

流体乱流モデルにみられる位相同期現象と カオティックサドル*

一橋大学 商学部 経営学科
加藤響 (Hibiki KATO)†

概要

カオス位相同期現象とは、相互作用する非線形力学系のカオス振動子同士の位相が同期する現象である。また、流体乱流モデルを含むいくつかの非線形力学系において比較的穏やかな状態と乱れた状態が間欠的に現れる現象が観測される。本稿では前者の状態を位相同期状態とし、不安定不変集合であるカオティックサドルによって特徴付ける。本研究は、位相同期という概念に着目することによって流体を含めた複雑現象の状態分類が可能になることを示唆している。

1 導入

1.1 はじめに

カオスにおいて位相同期現象は、相互作用するカオス振動子同士の位相が同調する現象として広く知られている。また、非線形現象において、カオス性が比較的弱い状態 (ラミナー) と強い状態 (バースト) が交互に現れるような間欠性ダイナミクスがしばしば観測される。

結合系のように位相同期に関する間欠性を分析する際は、後述する on-off 間欠性や blowout 分岐が着目される。その反面、流体などでも間欠性は見られるが、我々の知る限りでは先に述べたような分析は行われていない。本稿では、まず乱流の間欠性においても位相同期による分析が可能であり、さらに位相同期状態集合の骨格として不安定不変集合であるカオティックサドルが存在していることを示す。本研究では、そのような間欠性が見られるモデルとして、乱流シェルモデル [8] と、結合レスラー系 [6] を扱う。

1.2 乱流シェルモデル

流体乱流シェルモデルは Navier-Stokes 方程式をフーリエスペクトル法で記述したものに似せた Toy Model として導入された。それはエネルギーカスケードや間欠性等の種々の力学的性質が似ていることが知られている。ここでは特に以下の複素変数連立常微分方程式の形で得られる

* 本研究は小林幹准教授 (立正大学) ならびに齊木吉隆教授 (一橋大学) との共同研究である。

† E-mail:1121062b@g.hit-u.ac.jp

Gledzer-Ohikitan-Yamada (GOY) 乱流シェルモデル [8] を考える.

$$\left(\frac{d}{dt} + \nu k_j^2\right) u_j = i[A_j u_{j+1} u_{j+2} + B_j u_{j-1} u_{j+1} + C_j u_{j-1} u_{j-2}]^* + f \delta_{j,1} \quad (u_j \in \mathbf{C}, j = 1, \dots, N).$$

ここで, $A_N = A_{N-1} = B_N = B_1 = C_1 = C_2 = 0$ であり, それ以外については $A_j = k_j, B_j = -\beta k_j, C_j = (\beta - 1)k_{j-2}$ である. u_1 に加える外力は $f = 5(1+i)10^{-3}$ であり, $k_j = 10^{-4} \times 2^j$ とする. 本研究では, $N = 14, \nu = 1.8 \times 10^{-4}$ として β を変化させ, ラミナー, バーストの間欠性が見られる, $\beta = 0.416$ 付近について解析を行った [図 1].

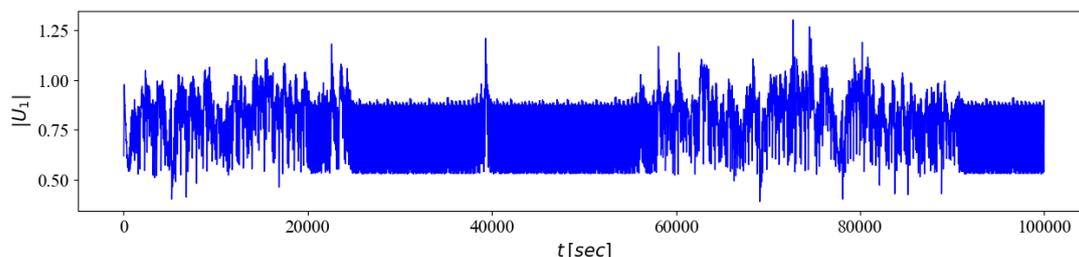


図 1 乱流シェルモデルの $\beta = 0.4162$ における $|u_1|$ の時間発展. 比較的平穏なふるまいをする時間帯と比較的激しいふるまいをする時間帯が時間間欠的に交互にあらわれる. 相空間全体で間欠カオスの振る舞いをするが, 一般的には位相同期に注目して分析されることはない.

