

Non-singular extensions of circle-valued Morse functions

九州大学大学院マス・フォア・イノベーション連係学府
岩倉康樹 (Koki IWAKURA) *

Abstract

与えられた写像から新しい特異点を作らずに拡張できる条件は何か？

写像の特異点に関する問題は微分トポロジーの問題であるが、非特異に拡張できる条件は組み合わせ的な対象によって言い表せることが Curley によって知られていた。

今回の研究では、circle-valued Morse function に着目し、非特異に拡張できる条件を Reeb graph などの組み合わせ的な対象を用いて表した。

1 導入

1.1 問題

初めに最も基本となる問題について述べる。今回考える問題は、以下の問題の特別な場合である。以下、多様体や写像は滑らかなもののみ考える。

Question 1.1. 閉多様体 M^m 、多様体 L^n 、写像 $f: M^m \rightarrow L^n$ で条件 Γ を満たすものが与えられているとする。このとき、多様体 N^{m+1} で $\partial N = M$ を満たすもの、写像 $F: N^{m+1} \rightarrow L^n$ で条件 Γ' を満たし、以下の図式を可換にするものが存在する条件は何か？

$$\begin{array}{ccc} M^m & \xrightarrow{f} & L^n \\ i \downarrow & \nearrow F & \\ N^{m+1} & & \end{array}$$

ただし、 i は自然な包含写像とする。

Question 1.2. 閉多様体 M^m 、多様体 L^n 、写像 $f: M^m \rightarrow L^n$ で条件 Γ_1 を満たすもの、 $g: M^m \times [0, 1) \rightarrow L^n$ で条件 Γ_2 を満たし $g|_{M \times \{0\}} = f$ であるものが与えられているとする。このとき、多様体 N^{m+1} で $\partial N = M$ を満たすもの、写像 $G: N^{m+1} \rightarrow L^n$ で条件 Γ' を満たし、以下の図式を可換にするものが存在する条件は何か？

$$\begin{array}{ccc} M^m \times [0, 1) & \xrightarrow{g} & L^n \\ i \downarrow & \nearrow G & \\ N^{m+1} & & \end{array}$$

* iwakura.kouki.285@s.kyushu-u.ac.jp

ただし, i は自然な包含写像とする.

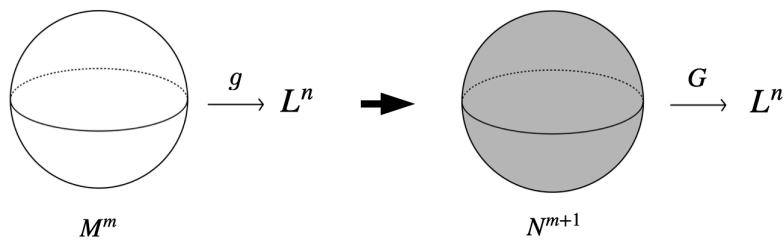


Figure1: Question 1.1のイメージ図

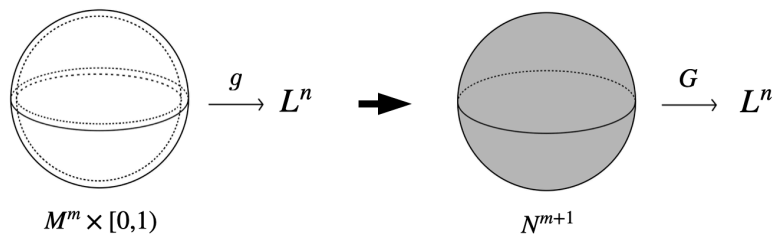


Figure2: Question 1.2のイメージ図

今回の研究 [6] は, Question 1.2において, $m = 2, n = 1$ で, M^2 は向き付け可能な閉曲面, $L^1 = S^1$, Γ_1 は “Morse 特異点のみもち, 臨界値は全て異なる”, Γ_2, Γ' は “特異点を持たない” という場合についての研究である.

1.2 先行研究と今回の研究について

$m \leq n$ のときの Question 1.1 についての研究は [10] などがある.

以下, $m \geq n = 1, L^1 = \mathbb{R}$ の先行研究を紹介する. Question 1.1, Question 1.2での, Γ, Γ_1 は “Morse 特異点のみもち, 臨界値は全て異なる”, Γ', Γ_1 は “沈めこみ” であるとする.

