2 次元トーラスの測地流と Birkhoff 切断について

立命館大学　大学院理工学研究科　基礎理工学専攻
岩本 光平 (Kohei IWAMOTO)

概 要

Birkhoff は [1] において, 運動方程式の解の位相的な性質を研究する上で Birkhoff 切断を定義した. Birkhoff 切断は 3 次元多様体の力学系を調べる上で有用な道具の一つであり, たとえば [2, 3] らによる双曲曲面の測地流に関する研究がある. Birkhoff 切断が存在すると, そこから第一回帰写像を定義できる. 本稿では 2 次元トーラスの測地流に対して, Birkhoff 切断から誘導される第一回帰写像に関して [4] で得られた主結果を紹介する.

1　導入

まずはじめに [5] を参照して測地流の定義を述べる. 微分幾何, 特に Riemann 幾何の基本的な概念として測地線がある. 測地線とは与えられた 2 点を結ぶ" 最短曲線", もしくはそれをつないで延長していったものである. Riemann 多様体の接束もしくは単位接束上には" 測地流" とよばれる流れが存在する. 測地流は初期点とその方向ベクトルから定まる測地線に対して, 速度ベクトルを対応させることで得られる.

定義 1.1. M を完備 Riemann 多様体とし, g を M 上の Riemann 計量, $\gamma_{(x,v)}(t)$ を以下の条件を満たすような一意的な測地線とする.

$$\begin{cases} \gamma_{(x,v)}(0) = x \\ \dot{\gamma}_{(x,v)}(0) = v \end{cases}$$

$t \in \mathbb{R}$ に対して $\phi_t : TM \to TM$ を次のように定義する.

$$\phi_t(x,v) := (\gamma_{(x,v)}(t), \dot{\gamma}_{(x,v)}(t))$$

このとき ϕ_t を M の単位接束 T_1M への制限を測地流とよぶ.

測地流の研究としては双曲曲面の測地流に関する研究が盛んであるが, 本稿では 2 次元トーラスの測地流に限定して話を進めていき, Birkhoff 切断に注目した研究について述べる. Birkhoff は [1] において, 運動方程式の解の位相的な性質を研究をする上で Birkhoff 切断を定義した.

定義 1.2 (Birkhoff [1], Fried [2])**.** ϕ_t を 3 次元多様体上の流れとする. 次の 3 つの条件を満たす曲面 Σ を Birkhoff 切断とよぶ.

1. 曲面の内部 $\mathrm{Int}(\Sigma)$ は流れに横断的に交わる.
2. 曲面の境界 $\partial\Sigma$ は有限個の閉軌道の和集合である.
3. ある正の数 t_0 が存在して, 任意の点 $x \in M$ に対して, $\phi_t \in \Sigma$ となる $t \in [0, t_0]$ が存在する.

次に2次元トーラスの測地流に対して, Birkhoff 切断の構成について考察する．まず, 2次元トーラス上に図1のように単純閉測地線 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ をとる.

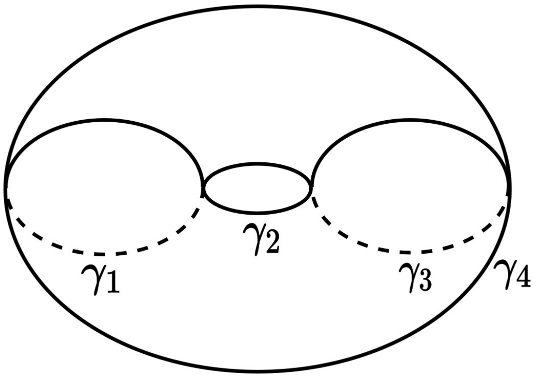

図 1:

そして, これらの測地線 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ によって, T^2 を次の図2のように4つの領域 P_1, P_2, P_3, P_4 に分割する．その中の P_1, P_2 上に図2のように凸で滑らかな単純閉曲線の族 C_1, C_2 を考える. ただし1個だけ特異点 O_1, O_2 を持つものとする.