1.3 結合レスラー系

乱流シェルモデルより単純で位相同期が直接的に表現される系である結合レスラー系について同様の解析を行った. 結合レスラー系は 6 次元常微分方程式系で, 2 つの 3 次元のレスラー系を結合させたものであり以下の式で表される [6].

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\omega_1 y_1 - z_1 + \epsilon(x_2 - x_1) \\ \dot{y}_1 = \omega_1 x_1 - a y_1 \\ \dot{z}_1 = f + z_1(x_1 - c) \\ \dot{x}_2 = -\omega_2 y_2 - z_2 + \epsilon(x_1 - x_2) \\ \dot{y}_2 = \omega_2 x_2 - a y_2 \\ \dot{z}_2 = f + z_2(x_2 - c). \end{cases}$$

ここでパラメータ $a = 0.165, f = 0.2, c = 10, \omega_{1,2} = \omega_0 \pm \delta (\omega_0 = 0.97, \delta = 0.02)$ を固定し, ϵ を変化させる. つまり, 非対称的な 2 つの結合カオス系について, 結合強度を変化させながら解析する. $\epsilon \sim 0.0416$ 付近で, 間欠的な振る舞いが起こることが簡単な数値計算からもわかる [図 2]. さらに, Pazo, Zaks, Kurths ら [5] により, 2 つの系の位相差は $\epsilon \gtrsim 0.0416$ では有界で狭い範囲に収まるが, $\epsilon \leq 0.0416$ で位相ジャンプが発生し, 非有界になることが報告されている [図 3].

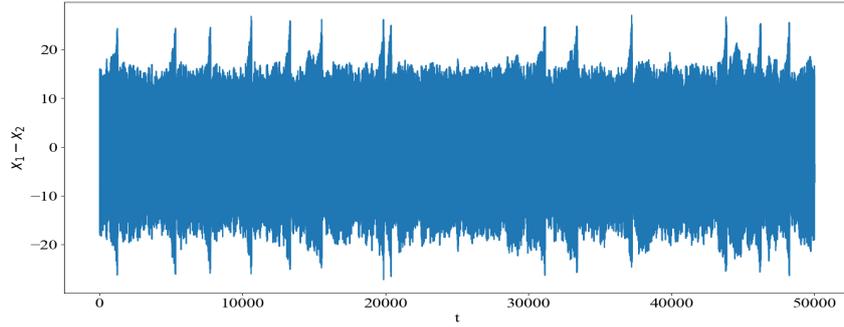


図2 結合レスラー系の $\epsilon = 0.039$ における $x_1 - x_2$ の時間発展. 比較的平穏なふるまいをする時間帯と比較的激しいふるまいをする時間帯が時間間欠的に交互にあらわれる.

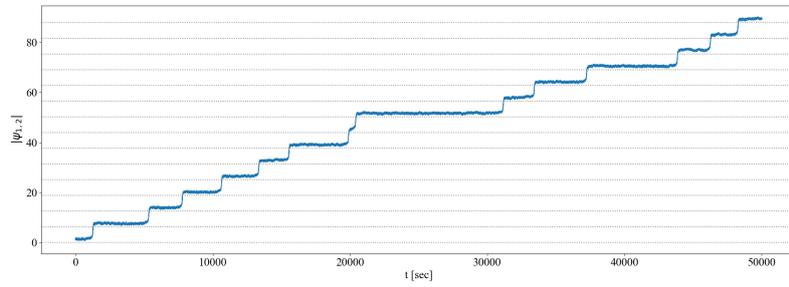


図3 結合レスラー系の $\epsilon = 0.039$ における位相差の時間発展. 水平方向の罫線は 2π の整数倍を示す. $\epsilon \sim 0.0416$ において位相同期が破れ, 以降 ϵ の値を小さくして行けば行くほど, この図のような位相ジャンプが頻繁に現れるようになる. これは blowout 分岐を経て on-off 間欠性が現れたと解釈できる.