Question 1.1, は Arnold により, [1] にて 1981-8 として紹介されている. $m = 2$ で M^2 が向き付け可能である場合については Iwamoto[7] により, Curley による定理 [4] を用いて研究が行われている.

Question 1.2に対する答えとしての先行研究を紹介する.

$m = 1$ としての研究は, Blank-Laudenbuch[3] により行われている.

次に, $m = 2$ とする. M^2 が向き付け可能である場合は Curley による研究 [4] がある. M^2 が向き付け不可能な場合には Laroche による研究 [8] がある. $m = 2$ の研究において, Reeb graph という写像 f から得られるグラフを用いることで, 拡張の存在の条件は組み合わせ的な対象を考えることに帰着されることは特筆すべき点である.

m が一般の場合, $M^m = S^m$ の場合については, Barannikov[2] や Seigneur[12] により研究がされている. 前者は組み合わせ的, 後者は代数的な見方で拡張が可能になるための必要条件について考え

ている.

2 用語

2.1 circle-valued Morse function

まずは circle-valued Morse function を定義する. circle-valued Morse function に関する事実は, [5] を参考にした.

以下, 写像の値域として現れる S^1 は向き付けられていると仮定する.

Definition 2.1 (circle-valued Morse function). M^2 は閉曲面とする. このとき, $f: M^2 \rightarrow S^1$ が *circle-valued Morse function* であるとは, f の臨界点が全て非退化で, 臨界値が全て異なることとする.

Remark 2.2. 今回は *circle-valued Morse function* として, 沈め込みも許すことにする.

2.2 Reeb graph と label

次に circle-valued Morse function の Reeb graph を定義する.

Definition 2.3 (Reeb graph). M^2 は向き付け可能な閉曲面, $f: M^2 \rightarrow S^1$ は *circle-valued Morse function* とする. このとき, $x, y \in M$ に対して, \sim を次のように定義する:

$$x \sim y \iff f(x) = f(y) \text{ かつ } x, y \text{ は } f^{-1}(f(x)) \text{ の同じ連結成分に含まれる.}$$

これは同値関係であり, $W_f := M / \sim$ を f の **Reeb graph** という. W_f にて, f の臨界点が含まれる逆像の連結成分に対応する部分を頂点とする.

また, 下の可換図式を満たす連続写像 $\bar{f}: W_f \rightarrow S^1$ は一意的に定まる. 但し, $q_f: M \rightarrow W_f$ は商写像とする.

$$\begin{array}{ccc} M^2 & \xrightarrow{f} & S^1 \\ q_f \downarrow & \nearrow \bar{f} & \\ W_f & & \end{array}$$

頂点周りでの様子は Morse の補題 [9] から Figure 3のいずれかである.



Figure3: Reeb graph の頂点周りの様子

Remark 2.4. *circle-valued Morse function* の *Reeb graph* は上で定義した頂点, 辺でグラフになるとは限らない. 例えば, $f: T^2 \rightarrow S^1$ を Figure 4 とすると, *Reeb graph* は S^1 である.

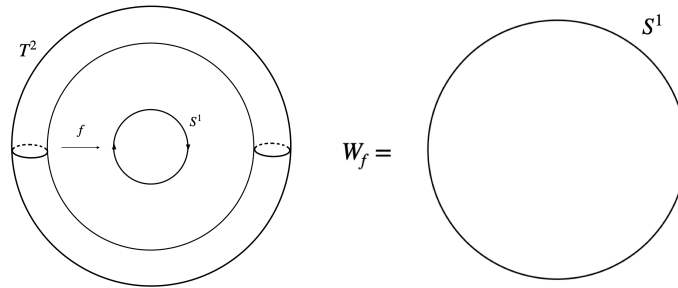


Figure4: Reeb graph が S^1 である例

さらに, Reeb graph の頂点に g によって厚みに関する情報を付与する.

$p \in M$ を f の臨界点, $w \in T_p(M \times [0, 1])$ を outward normal vector とする. このとき, $dg_p(w) \in T_{g(p)}S^1$ は S^1 の向きについて, 正, 負のいずれかである. 正であるとき W_f の対応する頂点に “+”, 負であるとき “-” を付与する.

Definition 2.5 (labeled Reeb graph). 上の方法で各頂点に符号を付与した *Reeb graph* を **labeled Reeb graph** と呼び, W_f^\pm で表す.

Figure 5 は labeled Reeb graph の例である.

