$\sqrt{2}$ の 2 進単純正規性と Riemann ゼータ関数

名古屋大学大学院 多元数理科学研究科 多元数理科学専攻
金堂優哉 (Yuya KANADO) *

概要

ある実数が b 進で単純正規であるとは, その実数を b 進展開した際の各桁において, 0 から $b-1$ までの b 個の自然数が平均してそれぞれ $1/b$ の確率で出現するときに言う. 今回, $\sqrt{2}$ の 2 進展開に現れる 1 の個数と, Riemann ゼータ関数のある等差数列上の平均値に関する関係式を得た. これにより,

$$\lim_{l\to\infty} \frac{1}{l} \sum_{0<|n|\leq 2^l} \zeta\left(\frac{2n\pi i}{\log 2}\right) \frac{(-1)^n}{n} = 0$$

が成り立つことと $\sqrt{2}$ が 2 進で単純正規であることは同値となる. この研究は, 筑波大学の齋藤耕太氏との共同研究である.

1 記号

- $\mathbb{Z}$: 整数全体
- $\mathbb{Z}_{\geq x}$: 実数 x 以上の整数全体
- $\mathbb{N} := \mathbb{Z}_{\geq 1}$
- $\lfloor x \rfloor$: 実数 x 以下の最大の整数
- $\Re(s)$: 複素数 s の実部
- $\zeta(s)$: Riemann ゼータ関数
- $\log_x y := \log y / \log x$

2 導入

任意の $x \in \mathbb{R}$, $a \in \{0, 1, \cdots b-1\}$ と実数 $l > 0$ に対して,

$$A_b(l; a, x) = \#\{d \in \mathbb{Z} \colon 0 \leq d \leq l,\ \lfloor b^d x \rfloor \in a + b\mathbb{Z}\}.$$

と定める. x を $x = \sum_{d=-m}^{\infty} c_d b^{-d}$ と b 進展開すると, $A_b(l; a, x)$ は $c_d = a$ となる $d \in [0, l]$ の個数を表す. x が 2 進で単純正規であるとは, すべての $a \in \{0, 1, \cdots b-1\}$ に対して

$$\lim_{l\to\infty} A(l; a, x)/l = 1/2$$

* E-mail: m21017a@math.nagoya-u.ac.jp

が成り立つときにいう.

1909 年, Borel はほとんどすべての実数が任意の b 進で単純正規であることを示した. 具体的な例を挙げると, 各桁に自然数を小さい順に並べた Champernowne 定数:

$$0.12345678910111213141 5\ldots$$

や, 素数を小さい順に並べた Copeland–Erdös 定数:

$$0.23571113171923293137\ldots$$

が 10 進で単純正規であることが知られている. このように, 人工的な数に関する単純正規性においては, 次の命題によって構成することができる. 証明は, [1, Section 4.2] を参照. ちなみに, この文献ではより深い主張となっている. ここで, 自然数 c と $b \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ に対して, $(c)_b$ で c の b 進表記を表すとする. 例えば, $19 = (19)_{10} = (10011)_2$ である.

命題 2.1. $b \geq 2$ を整数とする. 単調増加数列 $(c_j)_{j\geq 1} \subset \mathbb{N}$ は, 任意の $\theta > 1$ と十分大なる自然数 N に対して $c_N < N^\theta$ を満たすとする. このとき, 実数

$$0.(c_1)_b(c_2)_b(c_3)_b(c_4)_b\ldots$$

は b 進単純正規である.

この命題において, 例えば $c_j = j$, $b = 10$ とすれば, Champernowne 定数が 10 進で単純正規であることが分かる. また $c_j = j$, $b = 2$ とすれば

$$0.11011100101110111100 0\ldots$$

が 2 進で単純正規とも分かる. このように, 単純正規な実数はいくらでも構成できるのである. ならば考えることはもうない, ということは全くなく, 実は, **人工的でない**実数の単純正規性についてはひとつも分かっていない. 数学的に重要な無理数である π, e や $\log 2$, さらに代数的に手の届きそうな $\sqrt{2}$ に至るまで知られていない. そのような中, 今回, $\sqrt{2}$ が 2 進で単純正規であることと,

$$\lim_{l\to\infty} \frac{1}{l} \sum_{0<|n|\leq 2^l} \zeta\left(\frac{2n\pi i}{\log 2}\right) \frac{(-1)^n}{n} = 0$$

が成り立つことが同値であることを示した.

