

# 双曲空間の等長変換がなすカンドル\*

大阪公立大学 大学院理学研究科 数学専攻

甲斐涼哉 (Ryoya Kai)†

## 概要

カンドルは群の共役演算を抽象化した代数系で、その演算規則は結び目の図式の変形や対称空間の点対称が満たす性質に対応する。3次元双曲幾何学は結び目と深い関係があり、そのモデル空間  $\mathbb{H}^3$  は対称空間である。 $\mathbb{H}^3$  の向きを保つ等長変換は、 $\mathbb{H}^3$  とその理想境界  $\partial\mathbb{H}^3$  への作用の固定点によって分類される。双曲空間の等長変換の分類に対応してカンドルが得られ、本稿ではこのようなカンドルの構造について得られた結果を紹介する。

## 1 導入

円周の3次元球面への滑らかな埋め込みを結び目という。結び目の分類には様々な不変量が用いられる。補空間が有限体積完備双曲構造を持つ結び目を双曲結び目と呼ぶ。3次元以上では有限体積完備双曲構造は位相不変量となることが知られている (Mostow 剛性定理)。したがって、有限体積双曲構造から計算される幾何学的な量 (体積や最短測地線の長さなど) は結び目の位相不変量となる。結び目の補空間の双曲構造の研究では、結び目の補空間の基本群から等長変換群  $\text{Isom}(\mathbb{H}^3)$  への準同型 (ホロノミー表現) が重要な役割を果たす。

カンドルは Joyce と Matveev によって独立に導入された代数系である。カンドルの演算規則は結び目の Reidemeister 移動と対応する。また、結び目の補空間の基本群である結び目群と同様に、結び目カンドルが定義され結び目の不変量となる。結び目カンドルから別のカンドル  $X$  への準同型は  $X$ -彩色と呼ばれ、結び目群からの準同型のある種の精密化となっている。

カンドルと双曲幾何学に関する先行研究として [2] や [3] がある。ここでは、結び目カンドルと双曲体積 (もしくは複素体積) との関係性について研究されている。特に [3] では、放物型等長変換全体がなすカンドル  $\mathcal{P}$  へのカンドル準同型を用いることで、結び目の補空間の複素体積が計算できることが示されている。本稿では、双曲空間の放物型変換に限らない一般の等長変換がなすカンドルの構造を紹介する。

\* 本研究は JST 科学技術イノベーション創出に向けた大学フェローシップ創設事業 JPMJFS2138 の支援を受けたものです。

† E-mail:sw23889b@st.omu.ac.jp

## 2 準備

### 2.1 カンドル

はじめにカンドルを紹介する．詳細は [4] などを参照．

**定義 2.1.** 空でない集合  $X$  上の二項演算  $\triangleleft: X \times X \rightarrow X$  が次を満たすとき,  $(X, \triangleleft)$  をカンドルという;

1. 任意の  $x \in X$  に対して,  $x \triangleleft x = x$ ,
2. 任意の  $y \in X$  に対して,  $S_y(x) = x \triangleleft y$  で定義される写像  $S_y: X \rightarrow X$  は全単射,
3. 任意の  $x, y, z \in X$  に対して,  $(x \triangleleft y) \triangleleft z = (x \triangleleft z) \triangleleft (y \triangleleft z)$ .

全単射  $S_y: X \rightarrow X$  を  $y$  における点対称という．

カンドルの間の写像が演算を保つときカンドル準同型という．特に, 全単射なカンドル準同型をカンドル同型という．点対称はカンドル同型である．

**例 2.2.** 群  $G$  に演算を  $g \triangleleft h := h^{-1}gh$  で定義すると,  $(G, \triangleleft)$  はカンドルとなる．これを  $G$  の共役カンドルといい  $\text{Conj}(G)$  とかく．

**例 2.3.** 群  $G$  とその部分群  $H$  と  $G$  の自己同型  $\sigma \in \text{Aut}(G)$  で  $H$  への制限が恒等写像であるものの組  $(G, H, \sigma)$  をカンドルの三つ組みと呼ぶ． $G$  の  $H$  による右剰余類の集合  $H \backslash G$  上の演算を,  $Hg \triangleleft Hh := H\rho(gh^{-1})h$  で定義すると,  $(H \backslash G, \triangleleft)$  はカンドルとなる．このカンドルを  $Q(G, H, \sigma)$  とかく．