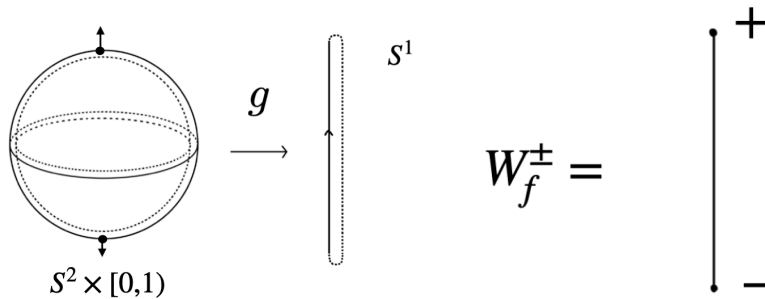


Figure5: labeled Reeb graph の具体例

2.3 non-singular extension

non-singular extension を定義する. これは, Question 1.2において, Γ' が “特異点を持たない” となるように拡張するというものである.

Definition 2.6 (non-singular extension). M^2 は向き付け可能な閉曲面, $g: M^2 \times [0, 1] \rightarrow S^1$ は $g|_{M \times \{0\}}$ が *circle-valued Morse function* であるような沈め込みとする. このとき, 向き付け可能, コンパクトな 3次元多様体 N^3 で境界が M に一致するようなもの, 沈め込み $G: N \rightarrow S^1$ で以下の

図式を可換にするものが存在するとき, G を g の *non-singular extension* という.

$$\begin{array}{ccc} M^2 \times [0, 1) & \xrightarrow{g} & S^1 \\ i \downarrow & \nearrow G & \\ N^3 & & \end{array}$$

上の図式は, Question 1.2の図式と同じものである. Figure 6の状況がこの図式の拡張のイメージ図である.

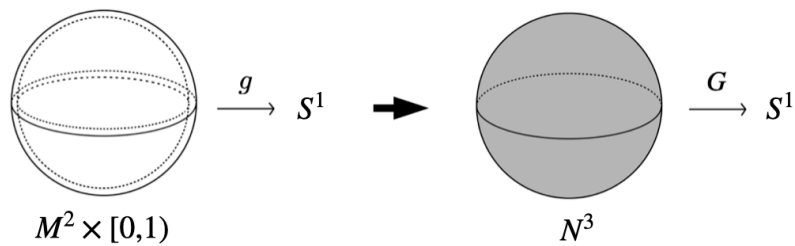


Figure6: non-singular extension のイメージ図

2.4 collapse

次に, “collapse”を導入する. これは, 拡張で臨界点まわりがどのように振る舞うのかということを組み合わせた言葉で表したものである.

Definition 2.7 (collapse). M^2 は向き付け可能な閉曲面, $g: M^2 \times [0, 1) \rightarrow S^1$ は $f = g|_{M \times \{0\}}$ が *circle-valued Morse function* であるような沈め込みとする. また, V は有限グラフといくつかの S^1 の非交和, $h: V \rightarrow S^1$ はグラフの辺, S^1 への制限がはめ込みであるような連続写像とする. ここで, 全射である連続写像 $C: W_f^\pm \rightarrow V$ が以下の条件を満たすとする:

1. C により, W_f^\pm の頂点は V の頂点に一対一に対応する,
2. 下の図式は可換である,
3. C は頂点周りで Figure 7のいずれかである.

$$\begin{array}{ccc} W_f^\pm & \xrightarrow{\bar{f}} & S^1 \\ C \downarrow & \nearrow h & \\ V & & \end{array}$$

このとき, C を *collapse* という.

さらに, collapse には “allowable” という性質を定義できる. 正確な定義は省略し, [6] に譲るが, 簡潔にいうと, V のそれぞれの連結成分で, V での Figure 7における G^+ , G^- に対応する頂点が一対一に対応するということである.