3 主定理

記法 3.1. f, g, h を実数値関数, 特に h は非負であるとする. $x \to \infty$ で $f(x) = g(x) + o(h(x))$ であるとは, 任意の $\epsilon > 0$ に対して x が十分大きければ $|f(x) - g(x)| \leq h(x)\epsilon$ が成り立つときにいう. ある定数 $C > 0$ が存在して, 十分大なる x に対して $|f(x) - g(x)| \leq Ch(x)$ を満たすとき, $f(x) = g(x) + O(h(x))$ とかく. また, $f(x) = O(h(x))$ を $f(x) \ll h(x)$ と表す. さらに, $h(x) \ll f(x) \ll h(x)$ が成り立つとき, $f(x) \asymp h(x)$ とかく.

複素数 s と複素数列 $(a_n)_{n\geq 1}$ に対して, 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ を Dirichlet 級数, 係数の列 (a_n) を Dirichlet 係数と呼ぶ. 任意の Dirichlet 級数は, ある $\sigma \in \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ が存在し, $\Re(s) > \sigma$ で（絶対）収束, かつ $\Re(s) < \sigma$ で（絶対）収束しないことが知られている. このときの軸 $\Re(s) = \sigma$ を（絶対）収束軸, 領域 $\Re(s) > \sigma$ を（絶対）収束領域という. 二つの Dirichlet 級数 $\alpha(s) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)n^{-s}, \beta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} g(n)n^{-s}$ の積もまた Dirichlet 級数となる. このときの $\alpha(s)\beta(s)$ の Dirichlet 係数は

$$(f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right)$$

であり, $f * g$ は f と g の Dirichlet 積と呼ばれる. 主定理を得るうえで重要なのは, 次の Perron の公式に Dirichlet 積を持ち込むことである. 証明は [4, Theorem 5.2, Corollary 5.3] を参照.

補題 3.2 (Perron's formula)**.** *Dirichlet* 級数 $\alpha(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ の絶対収束軸を σ_a とおく. このとき, $c > \max(0, \sigma_a)$, $x > 0$, $T > 0$ に関して一様に

$$\sum_{n\leq x}{}' a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT} \alpha(s)\frac{x^s}{s}ds + R$$

が成り立つ. ここで, R は

$$R \ll \sum_{\substack{x/2<n<2x \\ n\neq x}} |a_n| \min\left(\frac{x}{T|x-n|}, 1\right) + \frac{(4x)^c}{T}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{n^c},$$

を満たすものである. また $\sum_{n\leq x}'$ は, x が整数のときのみ $n = x$ の項を $1/2$ 倍して足すことを表す.

Perron の公式は, 左辺が数論的な形で右辺が解析的な形をしており, 数列の部分和の漸近を求める際などに使われる. x を 2 以上の自然数とし, この補題に上の Dirichlet 級数 $\alpha(s)\beta(s)$ を適用すると,

$$\sum_{n\leq x}(f * g)(n) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT} \alpha(s)\beta(s)\frac{x^s}{s}ds + (\text{errors}) \tag{3.1}$$

となる. 但し, R や, $\sum_{n\leq x}'$ を $\sum_{n\leq x}$ に変換するときに現れる $\frac{1}{2}(f * g)(x)$ は (errors) とした. (3.1) の左辺は

$$\begin{aligned}\sum_{n\leq x}(f * g)(n) &= \sum_{n\leq x}\sum_{d|n} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right) \\ &= \sum_{1\leq d\leq x} f(d) \sum_{1\leq m\leq x/d} g(m)\end{aligned}$$