2 準備

2.1 位相同期

結合された振動子 i と j を記述する力学系においてある時刻 t における位相 ϕ_i, ϕ_j を適当に定義する. 乱流シェルモデルについては, 各変数を振動子としてそれぞれの偏角で位相を定義し, 結合レスラー系の2つの振動子に対しては xy 平面上の回転角で定義すればよい. ここで注意したいのは, 両者とも値域が $[0, 2\pi)$ や $(-\pi, \pi]$ になることである. この時, 位相が時間に対して不連続になり位相差を解析する上で不都合である. そのため, 適宜連続となるようにアンラップする (位相のリフトを行う).

振動子 i と振動子 j の位相差 $\psi_{i,j}$ は,

$$\psi_{i,j}(t) = |\phi_i(t) - \phi_j(t)|$$

により定義し, 定数 d に対して,

$$\exists k \in \mathbb{Z}, \text{ s.t. } |\psi_{i,j}(t) - d + 2\pi k| < \epsilon \quad (1)$$

が一定時間連続して成り立つ時、位相が同期していると定義する。ここで、 ϵ は十分小さい正数だが、計算時はロバストネスを考慮し、ある程度大きい値を採用する。

以下、解軌道に対して位相同期部分を抽出する際は、過渡期を除き、より不変集合に近い集合を得るために、取り出した各軌道に関して前半と後半を一定時間分除く操作を行う(以下トリミングと呼ぶ)。例えば、乱流シェルモデルに対しては約 10 周期に相当する 1000 秒以上が位相同期する軌道を取り出し、最初と最後の 500 秒を除く操作を行なった [図 4]。以下では、トリミング後の集合を位相同期不変集合と呼ぶ。

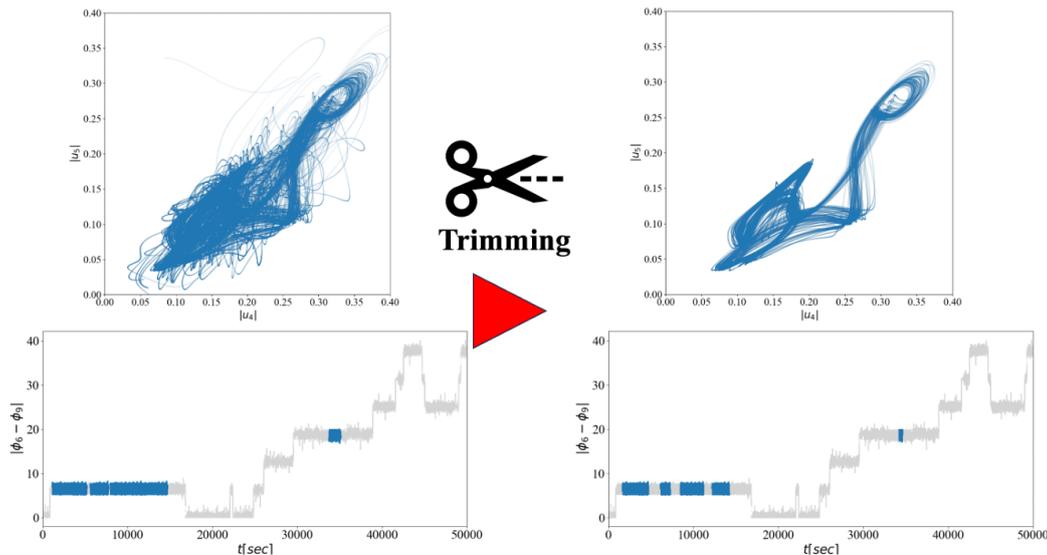


図 4 位相同期不変集合を取り出すためのトリミング。上は乱流シェルモデルの $|u_4|, |u_5|$ の軌道，下は u_6 と u_9 の位相差の時間発展。式 1 が 1000 秒以上連続して成立する軌道 (左) を取り出し、より不変集合に近い集合を得るため、取り出した各位相同期部分の前後 500 秒を除いた (右)。このような操作をここではトリミングと呼ぶ。

