

# 退化した楕円曲線の安定性条件について

東京大学 大学院 数理科学研究科  
軽部友裕 (Tomohiro KARUBE) \*

## 概要

楕円曲線の退化は小平によって分類されており、代数幾何の文脈やミラー対称性の文脈においてトイモデルになるような重要な対象である。著者は退化した楕円曲線の導来圏とその不変量である Bridgeland 安定性条件を調べた。安定性条件全体は安定多様体と呼ばれ、複素多様体になる。その安定多様体と導来圏の自己導来同値との関係を示した。

## 1 導入

Bridgeland 安定性条件（以下、単に安定性条件）は数理物理における安定性の数学的定式化として導入された [Bri07]。この安定性条件は slope 安定性の導来圏への一般化であり、slope 安定性が層のモジュライ空間を定めるように Bridgeland 安定性条件も導来圏の対象のモジュライ空間を定める。そのうえ、安定性条件全体の集合には位相が入り、複素多様体になることが知られている。この安定性条件の空間はミラー対称性や数え上げ幾何の観点から研究されている。

## 2 退化した楕円曲線

この章では小平曲線といわれる退化した楕円曲線を考える。

**定義 2.1.**  $S$  を曲面、 $B$  を準射影的曲線とする。この時、固有射  $\pi : S \rightarrow B$  の一般ファイバーが楕円曲線であり、各ファイバーに  $(-1)$  曲線を含まないとき楕円曲面という。

楕円曲面は特異的なファイバーを持つ場合がある。この特異的なファイバーは小平により分類された [Kod63] ため小平曲線と呼ばれる。

**定理 2.2.** 楕円曲面  $S \rightarrow B$  のファイバーは次のように分類される。

- ( $I_0$ ) 滑らかな楕円曲面
- ( $I_1$ ) ノードを持つ有理曲線
- ( $I_N$ ) 環状に交わる  $N$  本の射影直線。 ( $N \geq 2$ ) .
- (II) カスプを持つ有理曲線
- (III) 1 点において重複度 2 で交わる 2 本の射影直線。

---

\* E-mail: karube-tomohiro803@g.ecc.u-tokyo.ac.jp

- (IV) 1点で交わる 3本の射影直線.
- (I<sub>N</sub><sup>\*</sup>) アフィンディンキン図形  $\widetilde{D}_{N+4}$  に対応する  $N+5$ 本の射影直線.
- (II<sup>\*</sup>) アフィンディンキン図形  $\widetilde{E}_8$  に対応する 8本の射影直線.
- (III<sup>\*</sup>) アフィンディンキン図形  $\widetilde{E}_7$  に対応する 7本の射影直線.
- (IV<sup>\*</sup>) アフィンディンキン図形  $\widetilde{E}_6$  に対応する 6本の射影直線.
- (<sub>m</sub>I<sub>N</sub>) (I<sub>N</sub>)型の重複ファイバー. ( $N \geq 2$ ).

本レポートでは、可約な小平曲線のみを扱う.

$C$ を可約な小平曲線とし、既約成分を  $C_1, \dots, C_n$  とする.  $G(C)$ を  $C$ の Grothendieck 群とする.

**命題 2.3** ([MP17, Proposition 4.3.]).  $C$ の既約成分  $C_i$ の被約化を  $\Theta_i$ と書く.  $n$ を既約成分の個数とする. この時, Grothendieck 群  $G(C)$ は階数  $n+1$ の自由アーベル群であり, 以下の基底で生成される.

$$[\mathcal{O}_{\Theta_1}], \dots, [\mathcal{O}_{\Theta_n}], [\mathcal{O}_x].$$

**注意 2.4.**  $C$ は特異的であるため局所自由層の Grothendieck 群  $K_0(C)$ とは異なることに注意しておく. しかし, オイラーペアリングをとることで, 階級が等しいことがわかる.

$\mathcal{O}_{C_i}$ は有限の局所自由層の分解が取れない. 実際,  $N \geq 2$ に対して  $C$ が (I<sub>N</sub>)型の時であっても

$$\dim \text{Ext}_C^q(\mathcal{O}_{C_i}(k), \mathcal{O}_{C_i}(k)) = \begin{cases} 0 & (q < 0 \text{ or } q \text{ is odd}) \\ 1 & (q = 0) \\ 2 & (q \text{ is even}). \end{cases}$$

となる.