と変形できる. 特に $f(n)$ を, n が 2 の偶数べきでかけるとき 1, それ以外で 0 をとるとすると, $x = 2^{2l+1}$ として

$$\begin{aligned}&= \sum_{1\leq 2^{2d}\leq 2^{2l+1}} \sum_{1\leq m\leq 2^{2l+1-2d}} g(m) \\ &= \sum_{0\leq d\leq l} \sum_{1\leq m\leq 2^{2l+1-2d}} g(m)\end{aligned}$$

$$= \sum_{0\le d\le l}\sum_{1\le m\le 2^{2d+1}} g(m)$$

となる．従って，$\sum_{1\le m\le 2^{2d+1}} g(m)$ が d に関して 0 か 1 のみとるように g を調整できれば，右辺の式全体は $\sum_{1\le m\le 2^{2d+1}} g(m)$ が 1 をとる d の個数を表すことになる．そこで，$g(m)$ を，m が平方数のときに $(-1)^{\sqrt{m}-1}$，それ以外で 0 をとるように定めると，

$$\begin{aligned}
&= \sum_{0\le d\le l}\sum_{1\le n^2\le 2^{2d+1}} (-1)^{n-1}\\
&= \sum_{0\le d\le l}\sum_{1\le n\le 2^d\sqrt{2}} (-1)^{n-1}
\end{aligned}$$

と変形できる．すると，この右辺の式全体は $\sum_{1\le n\le 2^d\sqrt{2}}(-1)^{n-1}=1$ となる $d\in[0,l]$ の個数を表している．これにより，(3.1) の左辺は

$$= \sum_{\substack{0\le d\le l\\ \lfloor 2^d\sqrt{2}\rfloor\in 1+2\mathbb{Z}}} 1 = A_2(l;1,\sqrt{2})$$

となり，$A_2(l;1,\sqrt{2})$ を解析的に評価することができる．まとめれば，

$$A_2(l;1,\sqrt{2}) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT}\alpha(s)\beta(s)\frac{2^{(2l+1)s}}{s}ds + (\text{errors}).$$

さらに，f, g の定義により，Dirichlet 級数 α, β はそれぞれ

$$\begin{aligned}
\alpha(s) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{n^s} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{2ns}} = \frac{1}{1-2^{-2s}},\\
\beta(s) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{g(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{2s}} = (1-2^{1-2s})\zeta(2s)
\end{aligned}$$

であるから，さらに

$$\begin{aligned}
A_2(l;1,\sqrt{2}) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT}\frac{1-2^{1-2s}}{1-2^{-2s}}\zeta(2s)\frac{2^{(2l+1)s}}{s}ds + (\text{errors})\\
&=: \frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT}\Phi_l(s)ds + (\text{errors}).
\end{aligned}$$

これは，$\sqrt{2}$ の 2 進展開に現れる 1 の個数が Riemann ゼータ関数の重み付き積分に漸近することを示している．次に，この右辺が Riemann ゼータ関数のある等差数列上の平均値に漸近することについて記述する．$\sigma=-1/4$ とおく．右辺の積分路を

$$c+iT \to \sigma+iT \to \sigma-iT \to c-iT$$

に変換する．領域 $(\sigma, c)\times i\mathbb{R}$ 内で，$\Phi_l(s)$ は

$$s = s_n := \frac{n\pi i}{\log 2}\quad (n\in\mathbb{Z})$$

に極を持ち, それ以外の特異点を持たない. またその留数は

$$
\begin{aligned}
\operatorname*{Res}_{s_n=0} \Phi_l(s) &= \operatorname*{Res}_{s_n=0} \left(\frac{1-2^{1-2s}}{1-2^{-2s}} \zeta(2s) \frac{2^{(2l+1)s}}{s} \right) = \frac{l}{2} + O(1), \\
\operatorname*{Res}_{s_n\neq 0} \Phi_l(s) &= \zeta\left(\frac{2n\pi i}{\log 2}\right) \frac{(-1)^{n-1}}{2n\pi i}
\end{aligned}
$$