2.2 Blowout 分岐

カオス完全同期状態では系が不変部分空間に閉じ込められていると見做すことができ、位相同期状態の破れはその閉じ込めの不安定化と見做せる。この時に起こる分岐を blowout 分岐 [4] と呼び、blowout 分岐を経た時、オンオフ間欠性と呼ばれるカオス現象がしばしば見られる。一般的に blowout 分岐は対称的な振動子について議論されるが、本稿ではそれを非対称な振動子に拡張して考える。閉じ込め構造の不安定化は、不安定周期軌道の横断方向の不安定性により解釈することが一般的である。しかしながら、本稿で扱うのは非対称的な系であるため、横断方向を求めるのは難しい。本稿では一般化して、あるパラメータを動かした時に、カオスアトラクターとカオティックサドルが一致する時、そこにおいて blowout 分岐が発生すると定義する。

2.3 カオスアトラクターとカオティックサドル

カオス的不変集合として、カオスアトラクターとカオティックサドルが挙げられる。どちらも可算無限個の不安定周期軌道が埋め込まれている不変集合である。カオスアトラクターは任意の近傍を吸引し、カオティックサドルは吸引しない近傍をもつ点で異なる [1]。時間正方向の数値計算によってカオティックサドルを観測することができないため、カオスアトラクターに比べてその存在が意識されることが少ないが、ダイナミクスにおいてしばしば重要な役割を果たすことが知られている。

2.4 Stagger-and-Step method

上述のように力学系のカオティックサドルは容易に見つけ出すことが困難である。いくつかの検出手法が提案されているが、本研究では Stagger-and-Step method [7] を用いる。この手法によりラミナーとバーストがスイッチする系において、特にラミナーが継続する時間が短い場合でもカオティックサドルを得られる。

まず、ラミナー領域を掩う、カオスアトラクター全体より小さい領域 D を用意する。そして、ラミナー軌道上の初期値から時間発展していき、ある程度 (t_{check} 秒) D 内に居続ければ合格として最初の短時間 ($t_{progress}$ 秒) を軌道として採用し、採用した最後の値を新たな初期値とする。もし t_{check} 秒未満で軌道が D の外に出た場合、初期値に微小摂動を加えて時間発展する試行を合格するまで繰り返す。以上の軌道を $t_{progress}$ ずつ伸ばす操作を繰り返すことにより長時間のラミナー軌道を得る*¹。

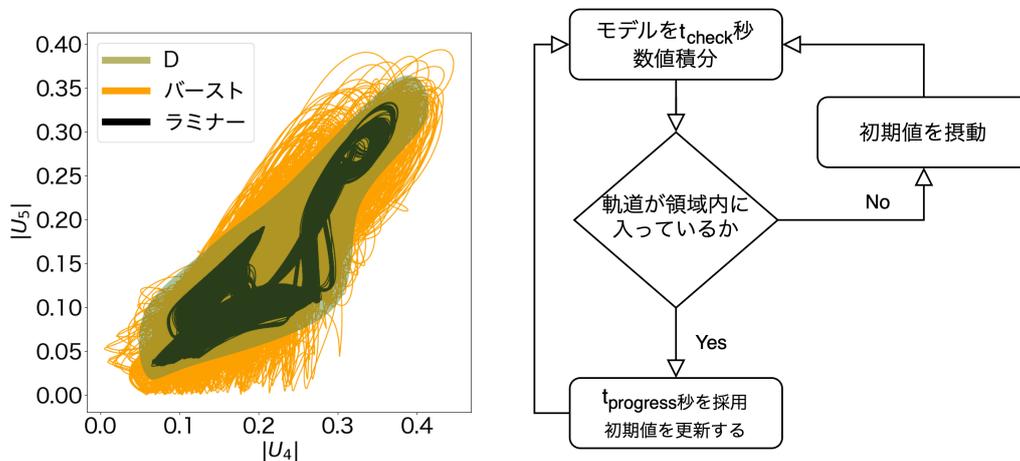


図5 Stagger-and-Step method の手続き。まず左図のように、ある程度ロバストにラミナーを掩う領域 D を設定する。ある程度 (t_{check} 秒) D 内に居続ければ合格として最初の短時間 ($t_{progress}$ 秒) を軌道として採用し、最後の値を新たな初期値とする。もし t_{check} 秒未満で軌道が D の外に出た場合、初期値に微小摂動を加えて時間発展する試行を合格するまで繰り返す。このような軌道を $t_{progress}$ ずつ伸ばす操作を繰り返す。

