Perfectoid ideals and its correspondence

東京工業大学 理学院 数学系
石塚伶 (Ryo ISHIZUKA)

概要

パーフェクトイド環 R とその tilt $R^\flat$ について、その間のある種の対応はパーフェクトイド理論において中心的な役割を果たす。本講演ではそのような対応の一つとして、剰余環 R/I がパーフェクトイド環になるような R のイデアル I の集合と、$R^\flat$ の $p^\flat$ 進閉な根基イデアル J の集合との間の一対一対応を示したことを報告する。これらの結果はパーフェクトイド環の可換環論的性質に着目した純代数的手法によって証明されており、共同研究者である D.Dine 氏の先行研究の一般化になっている。

1　準備

1.1　Perfectoid ring について

p をある素数とする。本稿では環と言ったら $\mathbb{Z}_{(p)}$ 上の単位的可換環とする。まずは perfectoid の定義を行う。そのために必要な事項をまとめる。

定義 1.1. R を正標数 p の環とする。A が**完全**（*perfect*）であるとは、Frobenius 射 $R \xrightarrow{F} R$ が全単射になることである。

定義 1.2. 正標数の完全環 R に対して *Witt* **環** $W(R)$ が構成される。これは集合としては R の加算直積として定義され、その上にある環構造を入れる。とくに $W(R)$ は p 進完備な標数 0 の環であって、$W(R)/pW(R)$ は自然に R と同型になる。さらに乗法的な射

$$[-]\colon R \to W(R)$$

が定義され、これによって任意の $W(R)$ の元 x はある $\{a_i\}_{i\geq 0} \subseteq R$ が一意的に存在して

$$x = \sum_{i\geq 0}[a_i]p^i \in W(R)$$

と表すことができる。

例 1.3. $R = \mathbb{F}_p$ のとき、$W(R) = \mathbb{Z}_p$ である。より一般に、R が標数 p の完全体であるとき $W(R)$ は p で剰余をとると R と同型になる完全不分岐な標数 0 の離散付値環になる。

定義 1.4 ([BMS18, Lemma 3.2]). A を p 進完備な環とする。A の *tilt* とは

$$A^\flat \coloneqq \lim\{\cdots \xrightarrow{F} A/pA \xrightarrow{F} A/pA\} \tag{1}$$

のことである。とくにこれは完全な正標数の環になる。さらに次の乗法的な射

$$\sharp\colon A^\flat \to A/pA$$
$$a := (\overline{a_n})_{n\geq 0} \mapsto a^\sharp := \lim_{n\to\infty} a_n^{p^n}$$

が定義される。とくにこれは $a_n = (\overline{a_n})_{n\geq 0}$ の代表元の取り方に依らずに定まる。

補題 1.5 ([BMS18, §3.1]). A を環とする。ある元 $\pi \in A$ が存在して、A は π 進完備かつ π^p が p を割り切るとする。このとき次の対応は環準同型になる。

$$\theta\colon W(A^\flat) \to A$$
$$\sum_{i\geq 0}[a_i]p^i \mapsto \sum_{i\geq 0} a_i^\sharp p^i.$$

もし A/pA 上の Frobenius 射が全射であったとすると θ も全射になる。

さらに、次の対応

$$\lim_{a\mapsto a^p} A \to A^\flat := \lim_F A/pA$$
$$(a_n)_{n\geq 0} \mapsto (\overline{a_n})_{n\geq 0}$$
$$(\lim_{k\to\infty} a_{k+n}^{p^k})_{n\geq 0} \leftarrow\!\shortmid a := (\overline{a_n})_{n\geq 0}$$

は乗法的な全単射になる。この全単射を通じて $\lim_{a\mapsto a^p} A$ に環構造が入る。

以上の定義のもとで、perfectoid ring を定義する。

定義 1.6 ([BMS18, Definition 3.5]). p 進完備環 A が *perfectoid ring* であるとは、ある元 $\pi \in A$ が存在して次を満たすことである。

1. A において π^p は p を割り切る。
2. Frobenius 射 $A/pA \xrightarrow{F} A/pA$ は全射になる。
3. $\theta\colon W(A^\flat) \to A$ の核が単項生成である。

注意 1.7. とくに A の標数が p のときには $\pi = p = 0$ と取ることができるから、A が perfectoid ring であることと A が完全であることは同値である。このことから分かる通り、この perfectoid ring は正標数における完全性の混標数への一般化と見なすことが出来る。

補題 1.8 ([BMS18, Lemma 3.9]). A を環とする。ある元 $\pi \in A$ が存在して、A は π 進完備かつ π^p が p を割り切るとする。さらに p 乗写像 $\varphi\colon A/\pi A \to A/\pi^p A$ が全射であるとする。このとき、ある単元 $u \in A^\times$ と $A^\flat$ の元 $\pi^\flat \in A^\flat$ が存在して、$(\pi^\flat)^\sharp = u\pi \in A$ となる。上記の全単射を考えると、これは π は単元倍を除いて整合的な p 冪乗根の列 $\{\pi^{1/p^n}\}_{n\geq 0} \subseteq A$ を持つことを意味する。