であるから, 留数定理より

$$
\begin{aligned}
A_2(l;1,\sqrt{2}) = \frac{l}{2} &- \frac{1}{2\pi i} \sum_{0<|n|\leq \frac{\log 2}{\pi} T} \zeta\left(\frac{2n\pi i}{\log 2}\right) \frac{(-1)^n}{n} \\
&- \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{c+iT}^{\sigma+iT} + \int_{\sigma+iT}^{\sigma-iT} + \int_{\sigma-iT}^{c-iT} \right) \Phi_l(s) ds + (\text{errors})
\end{aligned}
$$

と変形できる. 右辺の積分について,

$$
\left(\int_{c+iT}^{\sigma+iT} + \int_{\sigma-iT}^{c-iT} \right) \Phi_l(s) ds \tag{3.2}
$$

においては, 次の Riemann ゼータ関数の評価を使うことで, 主要項に影響を与えないことが示せる. 証明は [3, Theorem 1.9] を参照.

補題 3.3. $t \geq t_0 > 0$ と $\sigma \in \mathbb{R}$ に関して一様に

$$
\zeta(\sigma+it) \ll \begin{cases} 1 & (\sigma \geq 2), \\ \log t & (1 \leq \sigma \leq 2), \\ t^{\frac{1}{2}(1-\sigma)} \log t & (0 \leq \sigma \leq 1), \\ t^{\frac{1}{2}-\sigma} \log t & (\sigma \leq 0). \end{cases}
$$

また, 積分

$$
\int_{\sigma-iT}^{\sigma+iT} \Phi_l(s) ds
$$

については, Riemann ゼータ関数の関数等式

$$
\zeta(s) = 2^{s-1}\pi^s \frac{\sec(\pi s/2)}{\Gamma(s)} \zeta(1-s)
$$

を $\Phi_l(s)$ に適用して ζ の実部を 1 より大きくしたのち, 本質的には, 次の stationary phase method などの回転を捉える手法を用いる. 補題 3.4 の証明は [8, Lemma 4.6] 参照.

補題 3.4 (the stationary phase method)**.** 閉区間 $[a,b]$ で定義された実関数 $F(x)$ は 3 回微分可能であるとし, $c \in [a,b]$ を $F'(c)=0$ となる点とする. また, ある $\lambda_2, \lambda_3 > 0$ と $A > 0$ が存在して, 任意の $x \in [a,b]$ に対して

$$
0 < \lambda_2 \leq -F''(x) < A\lambda_2 \tag{3.3}
$$

$$
|F'''(x)| < A\lambda_3. \tag{3.4}
$$

を満たすとする．このとき，

$$\int_a^b e^{iF(x)}dx = (2\pi)^{\frac{1}{2}}\frac{e^{-\pi i/4+iF(c)}}{|F''(c)|^{1/2}} + O(\lambda_2^{-\frac{4}{5}}\lambda_3^{\frac{1}{5}}) \\ + O\left(\min\left(|F'(a)|^{-1}, \lambda_2^{-\frac{1}{2}}\right)\right) + O\left(\min\left(|F'(b)|^{-1}, \lambda_2^{-\frac{1}{2}}\right)\right)$$

が成り立つ．

この補題を適用すると，

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-iT}^{\sigma+iT}\Phi_l(s)ds = \frac{l}{2} + A_2(l;1,\sqrt{2}) - A_2(2l;1,\sqrt{2}) + (\text{errors})$$

を得ることができる．以上をまとめ，

$$A_2(2l;1,\sqrt{2}) = l - \frac{1}{2\pi i}\sum_{0<|n|\le\frac{\log 2}{\pi}T}\zeta\left(\frac{2n\pi i}{\log 2}\right)\frac{(-1)^n}{n} + (\text{errors}). \tag{3.5}$$