*¹ カオティックサドルは不変集合であるから Stagger-and-Step method で得た軌道はあくまでカオティックサドルの近傍の軌道である。

3 主結果

3.1 乱流シェルモデル

まず $\beta = 0.416$ 近辺のパラメータについて、 β の値を動かして軌道をプロットすると、 β を大きくするに従い、周期軌道、カオスアトラクター、より大きなカオスアトラクターに遷移していることがわかる [図 6]. 位相については、各変数の偏角をとり、アンラップしたものを変数の添字が $\text{mod } 3$ で一致するもの同士で位相差を調べた. 図 6(a), (b) において、位相が常に同期しており、バーストが発生する (c), (d) についても、ラミナーにおいては位相が同期していることが判明した [図 7]. そこで、(c), (d) の軌道について、トリミングにより位相同期不変集合を求めたところ、(b) で見えていた小さいカオスアトラクターとよく似た集合を得た. 実際、(d) において Stagger-and-Step method により得られるカオティックサドルと位相同期不変集合を比較したところ [図 8], 両者は非常に良く似ていた. より定量的に比較するため、相空間を微小なセルに分割し、 N 次元格子で集合を粗視化して格子の数で比較したが、両者はほとんど同じ集合であった. まとめると、ラミナーにおいて位相が同期しており、位相同期不変集合とカオティックサドルが一致していることが判明した.

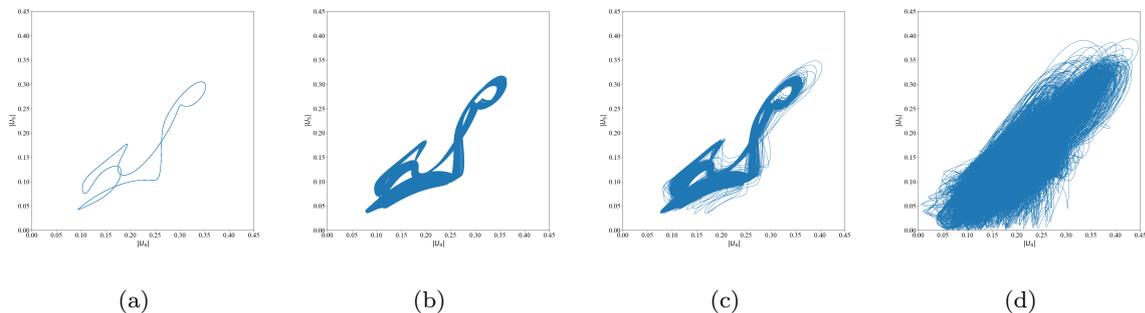


図 6 β を変化させた際の 10^6 時間軌道の比較. 左から $\beta = 0.415, 0.41616, 0.41617, 0.417$ の軌道. β が大きくなるにつれ、周期軌道 (a) からカオスアトラクター (b), そしてより大きなカオスアトラクター (c), (d) に遷移している様子がわかる. (c) ではラミナー状態が長時間現れているが、(d) ではバースト状態が支配的である.

3.2 結合レスラー系

$\epsilon = 0.0416$ 付近のパラメータにおける x_1, x_2 の軌道をプロットしたところ図 9 を得た. 非対称な振動子であるため、位相同期の際の軌道は対称時のような対角線ではないが、カオスアトラクター (a) が存在している. その後位相同期の破れに伴い、より大きなアトラクター (b), (c) が出現していることがわかる. (b), (c) の位相同期部分をトリミングしたのを見ると、大きなアトラクター集合 (L とする) の部分集合として位相同期不変集合 S が存在していることがわかる. 一方で、 L と S をそれぞれカオスアトラクターとラミナー集合として考えて、Stagger-and-Step method により、カオティックサドルを取り出すと、図 [10] の集合が得られる. 位相同期不変集合とカオティックサド