**例 2.4** ([1, 3.3 節]).  $\mathfrak{g}$  を Lie 群  $G$  の Lie 環とする．このとき, 各元  $g \in G$  が定める内部自己同型  $\iota_g: G \rightarrow G$  の単位元における微分によって, 随伴表現  $\text{Ad}: G \rightarrow \text{Aut}(\mathfrak{g})$  が得られる．また,  $\exp: \mathfrak{g} \rightarrow G$  を指数写像とする．このとき,  $\mathfrak{g}$  上の演算を  $X \triangleleft Y := \text{Ad}(\exp(-Y))X$  で定義すると  $(\mathfrak{g}, \triangleleft)$  はカンドルとなる．

**定義 2.5.** カンドル  $X$  上のカンドル同型全体がなす群を自己同型群といい  $\text{Aut}(X)$  とかく．カンドル  $X$  の点対称が生成する群をカンドル  $X$  の内部自己同型群といい,  $\text{Inn}(X)$  とかく．

自己同型群が推移的に作用するとき, 等質カンドルという．また, 内部自己同型群が推移的に作用するとき, 連結カンドルという．

### 2.2 3次元双曲幾何学

ここでは, 3次元双曲空間を紹介する．詳細は [5] などを参照．四元数体の部分集合  $\mathbb{H}^3 = \{z + tj \mid z \in \mathbb{C}, t > 0\}$  に計量

$$ds^2 = \frac{|dz|^2 + dt^2}{t^2}$$

を与える。このとき、 $(\mathbb{H}^3, ds)$  を 3 次元双曲空間 (の上半空間モデル) という。また、行列  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$  に対して、向きを保つ等長変換

$$f_A : \mathbb{H}^3 \rightarrow \mathbb{H}^3, q \mapsto (aq + b)(cq + d)^{-1}$$

が定義できる。よって、全射準同型  $\pi : \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^3)$  が得られる。特に、 $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^3)$  は  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C}) = \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) / \{\pm I_2\}$  と同型であることがわかる。対応する行列によって、向きを保つ等長変換  $f_A \in \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^3) \setminus \{\mathrm{id}\}$   $A \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$  は次のように分類できる：

- $f_A$  : 楕円型  $\iff \mathrm{tr}A \in (-2, 2)$ ,
- $f_A$  : 放物型  $\iff \mathrm{tr}A = \pm 2$ ,
- $f_A$  : 斜航型  $\iff \mathrm{tr}A \in \mathbb{C} \setminus [-2, 2]$ .

これらの分類を、双曲空間  $\mathbb{H}^3$  およびその理想境界  $\partial\mathbb{H}^3 = \mathbb{C} \cup \{\infty\} = \mathbb{C}P^1$  への作用を用いて、以下のように言い換えられる：

- $f$  : 楕円型  $\iff f$  はある測地線  $l \subset \mathbb{H}^3$  上の点を固定する,
- $f$  : 放物型  $\iff f$  は  $\mathbb{H}^3$  に固定点を持たず、 $\partial\mathbb{H}^3$  のただ 1 点を固定する,
- $f$  : 斜航型  $\iff f$  は  $\mathbb{H}^3$  に固定点を持たず、 $\partial\mathbb{H}^3$  の 2 点を固定する.

### 3 主結果

主結果として、3 次元双曲空間の向きを保つ等長変換群  $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^3)$  の共役カンドルの部分カンドルの構造を明らかにした。以下、簡単のために  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$  で具体的に主結果を述べる。

$t \in \mathbb{C}$  に対して次のような集合を考える：

$$\tilde{X}_t = \{A \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \setminus \{\pm I_2\} \mid \mathrm{tr}(A) = t\} \subset \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}).$$

各  $\tilde{X}_t$  は  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$  の共役カンドルの部分カンドルとしてカンドルの構造を持つ。

**注意 3.1.**  $\pi : \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C}) \cong \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^3)$  を自然な射影とする。  $z \sim -z$  によって定まる  $\mathbb{C}$  上の同値関係の商集合を  $\mathcal{T}$  と書く。  $t \in \mathbb{C}$  に対して、  $[t] = \{\pm t\} \in \mathcal{T}$  である。  $\tau \in \mathcal{T}$  に対して、

$$X_\tau = \pi \left( \bigcup_{t \in \tau} \tilde{X}_t \right)$$

は  $\mathrm{Conj}(\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C}))$  の部分カンドルである。  $X_\tau$  に対しても、  $\tilde{X}_t$  と概ね同様な結果が得られる。