### 3 安定性条件

この章では初めに安定性条件を定義する. 次に Bridgeland による安定性条件の変形定理を紹介し, 安定性条件の空間が複素多様体になることを見る.

$\mathcal{D}$ を三角圏とし, 有限階数の自由アーベル群  $\Lambda$ と群準同型  $v: K(\mathcal{D}) \rightarrow \Lambda$ を固定する.

**定義 3.1.**

1.  $t$ 構造の核  $\mathcal{A}$ の安定性関数 (stability function)  $Z$ とは群準同型  $Z: K(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{C}$ で, 任意の  $0 \neq E \in \mathcal{A}$ に対して

$$Z(E) \in \mathbb{H} \cup \mathbb{R}_{<0}.$$

2.  $E \in \mathcal{A}$ の位相  $\phi(E)$ は次のように定義される.

$$\phi(E) = (1/\pi) \arg Z(E) \in (0, 1].$$

3. 安定性関数  $Z$ に対して  $0 \neq E \in \mathcal{A}$ が (半)安定であるとは, 任意の部分対象  $F \subset E$ が  $\phi(F) \leq$  (resp.  $<$ )  $\phi(E)$ を満たす.

4.  $Z$  が Harder-Narasimhan 条件 (HN 条件) を満たすとは、任意の  $E \in \mathcal{A}$  に対して以下のフィルトレーションがとれる。

$$0 = E_0 \subset E_1 \subset \cdots \subset E_{n-1} \subset E_n$$

ただし、 $F_j = E_j/E_{j-1}$  が半安定で

$$\phi(F_1) > \phi(F_2) > \cdots > \phi(F_n).$$

を満たす。

次の台条件は有限性に対応する条件であり、[KS08] や [BMS16] で導入された。以下では有限次元ベクトル空間  $\Lambda \otimes \mathbb{R}$  のノルム  $\|-\|$  を固定する。

**定義 3.2.** 下の条件が成立するとき、 $\mathcal{A}$  と安定性関数  $Z$  が台条件を満たすという。

$$\sup \left\{ \frac{\|v(E)\|}{|Z(E)|} \mid E \text{ is semistable in } \mathcal{A} \right\} < \infty.$$

$\mathfrak{t}$  構造の核  $\mathcal{A}$  と安定性関数  $Z$  の組  $(Z, \mathcal{A})$  が HN 条件と台条件を満たすとき、安定性条件という。この安定性条件全体の集合を  $\text{Stab}_\Lambda(\mathcal{D})$  と書く。

**定理 3.3** ([Bri07, Theorem1.2.]).  $\text{Stab}_\Lambda(\mathcal{D})$  には自然に位相が入り、次の忘却写像が連続になる

$$\pi : \text{Stab}_\Lambda(\mathcal{D}) \rightarrow \text{Hom}(\Lambda, \mathbb{C}), (Z, \mathcal{A}) \mapsto Z.$$

加えて  $\pi$  は局所同相であり、 $\text{Stab}_\Lambda(\mathcal{D})$  に複素構造が入る。

安定性条件の空間  $\text{Stab}_\Lambda(\mathcal{D})$  を安定多様体とよぶ。初めに固定した  $v: K(\mathcal{D}) \rightarrow \Lambda$  があきらかな場合、省略し  $\text{Stab}(\mathcal{D})$  と書く。

次はこの空間  $\text{Stab}_\Lambda(\mathcal{D})$  への作用を考察する。  $\text{GL}^+(2, \mathbb{R})$  の普遍被覆  $\widetilde{\text{GL}}^+(2, \mathbb{R})$  を考える。この普遍被覆は次のような記述がある。

$$\widetilde{\text{GL}}^+(2, \mathbb{R}) = \{(T, f) \mid T \in \text{GL}^+(2, \mathbb{R}), f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, T \text{ and } f \text{ induce the same actions on } \mathbb{S}^1\}$$

$g = (T, f) \in \widetilde{\text{GL}}^+(2, \mathbb{R})$  と  $\sigma = (Z, \mathcal{A})$  に対して、 $g\sigma = (T^{-1} \circ Z, \mathcal{A}')$  とする。ただし、 $\mathcal{A}'$  は

$$\{E \in \mathcal{D} \mid E \text{ is stable of phase } \phi \in (f(0), f(1))\}$$