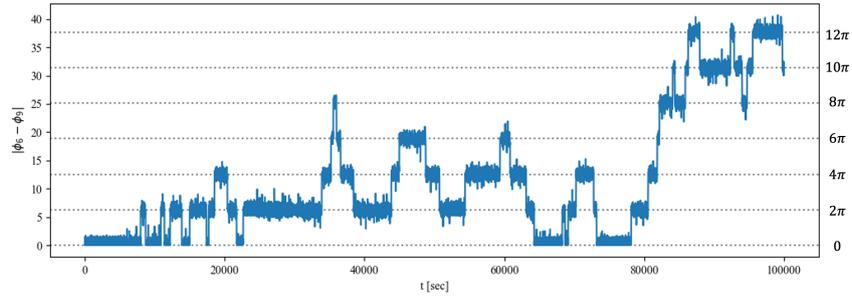


図 7 $\beta = 0.417$ における u_6 と u_9 の位相差 $\psi_{6,9}$ の時間発展. $\beta \sim 0.41616$ より β を大きくしていけば行くほど, 乱流シェルモデルにおいても結合レスラーで見られたような位相ジャンプが見られる. 位相同期部分と非同期部分はラミナー状態, パースト状態に対応している.

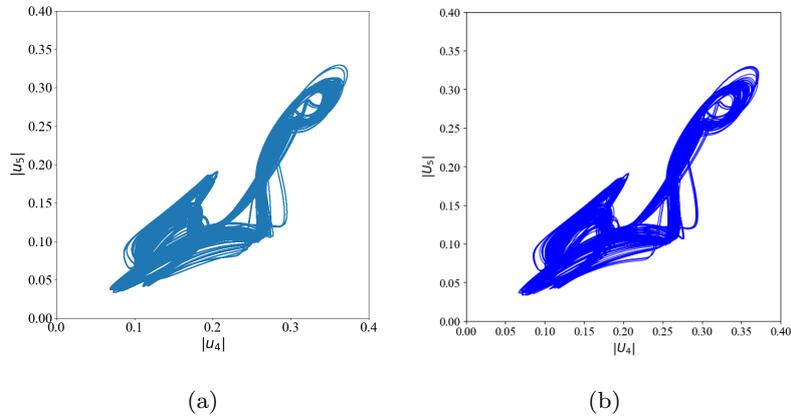


図 8 $\beta = 0.417$ において乱流シェルモデルでの位相同期不変集合と Stagger-and-Step method で求めたカオティックサドル. トリミングして得た位相同期部分 (左) と Stagger-and-Step method で求めたカオティックサドル (右) の両者ともラミナーを捉えており, 同一視できる.

ルを乱流シェルモデル同様に粗視化して比較したところ, ほとんど同じ集合であると判明した. したがって, 結合レスラー系において, 位相同期不変集合とカオティックサドルが一致すると言える.

カオティックサドルが精度良く求められたため, その応用として, カオティックサドル近傍に継続的に滞在する時間を考察した. これまでに, Grebogi, Ott, Yorke [2, 3] は, 2次元写像において, リドルドベイスンの存在によりフラクタル状のカオティックサドル近傍で超持続的なトランジェントが観測されることを報告している. そこでレスラー系について, blowout 分岐の臨界パラメータ ϵ_* の近くの各 ϵ においてカオティックサドルの近傍に滞在する平均ラミナー継続時間 τ を求め, 回帰をした所, 以下のような冪分布

$$\log_{10} \tau = -10.85921542 \log_{10}(\epsilon - \epsilon_*) + -23.018256$$

に従っていることが判明した [図 11]. ここで, $\epsilon_* = 0.0424212$ である.