但し，精密な議論を行うと，Perron の公式での誤差項 R と (3.2) を評価するうえで，T は $T \asymp x\log x \asymp l2^{2l}$ を満たす必要が出てくる．そこで，l' を十分大なる実数とし，$2l \le l' - \log_2 l' < 2l+2$ を満たす $l \in \mathbb{N}$ をとる．$T = \frac{\pi}{\log 2}2^{l'}$ とすれば，$T \asymp l2^l$ を満たしている．また $l' = 2l + O(\log l)$ だから，(3.5) と合わせて

$$\begin{aligned} A_2(l';1,\sqrt{2}) &= A_2(2l;1,\sqrt{2}) + O(\log l) \\ &= \frac{l'}{2} - \frac{1}{2\pi i}\sum_{0<|n|\le 2^{l'}}\zeta\left(\frac{2n\pi i}{\log 2}\right)\frac{(-1)^n}{n} + (\text{errors}). \end{aligned}$$

以上により，次の主定理が得られる．

定理 3.5. 実数 $l > 0$ に対して

$$A_2(l;1,\sqrt{2}) = \frac{l}{2} - \frac{1}{2\pi i}\sum_{0<|n|\le 2^l}\zeta\left(\frac{2n\pi i}{\log 2}\right)\frac{(-1)^n}{n} + o(l) \quad (l\to\infty).$$

特に，$\sqrt{2}$ が 2 進で単純正規であることと

$$\lim_{l\to\infty}\frac{1}{l}\sum_{0<|n|\le 2^l}\zeta\left(\frac{2n\pi i}{\log 2}\right)\frac{(-1)^n}{n} = 0 \tag{3.6}$$

が成り立つことは同値である．

この定理により，Riemann ゼータ関数の等差数列上の平均値が調べられれば，$\sqrt{2}$ の 2 進展開に出現する 1 の割合が分かることになる．Riemann ゼータ関数の等差数列上の平均値の漸近に関する研究は，Steuding と Wegert の論文 [7, Theorem 1.1] から始まった．彼らは，$\sum_{0\le n<M}\zeta(s_0+idn)$ の漸近を，$0 < \Re(s_0) < 1, d = 2\pi/\log k$ $(k \in \mathbb{Z}_{\ge 2})$ という条件下で求めた．また，Özbek と Steuding は，[5, 6] にて次のようなより一般の d で漸近式を得ている:

$$\lim_{M\to\infty}\frac{1}{M}\sum_{0\le n<M}\zeta(s_0+idn) = \begin{cases}(1-k^{-s_0})^{-1} & (d = \frac{2\pi r}{\log k},\ r\in\mathbb{N},\ k\in\mathbb{Z}_{\ge 2}), \\ 1 & \text{otherwise.}\end{cases} \tag{3.7}$$

$\Re(s_0) = 0$ の評価についていえば, 本論文で

$$\sum_{0<|n|\le 2^l} \zeta\left(\frac{2n\pi i}{\log 2}\right)\frac{1}{n} \ll 1$$

であることが分かった. この形は (3.6) に似ているように思えるが, (3.6) は依然として示せていない. とはいえ, 上述した通り, Borel は 1909 年にほとんどすべての実数は単純正規であることを証明しており, $\sqrt{2}$ も単純正規であろうと考えられる. 従って, (3.6) も真と予想するのが最もらしい.

参考文献

[1] Yann Bugeaud, Distribution modulo one and diophantine approximation, Cambridge University Press 2012.

[2] É. M. Borel, Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo vol.27, 1909, 247–271.

[3] A. Ivić, The Riemann zeta-function. Theory and applications, Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2003. xxii+517 pp.

[4] H. L. Montgomery and R. C. Vaughan, Multiplicative Number Theory I. Classical Theory, Cambridge University Press 2007.

[5] S. S. Özbek and J. Steuding, The values of the Riemann zeta-function on arithmetic progressions, Analytic and Probabilistic Methods in Number Theory, Vilnius Univ. Leidykla, Vilnius, 2017, 149–164.

[6] S. S. Özbek and J. Steuding, The values of the Riemann zeta-function on generalized arithmetic progressions, Arch. Math. (Basel) vol.112 (1), 2019, 53–59.

[7] J. Steuding and E. Wegert, The Riemann zeta function on arithmetic progressions, Exp. Math. vol.21 (3), 2012, 235–240.

[8] E. C. Titchmarsh, The Theory of the Riemann Zeta-function, Oxford Science Publication 1986.