補題 1.9 ([BMS18, Lemma 3.10]). A を環とする。ある元 $\pi \in A$ が存在して、A は π 進完備かつ π^p が p を割り切るとする。さらに p 乗写像 $\varphi\colon A/\pi A \to A/\pi^p A$ が全射であるとする。

1. もし $\ker(\theta)$ が単項生成であれば、$\varphi\colon A/\pi A \to A/\pi^p A$ は同型射であり、さらに $\ker(\theta)$ は非零因子で生成される。

2. 逆に、もし $\varphi\colon A/\pi A \to A/\pi^p A$ が同型射であり、π が A で非零因子であれば、$\ker(\theta)$ は単項生成である（すなわち A は perfectoid ring になる）。

系 1.10. A を perfectoid ring とする。ある $\pi^\flat \in A^\flat$ で $\pi := (\pi^\flat)^\sharp \in A$ について A が π 進完備かつ π^p が p を割り切るとする。このとき次で定まる環準同型

$$\begin{aligned} A^\flat = \lim_F A/pA &\xrightarrow{\cong} \lim_{a \mapsto a^p} A \to A \\ a = (\overline{a_n})_{n\geq 0} &\mapsto (\lim_{k\to\infty} a_{k+n}^{p^k})_{n\geq 0} \mapsto \lim_{k\to\infty} a_k^{p^k} = a^\sharp \end{aligned}$$

は標数 p の環の間の環同型

$$A^\flat/\pi^\flat A^\flat \xrightarrow{\cong} A/\pi A$$

を誘導する。とくに同相写像

$$\mathrm{Spec}(A^\flat/\pi^\flat A^\flat) \xrightarrow{\approx} \mathrm{Spec}(A/\pi A)$$

を誘導する。

この同相を踏まえて、次の問題を考えることが今回の研究の動機である。

問題 1.11. A を perfectoid ring とするとき、上記の同相を延長できるか。すなわち、次のある 2 つの部分集合 U と V

$$\begin{aligned} \mathrm{Spec}(A^\flat/\pi^\flat A^\flat) \subseteq &U \subseteq \mathrm{Spec}(A^\flat), \\ \mathrm{Spec}(A/\pi A) \subseteq &V \subseteq \mathrm{Spec}(A) \end{aligned}$$

について U と V の間に同相写像が存在するか。

1.2 Perfectoid Tate ring について

先行研究について紹介するために perfectoid Tate ring について復習する。

定義 1.12 ([SW20, §2.2]). R を位相環とする。

- R が *Huber ring* であるとは、R の開部分環 R_0 であって、その相対位相が R_0 のあるイデアル I による I 進位相と一致するものが存在することである。この R_0 を R の**定義環**といい、I を**定義イデアル**という。
- R が *complete Huber ring* であるとは、R が完備な位相環であって、Huber ring であるものである。これはある I 進完備な定義環 R_0 が存在することと同値である。
- R の部分集合 S が *bounded* であるとは、任意の 0 の開近傍 U に対して、ある 0 の開近傍 V が存在して $VS \subseteq U$ となることである。
- R の元 x が *power-bounded* であるとは、集合 $\{x^n\}_{n\geq 0} \subseteq R$ が bounded であることである。

定義 1.13 ([SW20, §2.2]). R を Huber ring とする。

- R が *Tate ring* であるとは、R が Huber ring であって、ある可逆な位相的冪零元 π が存在することである。この π を R の *pseudo-uniformizer* という。
- とくにこのとき環として $R \cong R_0[1/\pi]$ となり、$R_0[1/\pi]$ に 0 の基本近傍系として $\{\pi^n R_0\}_{n\geq 0}$ を用いた位相によって位相環としての同型にもなる。
- R° と書いたら R の power-bounded な元全体のなす集合を表すものとする。とくにこれは R の開部分環を与える。
- R が Huber ring であるとき、R が *uniform* であるとは、R° が bounded になることである。これは R° が R の定義環になることと同値である。
- R の部分環 R^+ が**整元環**であるとは、R^+ が R の開部分環であって、R の中で整閉かつ $R^+ \subseteq R^\circ$ となることである。
- 組 (R, R^+) が Huber pair であるとは、R が Huber ring であり、R^+ が R の整元環であることである。

定義 1.14 ([SW20, §6.1]). 位相環 R が *perfectoid Tate ring* であるとは、R が complete Tate ring であり、次を満たすことである。

1. R は uniform である。
2. ある pseudo-uniformizer π であって、$p \in \pi^p R^\circ$ となるものが存在する。
3. p 乗写像 $\varphi\colon R^\circ/\pi R^\circ \to R^\circ/\pi^p R^\circ$ は全単射である。

注意 1.15 ([BMS18, Lemma 3.20 and Lemma 3.21]). R が perfectoid Tate ring であるとき、R の任意の整元環 R^+ は perfectoid ring である。逆に A が perfectoid ring であって、ある非零因子 $\pi \in R$ で π 進完備かつ $\pi^p \in pR$ となっているとき、$A[1/\pi]$ は perfectoid Tate ring になる。