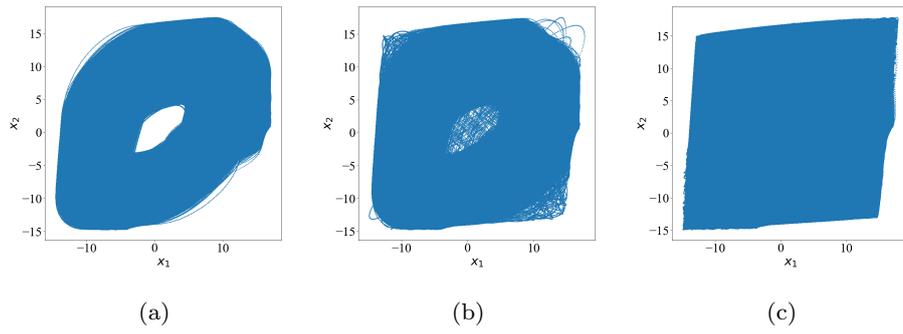


図9 結合強度 ϵ を変化させた際の 10^6 時間軌道の比較. 左から $\epsilon = 0.042, 0.04, 0.039$. (a) ではラミナー集合が安定だが, (b) ではより大きなカオスアトラクターが現れており, (c) では大きなカオスアトラクターが支配的である.

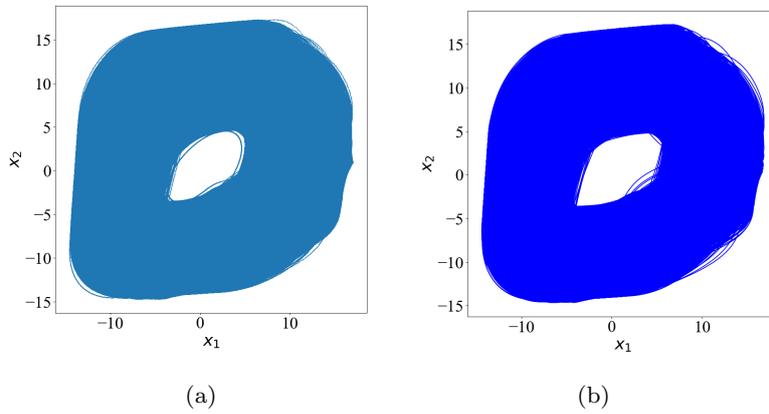


図10 $\epsilon = 0.039$ において結合レスラー系の位相同期不変集合と Stagger-and-Step method で求めたカオティックサドル. トリミングした位相同期集合 (左) と, 相空間の領域に着目して Stagger-and-Step method で求めたカオティックサドル集合 (右) はほぼ一致している.

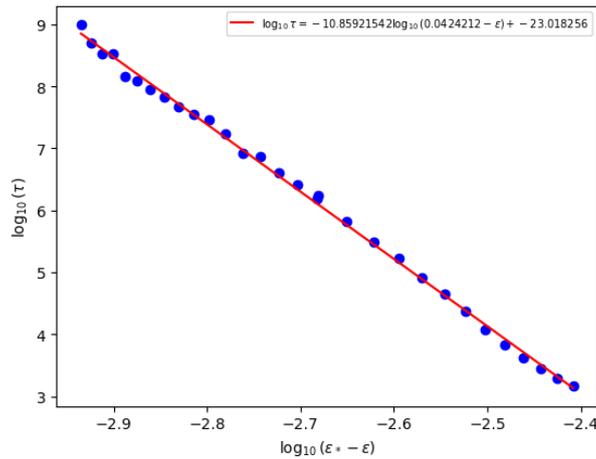


図 11 平均ラミナー継続時間のパラメタ依存性. 結合レスラー系の結合強度 ϵ について, blowout 分岐が発生する臨界パラメータ ϵ_* からの距離 $\epsilon_* - \epsilon$ と平均ラミナー継続時間が両対数目盛において直線的, すなわち冪分布に従っている.

3.3 位相同期を用いた Stagger-and-Step method によるカオティックサドルの同定

従来の Stagger-and-Step method ではカオティックサドルの概形が既知であることが前提であった. それは概形を十分覆うようにロバストに領域を設定する必要があるためであり, 領域の取り方によっては高次元の力学系においては計算負荷が増大する可能性がある. そこで, 相空間上の領域ではなく, 位相同期を条件とした Stagger-and-Step method を提案する. 具体的には, t_{check} 秒位相同期が続けば合格とし $t_{progress}$ 秒の軌道を採用する方式であり, 今回解析した系では, カオティックサドルにおいて位相同期が発生していたため, 位相同期が十分カオティックサドルの条件として機能する [図 12]. 領域を指定した際に比べ, カオティックサドルの形が未知でもよく, 閾値の設定も位相ジャンプを検出できる程度にロバストにとれば十分なため容易である. 一部の変数間の位相差を見れば十分であるから高次元力学系についても比較的低い計算負荷でカオティックサドルが同定できる.