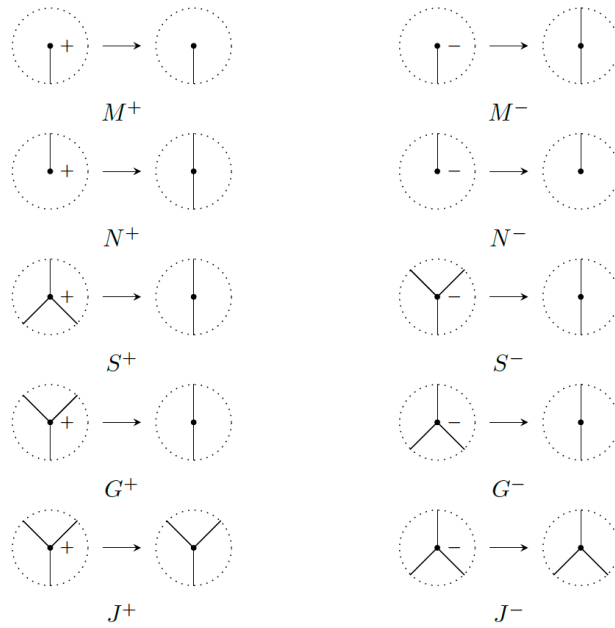


Figure7: collapse の頂点周りでの様子

3 主定理と例

3.1 主定理

以下の定理は, Question 1.2にて, $m = 2, n = 1, M^2$ は向き付け可能な閉曲面, $L^1 = S^1, \Gamma_1$ は “Morse 特異点のみもち, 臨界値は全て異なる”, Γ_2, Γ' は “特異点を持たない” という場合についての 組み合わせ的な条件を与えている.

Theorem 3.1. M^2 は向き付け可能な閉曲面, $g : M \times [0, 1) \rightarrow S^1$ は沈め込みで, 境界への制限 f が *circle-valued Morse function* であるものとする. このとき, 向き付け可能, コンパクトな 3次元多様体 N, g の *non-singular extension* $G : N \rightarrow S^1$ で (\star) を満たすものが存在するための必要十分条件は,

- V : 有限グラフといくつかの S^1 の非交和,
- $h : V \rightarrow S^1$: 有限グラフの辺, S^1 上ではめ込みであるような連続写像,
- $C : W_f^\pm \rightarrow V$: *allowable collapse*,

が存在することである.

但し, (\star) は以下の条件である:

各 $r \in S^1$ に対して, $G^{-1}(r)$ は境界を持つ.

定理の証明の流れを簡単に紹介しておく.

g の non-singular extension が与えられた状況からは, f の臨界点周りの g の形を観察することで, 条件を満たす Reeb graph や collapse を具体的に得る.

逆に, collapse C や h が与えられているとする. このとき, collapse により, g が拡張されるとき臨界点周りの様子がわかっている. また, 拡張した後の写像の値は h に従うとする. 従って, 実際に Figure 8 を collapse の局所表示 Figure 7 に従って組み合わせ, 値が h に従うように N を構成することで, G を構成する.

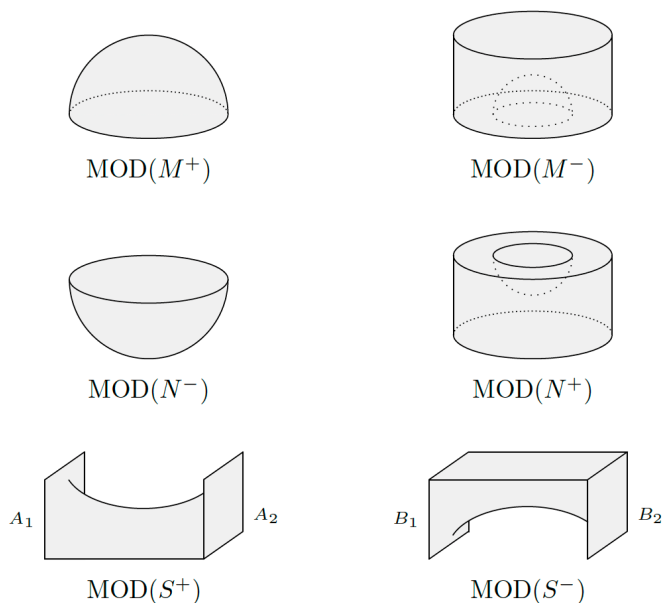


Figure8: 構成に使われるパーツ

3.2 構成の例

Theorem 3.1における N, G の構成を, Figure 9のように C, V, h を具体的に与え, 説明する.