2 主定理

主定理は Dine による次の先行研究（Definition 2.1）の一般化になっている。

定理 2.1 ([Din22, Proposition 4.9 and Theorem 4.16]). $R = R^\circ[1/\pi]$ を perfectoid Tate ring とする。このとき次の一対一対応が存在する

$$\{J \subseteq R \mid J \text{ は } R \text{ 上のある有界な冪乗法的半ノルム } \phi \text{ の核となる}\}$$
$$\updownarrow$$
$$\{I \subseteq R^\flat \mid I \text{ は } R^\flat \text{ 上のある有界な冪乗法的半ノルム } \psi \text{ の核となる}\}.$$

ここで、perfectoid Tate ring R に対して $R^\flat$ は $(R^\circ)^\flat[1/\pi^\flat]$ で定める。

さらに Spec 上へ制限した集合をそれぞれ $\mathrm{Spec}_{\mathrm{Top}}(R)$ と $\mathrm{Spec}_{\mathrm{Top}}(R^\flat)$ とすると、これは次の同相写像を与える。

$$\emptyset \neq \mathrm{Spec}_{\mathrm{Top}}(R) \subseteq \mathrm{Spec}(R)$$
$$\wr\wr$$
$$\emptyset \neq \mathrm{Spec}_{\mathrm{Top}}(R^\flat) \subseteq \mathrm{Spec}(R^\flat).$$

この証明には Berkovich 空間の同相を用いた解析的な手法が用いられている。とくにこの同相を

示すために次の Berkoivch 空間の同相を用いている。

$$\mathcal{M}(R) \approx \mathcal{M}(R^\flat).$$

我々はこれを用いることなく、perfectoid Tate ring から perfectoid ring へと一般化し、さらに純代数的な手法によって証明した。そのために次の観察が必要になる。

命題 2.2 ([Din22, Theorem 4.4]). R を perfectoid Tate ring とする。I を R のイデアルとする。このとき R/I が perfectoid Tate ring になることと、I が R 上の有界な冪乗法的半ノルムの核になることは同値である。

これを元に次の言葉を定義する。

定義 2.3. A を perfectoid ring とする。A のイデアル J が *perfectoid ideal* であるとは、剰余環 A/J が perfectoid ring になることである。

これを踏まえて次の主定理を得る。

定理 2.4 ([DI23, Theorem 3.5]). A を perfectoid ring とする。このとき次の対応を考える。

$$A \supseteq J \mapsto J^\flat := \{f = (f^{(n)})_n \mid f^{(n)} \in J \text{ for all } n\} \subseteq A^\flat \text{ and}$$
$$A^\flat \supseteq I \mapsto I^\sharp := \theta_A(W(I)) \subseteq A.$$

ここで $W(I)$ は自然な射 $W(A^\flat) \to W(A^\flat/I)$ の核である。このときこれは次の一対一対応を与える。

$$\{J \subseteq A \mid J \text{ は } A/J \text{ が perfectoid ring になるような } A \text{ のイデアル}\}$$
$$\updownarrow$$
$$\{I \subseteq A^\flat \mid I \text{ は } A^\flat \text{ において } \pi^\flat \text{ 進閉な根基イデアル}\}.$$

この一対一対応はとくに perfectoid Tate ring $A[1/\pi]$ を考えると、Definition 2.1 の一対一対応を包含している。Spec 上へ制限した集合をそれぞれ $\mathrm{Spec}_{\mathrm{perfd}}(R)$ と $\mathrm{Spec}_{\mathrm{perfd}}(R^\flat)$ とすると、これは次の同相写像を与える。

$$\emptyset \neq \mathrm{Spec}_{\mathrm{perfd}}(A) \subseteq \mathrm{Spec}(A)$$
$$\wr\wr$$
$$\emptyset \neq \mathrm{Spec}_{\mathrm{perfd}}(A^\flat) \subseteq \mathrm{Spec}(A^\flat).$$

この同相写像は $\mathrm{Spec}(A^\flat/\pi^\flat A^\flat) \approx \mathrm{Spec}(A/\pi A)$ と $\mathrm{Spec}_{\mathrm{Top}}(A[1/\pi]) \approx \mathrm{Spec}_{\mathrm{Top}}(A^\flat[1/\pi^\flat])$ の同相を包含している。

この定理は次の応用を与える。

系 2.5 ([Din22, Corollary 4.17] and [DI23, Corollary 5.9]). A を perrectoid ring とする。A が整域であることと $A^\flat$ が整域であることは同値である。

References

[BMS18] Bhargav Bhatt, Matthew Morrow, and Peter Scholze. *Integral p-Adic Hodge Theory*. Publications mathématiques de l'IHÉS, 128.1 (2018), 219–397.

[DI23] Dimitri Dine and Ryo Ishizuka. *Tilting and Untilting for Ideals in Perfectoid Rings*. 2023. arXiv: 2308.09600.

[Din22] Dimitri Dine. *Topological Spectrum and Perfectoid Tate Rings*. Algebra & Number Theory, 16.6 (2022), 1463–1500.

[SW20] Peter Scholze and Jared Weinstein. *Berkeley Lectures on P-Adic Geometry*. Princeton University Press, 2020.