で生成されるアーベル圏である。

次に自己導来同値群からの作用を考える。  $\Phi \in \text{Auteq}(\mathcal{D})$  をとる。導来同値  $\Phi$  が  $\Lambda$  への作用を誘導すると仮定する。この時、 $\sigma = (Z, \mathcal{A})$  に対して  $\Phi(\sigma) = (Z \circ \Phi^{-1}, \Phi(\mathcal{A}))$  と定める。

滑らかな曲線は Grothendieck 群が階数 2 である、そのため、安定性条件を考える際  $\Lambda$  として Grothendieck 群そのものをとれる。この安定多様体を単に  $\text{Stab}(C)$  と書く。曲線の安定性条件の空間について次のことが知られている。

**定理 3.4** ([Bri07],[Oka04],[Mac07]).  $C$  を種数  $g$  の滑らかな曲線とする。この時、次が成立。

$$\text{Stab}(C) = \begin{cases} \mathbb{C}^2 & (g = 0) \\ \widetilde{\text{GL}}^+(2, \mathbb{R}) & (g \geq 1). \end{cases}$$

$g \geq 1$  のとき、この定理は安定性条件が本質的に slope 安定性に対応するものしかないことを示している。  $g = 0$  の射影直線の時に様子が異なるのは、圏同値  $\mathcal{D}^b(\mathbb{P}^1) \cong \mathcal{D}^b(\text{End}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)))$  により誘導される  $t$  構造の Beilinson 核があるためである。

## 4 主結果

$C$  を可約の小平曲線とする。  $C$  の安定性条件全体を  $\text{Stab}(C)$  と書く。

初めに、  $\text{Stab}(C)$  においても slope 安定性に対応する安定性条件が存在することを示す。

**命題 4.1.**  $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{H}$  をとる。この時、

$$Z = -\chi + z_1 \text{rk}_1 + \dots + z_n \text{rk}_n, \mathcal{A} = \text{Coh}(C)$$

は安定性条件を定める。ただし、  $\chi$  はオイラー数であり、  $\text{rk}_i$  は既約成分  $C_i$  での階数である。

証明の概略. 組  $(Z, \mathcal{A})$  が HN 条件を満たす安定性関数であることは slope 安定性の証明と同様に行える。楕円曲面への埋め込み  $i: C \hookrightarrow S$  により、有限次元ベクトル空間  $G(C) \otimes \mathbb{C}$  に二次形式が定まる。実際、  $E, F \in G(C)$  に対して、

$$\langle E, F \rangle = -\chi(i_*(E), i_*(F))$$

とすると半負定値二次形式である。台条件については、この二次形式を用いることで [Bri08] などと同様に安定対象の議論に帰着して証明できる。  $\square$

上で構成した安定性条件を含む  $\text{Stab}(C)$  の連結成分を  $\text{Stab}^\dagger(C)$  と書く。

実は楕円曲線とは異なり、slope 安定性には対応しない安定性条件も存在する。

**命題 4.2.**  $r \in (k, k+1), z_2, \dots, z_n \in \mathbb{H}$  をとる。この時、

$$Z = -\chi + r \text{rk}_1 + z_2 \text{rk}_2 + \dots + z_n \text{rk}_n, \mathcal{A} = \langle \mathcal{F}_k[1], \mathcal{T}_k \rangle$$

は安定性条件になる。ただし、  $\mathcal{F}_k, \mathcal{T}_k$  は以下で定まる。

$$\mathcal{F}_k = \langle \mathcal{O}_{\Theta_1}(l) \mid l \leq k \rangle$$

$$\mathcal{T}_k = {}^\perp \mathcal{F}_k$$

**注意 4.3.** この安定性条件は slope 安定性には対応しない。特に  $x \in C_1$  に対して摩天楼層  $\mathcal{O}_x$  は以下の  $JH$  フィルトレーションを持ち、安定ではない。

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\Theta_1}(k+1) \rightarrow \mathcal{O}_x \rightarrow \mathcal{O}_{\Theta_1}(k)[1] \rightarrow 0$$

安定性条件の空間を調べる際に導来同値の作用を調べるのが不可欠であり、[Kar23] では導来同値を具体的に構成した。これは [ST01] で定義された球面ねじり関手を特異的ファイバーに制限することで得られた。

**定理 4.4.**  $C$  を楕円曲面  $S \rightarrow B$  の特異ファイバーで得られる小平曲線とする。自然な閉埋め込み  $j: C \rightarrow S$  をとり、 $G$  を  $C$  に含まれる射影直線とする。この時、 $C$  の導来同値  $\Phi_{\mathcal{O}_G(k)}$  があり、 $S$  上の球面ねじり関手  $T_{\mathcal{O}_G(k)}$  に対して以下の可換性が成り立つ。