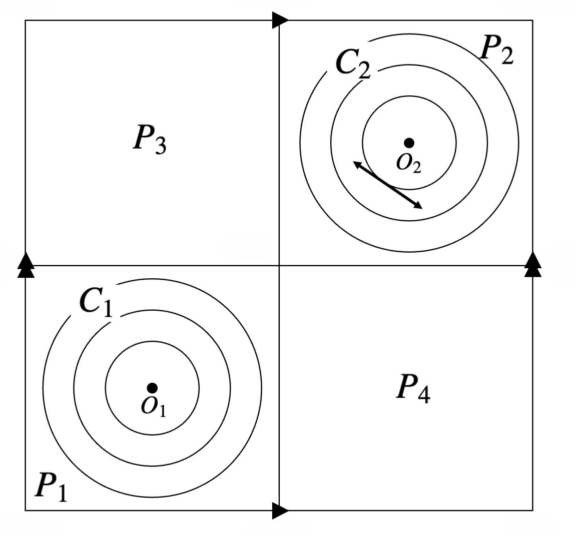

図 2:

このとき, 曲面 $\Sigma \subset T_1T^2$ を次のように定義する．C_1, C_2 の各閉曲線に接する長さ1の接ベクトル全体の集合を考える．この集合の T_1T^2 における閉包を Σ と定義する. ただし, 向きを考えた接ベクトルとする．このとき Σ は次のような性質を持っている.

1. Σ は滑らかな向き付け可能な曲面で, $\partial\Sigma$ は8個の ϕ_t の閉軌道の和集合で構成されている.

2. Σ の内部 $\mathrm{Int}(\Sigma)$ は ϕ_t と横断的に交わる.

3. Σ の Euler 数は -8 である. すなわち Σ は2次元トーラス T^2 から8個の開円板を取り除いた曲面と微分同相である.

Birkhoff 切断が存在すると, そこから第一回帰写像が定義できる.

定義 1.3. Σ を Birkhoff 切断とする. 流れを ϕ_t とする. 任意の点 $p \in \mathrm{Int}(\Sigma)$ に対して第一回帰写像 $F : \mathrm{Int}(\Sigma) \to \mathrm{Int}(\Sigma)$ を以下のように定義する.

$$F(p) = p'$$

ただし, p' は p において横断的に交わった ϕ_t が, 次に $\mathrm{Int}(\Sigma)$ と横断的に交わる点とする.

2　主定理

ここで [4] で得られた主結果について述べる.

測地線の傾きを θ とし, 第一回帰写像を $F : \mathrm{Int}(\Sigma) \longrightarrow \mathrm{Int}(\Sigma)$ とする. 傾き θ の測地線の接ベクトルからなる集合とバーコフ切断の共通部分を Λ_θ とおき, Λ_θ 全体の集合を Λ とする. このとき, Λ_θ は円周 S^1 であり, 測地線の傾き θ $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$ に対して, F の Λ_θ への制限は回転である.

定理 2.1. 測地線の傾き θ $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$ に対して, F の Λ_θ への制限 $F|_{\Lambda_\theta}$ は以下となる.

(i) $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ または $\pi \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$ のとき,

$$F|_{\Lambda_\theta} = \sqrt{\frac{\sin^2\theta}{(\sin\theta + \cos\theta)^2}}$$

(ii) $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$ または $\frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq 2\pi$ のとき,

$$F|_{\Lambda_\theta} = \sqrt{\frac{\cos^2\theta}{(\sin\theta - \cos\theta)^2}}$$

さらに第一回帰写像 F と位相共役な写像を求めた.

定理 2.2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

とし A が導く同相写像を $f_A : T^2 \to T^2$ とすると, ある同相写像 H が存在して, 次が成り立つ.

$$H \circ F = f_A \circ H$$

参考文献

[1] G. D. Birkhoff, Dynamical Systems with two degrees of freedom, *Trans. Amer. Math. Soc.* **18**, 199–300 (1917)

[2] D. Fried, Transitive Anosov flows and pseudo-Anosov maps, *Topology.* **22**, 299–303 (1983)

[3] E. Ghys, Sur l'invariance topologique de la classe de Godbillon-Vey, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble).* **37**, 59–76 (1987)

[4] K. Iwamoto, 3 次元多様体の測地流とバーコフ切断, 立命館大学 修士論文, (2023)

[5] G. P. Paternain, *Geodesic Flows*, Birkhäuser, (1999)