ。(これらはそれぞれ [11] と [3] で導入された。) これらについても同様に、優秀  $\Rightarrow$  許容  $\Rightarrow$  CM 優秀という階層が存在する。

軌跡が開集合となれば軌跡内の各点について特定の開近傍を考えることができ、局所的な議論を大域的な議論に拡張することができる。従ってザリスキー開軌跡の手法は、問題 2.3 のような大域的な漸近問題を考察する上で非常に役に立つ。特に著者は問題 2.3 に登場する深度や入射次元を研究するために、それぞれ Cohen–Macaulay 軌跡  $\text{CM}_R(M/I^n M)$  や  $\text{cmd}$  軌跡  $C_n^R(M/I^n M)$ 、および有限入射次元軌跡  $\text{FID}_R(M/I^n M)$  に注目した。優秀環  $R$  上の任意の有限生成加群  $M$  について、Grothendieck [5] により  $\text{CM}_R(M)$  および全ての  $n$  に対する  $C_n^R(M)$  が、Takahashi [12] により  $\text{FID}_R(M)$  が開集合となることがそれぞれ証明されている。しかしながら、これらの軌跡を定義する概念は、正則性よりもどちらかと言えば Cohen–Macaulay 性や Gorenstein 性といった環の性質と対応している。実際に著者は [6] で、優秀環よりも一般的な許容環や CM 優秀環上の加群についてこれらの軌跡が開集合となることを与えた。定理 2.4 の証明には上述の Grothendieck [5] の手法が用

いられているが、今回 [6] の手法を用いることで環の仮定を弱めることができたというのが、本稿の第一の主結果である。さらに細かい証明のアイデアを工夫することで、定理 2.4 における加群やイデアルの仮定も取り除くことに成功した。

**Theorem 2.6.** CM 優秀環  $R$  に対して、問題 2.3(1) は肯定的である。

加えてその手法の一部が入射次元に関する漸近問題にも応用できることに気づき、有限入射次元軌跡の観察から問題 2.3(2) に関する次の定理を与えた。問題 2.3(2) を考察したのは著者が初めてなので、この主結果に関しては完全に新規の結果である。

**Theorem 2.7.** 許容環  $R$  に対して、問題 2.3(2) は肯定的である。

定理 2.6 と 2.7 によって、問題 2.3 はかなり一般的な状況で解決されたといえる。というのも応用上考えられる殆どの可換環は許容環や CM 優秀環となる。例えば体や整数環上の多項式環や形式的冪級数環は共に許容環（従って CM 優秀環）であり、それらの局所化や剰余環もまた許容環となる。許容環でない環を構成するのは難しく、非常に複雑な議論が必要となる。また抽象的な観点からも、許容環や CM 優秀環というのは可換環論において標準的な仮定と言える。実際、許容環や CM 優秀環はそれぞれ Gorenstein 環や Cohen–Macaulay 環の準同型像という極めて標準的な環のクラスを含み、これらの仮定は可換環論の研究の至る所に登場する。

その他に重要な環のクラスとしては、本稿でも何度も登場するように局所環が挙げられる。この局所環という概念と許容環や CM 優秀環といった概念は互いに独立しており、一方を満たすがもう一方を満たさないような環の例は豊富に存在する。そこで本稿の後半では局所環に対して問題 2.3 を考察していく。前節で述べたが、加群の深度は複数の視点から特徴付けを与えることができたのであった。とりわけ前半部分で登場した定理 2.2(1)、2.4、2.6 の証明では共に正則列による深度の特徴付けが用いられている。対して以降では Ext 加群（Bass 数）の振る舞いに注目して局所環上の大域的な漸近問題の解決を目指す。

最も重要なことは、局所環に対しては完備化という操作が存在することである。具体的には局所環  $(R, \mathfrak{m}, k)$  に対してイデアル剰余  $R/\mathfrak{m}^n$  が成す自然な逆系の逆極限を取ると、新たなネーター局所環  $\hat{R}$  が構築されてこれを局所環  $R$  の完備化と呼ぶ。有限生成  $R$  加群  $M$  に対しても同様に有限生成  $\hat{R}$  加群  $\hat{M}$  が作られて、これを  $M$  の完備化と呼ぶ。こうして作られた環や加群の完備化はその名の通り線形位相としては常に完備であって環論的にも良い性質を持っている。例えばネーター局所環の完備化は必ず優秀環であり正則局所環の準同型像にもなることがよく知られている。一方で  $R, M$  の完備化  $\hat{R}, \hat{M}$  は元々の環や加群の持つ情報や性質の多くを引き継ぐ。実際に完備化の前後で Bass 数、深度、次元、cmd、入射次元の値は全て等しく、従って Cohen–Macaulay 性や Gorenstein 性も完備化とそれ以前で同値となる。このことから、しばしば局所環上の問題は完備化に対するそれに帰着できて、初めから優秀環などの良い性質が満たされていると仮定できるようになる。本稿の後半部分でもその手法を利用する。特に局所環上の有限生成加群に関する Bass 数については Foxby と Thorup による公式 [4, Theorem] が存在している。それを今回利用する形に書き直したものが次の補題である。