### 3.1 等質表示

$SL(2, \mathbb{C})$  の部分群として次のようなものを考える；

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} \varepsilon & \mu \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{C}) \mid \varepsilon \in \{\pm 1\}, \mu \in \mathbb{C} \right\},$$

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu^{-1} \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{C}) \mid \mu \in \mathbb{C}^* \right\}.$$

また、各  $t \in \mathbb{C}$  に対して、基点  $A_t \in X_t$  を次のようにとる；

$$A_t = \begin{cases} \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix} & (t = 2 \cos \theta \in (-2, 2), \theta \in (0, \pi)) \\ \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix} & (t = 2\varepsilon \in \{\pm 2\}, \varepsilon \in \{\pm 1\}) \\ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} & (t = \lambda + \lambda^{-1} \in \mathbb{C} \setminus [-2, 2], |\lambda| > 1) \end{cases}$$

また、群  $G$  の元  $g \in G$  が定める内部自己同型を  $\sigma_g$  とかく。以上の記号のもとで、 $\tilde{X}_t$  の等質表示は次のように与えられる。

**主定理 1.** 各  $t \in \mathbb{C}$  に対して、 $\tilde{X}_t$  は連結カンドルで、次の等質表示を持つ：

$$\tilde{X}_t \cong \begin{cases} Q(SL(2, \mathbb{C}), P, \sigma_{A_t}) & (t = \pm 2), \\ Q(SL(2, \mathbb{C}), S, \sigma_{A_t}) & (t \neq \pm 2). \end{cases}$$

**注意 3.2.** •  $\tau \neq [0]$  のとき、 $X_\tau$  も同様な等質表示を持つ。  $\tau = [0]$  のとき、 $X_{[0]} \cong (PSL(2, \mathbb{C}), \pi(S'), \sigma_{f_{A_0}})$  なる等質表示を持つ。ここで、

$$S' = S \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \mu \\ -\mu^{-1} & 0 \end{pmatrix} \mid \mu \in \mathbb{C}^* \right\}.$$

- 補空間  $S^3 \setminus K$  が有限体積完備双曲構造を持つ結び目  $K \subset S^3$  を双曲結び目という。双曲結び目の結び目カンドル (より広く、カusp を一つ持つ有限体積完備双曲多様体の基本群から定まるカンドル) は  $\mathcal{P} = X_{[2]} \cong \tilde{X}_2$  の離散部分カンドルとして実現できることも示せる。

### 3.2 随伴軌道としての表示

$SL(2, \mathbb{C})$  の Lie 環は

$$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) = \{a \in \mathfrak{gl}(2, \mathbb{C}) \mid \text{tr}(a) = 0\}$$

で与えられる。  $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{C})$  は複素 2 次正方行列全体の集合である。一般に、Killing 形式は Lie 環の構造から定まる自然な対称双線形写像であるが、  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  の Killing 形式  $B : \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \times \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$  は  $B(a, b) = 4\text{tr}(ab)$  で与えられる。特に、  $B(a, a) = 4\text{tr}(a^2) = -8\det(a)$  となる。各  $s \in \mathbb{C}$  に対して、

$$\mathfrak{t}_s = \left\{ a \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \setminus \{0\} \mid B(a, a) = \frac{s}{8} \right\}$$

とおく. 随伴表現による Lie 群の Lie 環への作用は Killing 形式を保つので,  $\mathfrak{r}_s$  は  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  の部分カンドルである.  $SL(2, \mathbb{C})$  の随伴表現による作用で等質表示を与えることによって, 次の同型がわかる.

**主定理 2.**  $t = e^{\sqrt{s}} + e^{-\sqrt{s}}$  のとき,  $\mathfrak{r}_s$  と  $\tilde{X}_t$  はカンドルとして同型である.

## 参考文献

- [1] M. Eisermann. Quandle coverings and their Galois correspondence. *Fundamenta Mathematicae*, Vol. 225, No. 1, pp. 103–167, 2014.
- [2] A. Inoue. Quandle and hyperbolic volume. *Topology and its Applications*, Vol. 157, No. 7, pp. 1237–1245, 2010.
- [3] A. Inoue and Y. Kabaya. Quandle homology and complex volume. *Geometriae Dedicata*, Vol. 171, pp. 265–292, 2014.
- [4] D. Joyce. A classifying invariant of knots, the knot quandle. *Journal of Pure and Applied Algebra*, Vol. 23, No. 1, pp. 37–65, 1982.
- [5] 谷口雅彦, 松崎克彦. 双曲的多様体とクライン群. 日本評論社, 1993.