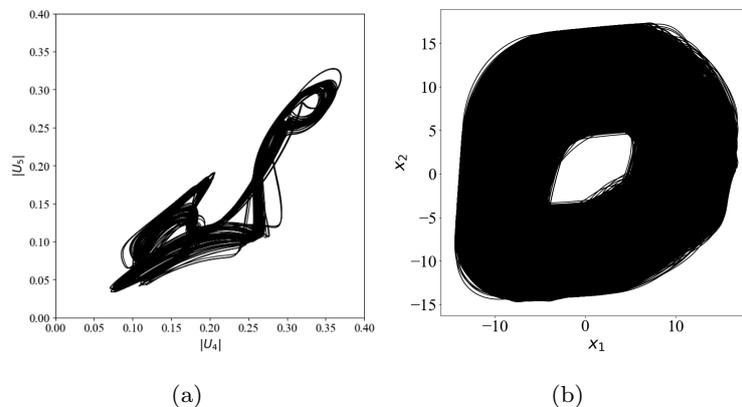


図 12 位相同期を用いた Stagger-and-Step method により得られたカオティックサドル. それぞれ $\beta = 0.417, \epsilon = 0.039$ におけるカオティックサドルを同定しており, 通常の Stagger-and-Step で得られる集合 (図 8, 10 それぞれの (b)) とほとんど一致する.

4 結論

本研究では間欠カオスを示す系において、ラミナーで位相同期現象が見られることを確かめ、位相同期状態をカオティックサドルで特徴付けた。まず、発達した流体についてのモデルである乱流シェルモデルについてそれを確認し、より単純なモデルである、結合レスラー系において同様の結果を確かめ、さらに分岐点からの平均ラミナー継続時間分布が冪分布になる等の詳細な事実を確かめた。同様の分析は一般的な力学系に対して適用可能であると考えられる。今後の課題としては、乱流シェルモデルについても平均ラミナー継続時間分布等の性質を確認することがまず挙げられる。さらに、非対称な振動子に対しても通用するような blowout 分岐の定量的な特徴付けの解明を試みたい。

謝辞

本研究の一部は、JSPS KAKENHI 19KK0067 ならびに 23H04465 に基づく。

参考文献

- [1] K. Alligood, T. Sauer, and J. Yorke. 津田 一郎 (監訳). カオス 第2巻 力学系入門. 丸善出版, 2012.
- [2] C. Grebogi, E. Ott, and J. A. Yorke. Fractal basin boundaries, long-lived chaotic transients, and unstable-unstable pair bifurcation. *Phys. Rev. Lett.*, 50(13):935, 1983.
- [3] C. Grebogi, E. Ott, and J. A. Yorke. Super persistent chaotic transients. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 5(3):341–372, 1985.
- [4] E. Ott and J. C. Sommerer. Blowout bifurcations: the occurrence of riddled basins and on-off intermittency. *Phys. Lett. A*, 188:39, 1994.
- [5] D. Pazó, M. A. Zaks, and J. Kurths. Role of unstable periodic orbits in phase and lag synchronization between coupled chaotic oscillators. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 13(1):309–318, 2003.
- [6] A. Pikovsky, M. Rosenblum, and J. Kurths. 徳田 功 (訳). 同期理論の基礎と応用-数理科学、化学、生命科学から工学まで. 丸善出版, 2009.
- [7] D. Sweet, H. E. Nusse, and J. A. Yorke. Stagger-and-step method: Detecting and computing chaotic saddles in higher dimensions. *Phys. Rev. Lett.*, 86:2261–2264, 2001.
- [8] M. Yamada and K. Ohkitani. Lyapunov spectrum of a chaotic model of three-dimensional turbulence. *Journal of the Physical Society of Japan*, 56(12):4210–4213, 1987.