**Lemma 2.8.**  $R$  を局所環、 $\hat{R}, \hat{M}$  を  $R, M$  の完備化、 $\mathfrak{q}$  を  $\hat{R}$  の素イデアル、 $\mathfrak{p} := \mathfrak{q} \cap R$  を  $\mathfrak{q}$  の  $R$  へ

の引き戻しとする。このとき任意の整数  $n, m$  に対して次の等式が成立する：

$$\mu_{\hat{R}}^m(\mathfrak{q}, \hat{M}/I^n M) = \sum_{p+q=m} \mu_{\hat{R}/\mathfrak{p}\hat{R}}^p(\mathfrak{q}/\mathfrak{p}\hat{R}, \hat{R}/\mathfrak{p}\hat{R}) \cdot \mu_{\hat{R}}^q(\mathfrak{p}, M/I^n M).$$

この補題により  $R$  加群  $M/I^n M$  の Bass 数の漸近挙動は、 $\hat{R}$  加群  $\hat{M}/I^n \hat{M}$  のそれを調べることで観察することができる。するとここまで見てきたように  $\hat{R}$  は優秀環であることから様々な軌跡が開集合となることがわかり、大域的な議論を展開できるようになる。ここからスペクトル系列や次数付き加群の理論を用いて複数の素イデアルに関する Bass 数同士を比較し、最後に環  $R$  のネーター性を活かすことで次の定理が得られる。これは後半部分で最も強い結果であるが、煩雑化を避けるためにその証明の説明は前行程度に止めておく。

**Theorem 2.9.**  $R$  を局所環とし、整数  $i$  を固定する。このとき、ある自然数  $k$  と有限個の有理係数多項式  $f_1, \dots, f_l$  が存在して次の条件を満たす：「任意の  $R$  の素イデアル  $\mathfrak{p}$  に対してある番号  $1 \leq m \leq l$  が存在して、任意の  $n \geq k$  に対して  $\mu^i(\mathfrak{p}, M/I^n M) = f_m(n)$  となる。」

この系として後半部分の主題であった局所環上の漸近問題は解決される。

**Corollary 2.10.** 局所環  $R$  に対して、問題 2.3 の (1), (2), (3) は全て肯定的である。

以上により、局所環上の大域的な漸近問題は完全な形で解決された。特筆すべき点として、一般に 2 次元以上の局所環  $R$  には素イデアルが非可算無限個存在する。一方で定理 2.9 によると、全ての素イデアルに関する Bass 数の漸近挙動は高々有限個の有理係数多項式で表現可能であり、これは驚異的な事実に思える。今回提起した問題 2.3 はまだ一般の状況では未解決であるため、それらが肯定的であるか、もしそうならば前行の事実も成立するののかという点は今後の課題である。以上が本稿における結果の全てである。(証明の詳細、具体的な計算例、応用については本稿では省略したので、詳しくは [7, 8] をご参照下さい。)

## 参考文献

- [1] M. BRODMANN, Asymptotic stability of  $\text{Ass}(M/I^n M)$ , *Proc. Amer. Math. Soc.* **74** (1979), no. 1, 16–18.
- [2] M. BRODMANN, The asymptotic nature of the analytic spread, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **86** (1979), no. 1, 35–39.
- [3] K. ČESNAVIČIUS, Macaulayfication of Noetherian schemes, *Duke Math. J.* **170** (2021), no. 7, 1419–1455.
- [4] H.-B. FOXBY; A. THORUP, Minimal injective resolutions under flat base change, *Proc. Amer. Math. Soc.* **67** (1977), no. 1, 27–31.
- [5] A. GROTHENDIECK, Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas. II, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **24**, (1965).
- [6] K. KIMURA, Openness of various loci over Noetherian rings, *J. Algebra* **633** (2023), 403–424.

- [7] K. KIMURA, Asymptotic stability of depths of localizations of modules, *J. Math. Soc. Japan* (to appear).
- [8] K. KIMURA, Asymptotic behavior of homological invariants of localizations of modules, preprint (2023), [arXiv:2310.11697v2](https://arxiv.org/abs/2310.11697v2).
- [9] V. KODIYALAM, Homological invariants of powers of an ideal, *Proc. Amer. Math. Soc.* **118** (1993), no. 3, 757–764.
- [10] C. ROTTHAUS; L. M. ŞEGA, Open loci of graded modules, *Trans. Amer. Math. Soc.* **358** (2006), no. 11, 4959–4980.
- [11] R. Y. SHARP, Acceptable rings and homomorphic images of Gorenstein rings, *J. Algebra* **44** (1977), no. 1, 246–261.
- [12] R. TAKAHASHI, Openness of FID-loci, *Glasg. Math. J.* **48** (2006), no. 3, 431–435.
- [13] E. THEODORESCU, Derived functors and Hilbert polynomials, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **132** (2002), no. 1, 75–88.