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}^b(S_0) & \xrightarrow{\Phi_{\mathcal{O}_G(k)}} & \mathcal{D}^b(S_0) \\ \downarrow j_* & & \downarrow j_* \\ \mathcal{D}^b(S) & \xrightarrow{T_{\mathcal{O}_G(k)}} & \mathcal{D}^b(S), \end{array}$$

ここで構成した導来同値  $\Phi_{\mathcal{O}_G(k)}$  はベクトル空間  $G(C) \otimes \mathbb{C}$  において超平面  $\{v \in G(C) \otimes \mathbb{C} \mid \langle v, [\mathcal{O}_G(k)] \rangle = 0\}$  を軸とする鏡映変換になっている。

この導来同値の安定性条件の空間  $\text{Stab}^\dagger(C)$  への作用を観察することで、次の命題を得る。

**命題 4.5.**  $\mathcal{B}$  を  $\Phi_{\mathcal{O}_{\Theta_i}(k)}$  で生成される自己導来同値群の部分群とする。この時、次が成り立つ。

$$\text{Stab}^\dagger(C) = \bigcup_{\Phi \in \mathcal{B}} \Phi(\overline{U(C)}).$$

次のような導来同値を考える。

$$\begin{aligned} \text{Aut}_{\text{tri}}(C) &= \{f \in \text{Aut}(C) \mid f_* \text{ is trivial in } G(C)\}, \\ \text{Pic}_{\text{tri}}^0(C) &= \{\mathcal{L} \in \text{Pic}^0(C) \mid \mathcal{L}|_{\Theta_i} \cong \mathcal{O}_{\Theta_i} \text{ for all reduced curves } \Theta_i\}. \end{aligned}$$

$\text{Pic}_{\text{tri}}^0(C) \rtimes \text{Aut}_{\text{tri}}(C)$  は  $\text{Stab}^\dagger(C)$  において自明に作用する。この観察と上の命題を用いることで、次の主定理を得る。

**定理 4.6** ([Kar23]).  $G(C) \otimes \mathbb{C}$  の開集合  $\mathcal{P}_0^+(C) \subset G(C)^\vee \otimes \mathbb{C}$  があり、忘却写像の制限

$$\pi: \text{Stab}^\dagger(C) \rightarrow \mathcal{P}_0^+(C)$$

が被覆写像になる。

加えて、 $\pi$  のデッキ変換群は  $\text{Auteq}_0^*(C)/(\text{Pic}_{\text{tri}}^0(C) \rtimes \text{Aut}_{\text{tri}}(C))$  と同型になる。

## 参考文献

- [BMS16] Arend Bayer, Emanuele Macrì, and Paolo Stellari, *The space of stability conditions on abelian threefolds, and on some Calabi-Yau threefolds*, *Inventiones mathematicae* **206** (2016), no. 3, 869–933.
- [Bri07] Tom Bridgeland, *Stability conditions on triangulated categories*, *Annals of Mathematics* (2007), 317–345.
- [Bri08] ———, *Stability conditions on K3 surfaces*, *Duke Mathematical Journal* **141** (2008), no. 2, 241–291.
- [Kar23] Tomohiro Karube, *Stability conditions on degenerated elliptic curves*, arXiv preprint arXiv:2301.09453 (2023).

- [Kod63] Kunihiko Kodaira, *On compact analytic surfaces: II*, Annals of Mathematics (1963), 563–626.
- [KS08] Maxim Kontsevich and Yan Soibelman, *Stability structures, motivic Donaldson-Thomas invariants and cluster transformations*, arXiv preprint arXiv:0811.2435 (2008).
- [Mac07] Emanuele Macrì, *Stability conditions on curves*, arXiv preprint arXiv:0705.3794 (2007).
- [MP17] Ana Cristina López Martín and Carlos Tejero Prieto, *Derived equivalences and kodaira fibers*, Journal of Geometry and Physics **122** (2017), 69–79.
- [Oka04] So Okada, *Stability manifold of  $p^{\wedge} 1$* , arXiv preprint math/0411220 (2004).
- [ST01] Paul Seidel and Richard Thomas, *Braid group actions on derived categories of coherent sheaves*, Duke Mathematical Journal **108** (2001), no. 1, 37–108.