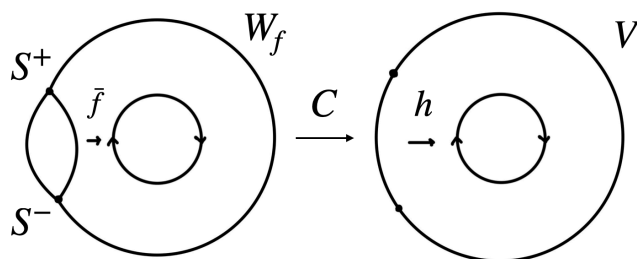


Figure9: C, V, h の具体例

\bar{f}, h の逆像が一点である S^1 の点に対し, D^2 を対応させる. S^1 の向きと逆に進んでいき, それに従って D^2 を引き延ばしていく. S^+ に対応する部分で, Figure 10のように MOD(S^+) を貼り合わせる.

同様に S^- に対応する部分で, MOD(S^-) を貼り合わせる. そして, さらに引き延ばして, Fig-

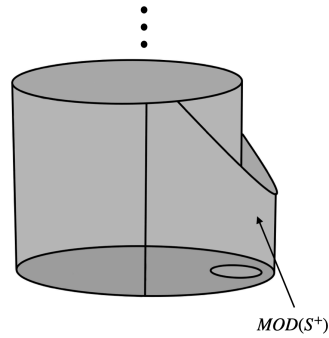


Figure10: $MOD(S^+)$ の貼り合わせ

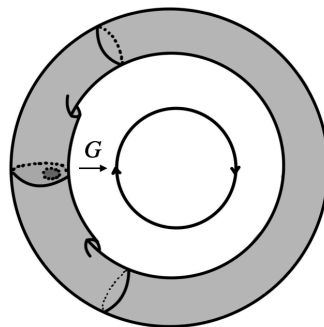


Figure11: 構成された写像

Figure 9に従って初めの曲面と貼り合わせる．以上の操作で出来上がったものが, Figure 11である．

4 まとめ

先行研究や今回の主定理について述べた場合は $n = 1$ のときであり, 拡張した後の写像は臨界点を持たなかった．他の次元ではどうなのか, 特異点を作るように拡張する場合にはどういった条件を考えれば良いのか, 拡張の仕方は何種類あるのかなど考えられる問題は沢山あるが, 現在研究中である．

今回の研究は circle-valued Morse function に関して行った．circle-valued Morse function は結び目や絡み目の不変量である Morse-Novikov number を定義するのに用いられる．そのため, Morse-Novikov number[11] への応用が何かできるのではないかと, Morse-Novikov number を模した不変量をより得点論的な観点から定めることができるのではないかと期待を持っている．

References

- [1] V. I. Arnold, *Arnold's problems*, translated and revised edition of the 2000 Russian original. With a preface by V. Philippov, A. Yakivchik, and M. Peters, Springer-Verlag, Berlin; PHASIS, Moscow (2004).
- [2] S. A. Barannikov, *The framed Morse complex and its invariants*, Adv. Soviet Math. **21** (1994), 93–115.

- [3] S. Blank and F. Laudenbach, *Extension à une variété de dimension $2d$ d'un germe de fonction donné le long du bord*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **270** (1970), 1663–1665.
- [4] C. Curley, *Non-singular extensions of Morse functions*, Topology (1) **16** (1977), 89–97.
- [5] I. Gelbukh, *Reeb graphs of circle-valued functions: A survey and basic facts*, Topol. Methods Nonlinear Anal. (1) **61** (2023), 59–81.
- [6] K. Iwakura, *Non-singular extensions of circle-valued Morse functions*, Preprint (2023), arXiv:2311.07309.
- [7] K. Iwamoto, *Non-singular extensions of Morse functions on disconnected surfaces*, Kyushu J. Math. **75** (2021), 23–40.
- [8] C. Laroche, *Extending a Morse function to a non-orientable 3-manifold*, Preprint (2017), arXiv:1709.03328v1.
- [9] J. Milnor, *Morse theory*, Ann. of Math. Stud. 51, Princeton Univ. Press (1963).
- [10] V. Poenaru, *Extension des immersions en codimension 1 (d'après S. Blank)*, exposé n° 342, 473–505 in: Séminaire N. Bourbaki, 10, 1966–1968, Soc. Math. de France, 1995; (online) Eudml.
- [11] A. Pazhitnov, L. Rudolph, L. K. Weber, *The Morse-Novikov number for knots and links*, (Russian)Algebra i Analiz **13** (2001), no. 3, 105–118; translation in St. Petersburg Math. J. **13** (2002), no. 3, 417–426.
- [12] V. Seigneur, *Extensions de fonctions d'un voisinage de la sphère à la boule*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris (7) 356 (2018), 712–716.